

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΘΕΜΑ 1°**

**A.1.** Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι:  
 $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$ .

**Μονάδες 8,5**

**A.2.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις και να συμπληρώσετε καθεμιά από αυτές με το κατάλληλο σύμβολο, ( $=, \leq, \geq$ ) έτσι ώστε να είναι αληθής:

**α.**  $P(A^c) \dots 1 - P(A)$

**Μονάδες 2**

**β.** αν  $A \subseteq B$  τότε  $P(B) \dots P(A)$ .

**Μονάδες 2**

**B.1.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και  $A^c$  το αντίθετο του ενδεχομένου A.

**α.** Αν  $A^c \subseteq B$  τότε  $P(A) + P(B) < 1$ .

**β.** Αν  $P(A) = P(A^c)$  τότε  $2P(A) = P(\Omega)$ .

**Μονάδες 4**

**B.2.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν  $A \subseteq B$ ,  $P(A) = \frac{1}{4}$  και  $P(B) = \frac{5}{12}$  τότε η  $P(A \cup B)$  είναι ίση με:

**α.**  $\frac{1}{4}$    **β.**  $\frac{5}{12}$    **γ.**  $\frac{2}{3}$    **δ.**  $\frac{1}{6}$ .

**Μονάδες 2,5**

**B.3.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης A** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης B**, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και ισχύει ότι

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{1}{5}.$$

Στήλη A	Στήλη B
<b>α.</b> $P(A - B)$	<b>1.</b> $\frac{1}{20}$
<b>β.</b> $P((B - A)^c)$	<b>2.</b> $\frac{2}{15}$
<b>γ.</b> $P((A \cap B)^c)$	<b>3.</b> $\frac{4}{5}$
	<b>4.</b> $\frac{1}{12}$
	<b>5.</b> $\frac{19}{20}$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ 2°**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sin x + \eta \mu x$ .

**A.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) + f''(x) = 0$ .

**Μονάδες 8**

**B.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A (0,1).

**Μονάδες 8**

**Γ.** Να βρείτε την τιμή  $\lambda \in \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\lambda f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ 3°**

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις.

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΡΙΤΗ 28 ΜΑΪΟΥ 2002  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

Βάρος σε κιλά [ - )	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i$
45 – 55	0,2
55 – 65	0,5
65 – 75	
75 – 85	

- A.** Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην τρίτη και τέταρτη κλάση.  
**Μονάδες 8**
- B.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων.  
**Μονάδες 9**
- Γ.** Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 80 μαθητών ένα μαθητή.  
**α.** Να βρείτε την πιθανότητα να έχει βάρος μικρότερο από 65 κιλά.  
**Μονάδες 4**  
**β.** Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 75 κιλών.  
**Μονάδες 4**

**ΘΕΜΑ 4°**

Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης, για τον χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο, διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά. Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.

- A.** Να βρείτε το μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους.  
**Μονάδες 6**
- B.** Να εξετάσετε, αν το δείγμα είναι ομοιογενές.  
**Μονάδες 6**
- Γ.** Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4.000, πόσοι μαθητές θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά.  
**Μονάδες 6**
- Δ.** Μια μέρα, λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης, κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά. Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής (CV).  
**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 1°**

- A.** Ας υποθέσουμε ότι  $x_1, x_2, \dots, x_k$  είναι οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$ , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους  $n$ , όπου  $k, n$  μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με  $k \leq n$ .
- α.** Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα  $v_i$ , που αντιστοιχεί στην τιμή  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .  
**Μονάδες 3**
- β.** Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα  $f_i$  της τιμής  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .  
**Μονάδες 3**
- γ.** Να αποδείξετε ότι:
- i)**  $0 \leq f_i \leq 1$  για  $i = 1, 2, \dots, k$
- ii)**  $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$ .  
**Μονάδες 4**

- B.1.** Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  να αποδείξετε ότι:  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .  
**Μονάδες 8**
- B.2. α.** Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου  $A$  κάποιου δειγματικού χώρου  $\Omega$ .  
**Μονάδες 5**
- β.** Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω πιθανοτήτων:  
**i)**  $P(\Omega)$       **ii)**  $P(\emptyset)$ .  
**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ .

- α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

β. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ .

Μονάδες 4

Μονάδες 4

γ. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f.

Μονάδες 7

δ. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες στην ευθεία  $y = 2x + 5$ .

Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ 3°**

Ένα προϊόν πωλείται σε 10 διαφορετικά καταστήματα στις παρακάτω τιμές, σε Ευρώ:  
8, 10, 13, 13, 15, 16, 18, 14, 14, 9.

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 6

β. Να υπολογίσετε το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.

Μονάδες 6

γ. Αν οι τιμές του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα υποστούν έκπτωση 10%, να εξετάσετε αν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής.

Μονάδες 13

**ΘΕΜΑ 4°**

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $P(A) + P(B) \neq 2P(A \cap B)$ .

Δίνεται ακόμα η συνάρτηση:

$$f(x) = (x - P(A \cup B))^3 - (x - P(A \cap B))^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α. Να δείξετε ότι  $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$ .

Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f(x) παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο

$$x = \frac{P(A) + P(B)}{2}.$$

Μονάδες 13

γ. Εάν τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα, να δείξετε ότι  $f(P(A)) = f(P(B))$ .

Μονάδες 7

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΡΙΤΗ 27 ΜΑΪΟΥ 2003  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1ο**

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης  $f(x) = x$  είναι  $f'(x) = 1$ .

Μονάδες 8

B. Πότε μια συνάρτηση f σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα;

Μονάδες 6

Γ. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

Δ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το εύρος είναι μέτρο θέσης.

β. Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

γ. Ισχύει  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

δ. Δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$  λέγονται ασυμβίβαστα, όταν  $A \cap B = \emptyset$ .

ε. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση των ποσοτικών μεταβλητών.

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ 2ο**

Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

- α. γυναίκα ή φιλόλογος **Μονάδες 5**
- β. γυναίκα και όχι φιλόλογος **Μονάδες 5**
- γ. άνδρας και φιλόλογος **Μονάδες 7**
- δ. άνδρας ή φιλόλογος. **Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

A. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο:

- α.  $\mathbf{R}$     β.  $(-1,1)$     γ.  $\mathbf{R} - \{-1,1\}$     δ.  $(1, +\infty)$

**Μονάδες 5**

B. Να αποδείξετε ότι  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x$  του πεδίου ορισμού της.

**Μονάδες 7**

Γ. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) \cdot f(x)]$

**Μονάδες 6**

Δ. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(0, f(0))$  με τον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς, σε Ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (ομάδα A) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (ομάδα B) ενός Γυμνασίου.

Ομάδα A	Ομάδα B
1	7
8	14
9	6
5	4
3	12
4	5

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε ομάδας.

**Μονάδες 6**

β. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες.

**Μονάδες 5**

γ. Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας A γίνει αύξηση 20% και οι παρατηρήσεις της ομάδας B αυξηθούν κατά 5 Ευρώ η κάθε μία, πώς διαμορφώνονται οι νέες μέσες τιμές των δύο ομάδων;

**Μονάδες 8**

δ. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες με τα νέα δεδομένα.

**Μονάδες 6**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα

αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΡΙΤΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2004  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης  $f(x) = c$  είναι ίση με 0.

**Μονάδες 8**

- B.** Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της.

**Μονάδες 5**

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Η συχνότητα της τιμής  $x_i$  μιας μεταβλητής  $X$  είναι αρνητικός αριθμός.
- β.** Στην κανονική κατανομή το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα  $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ , όπου  $\bar{x}$  είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και  $s$  η τυπική τους απόκλιση.
- γ.** Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα  $v_i$  μιας μεταβλητής  $X$  με το μέγεθος  $n$  του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα  $f_i$  της τιμής  $x_i$ .

**Μονάδες 6**

- Δ. Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης. Στη **Στήλη I** αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα A και B διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα και στη **Στήλη II** σχέσεις διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης I** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II** που αντιστοιχεί στην ίδια διατύπωση.

	Στήλη I		Στήλη II
α	πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B	1	$A \cap B$
β	πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B	2	$A - B$
γ	πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B	3	$(A \cup B)'$
		4	$A \cup B$

Στη **Στήλη II** περισεύει μία σχέση.

Μονάδες 6

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

- A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Μονάδες 10

- B. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

Μονάδες 15

**ΘΕΜΑ 3ο**

Στην «Αττική οδό» εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες οχήματα, τα οποία διανύουν από 5 έως 45 χιλιόμετρα. Η διανυόμενη απόσταση σε χιλιόμετρα από τα οχήματα αυτά παρουσιάζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα:

Κλάσεις σε χλμ.	Κέντρο κλάσης $x_i$	Συχνότητα $n_i$ σε χιλ. μονάδες	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα $N_i$ σε χιλ. μονάδες	Αθρ. Σχετ. Συχνότητα $F_i\%$
[5 , 15)		60			
[15 , 25)					68
[25 , 35)				180	
[35 , 45)					
Σύνολο		200			

- A. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τις τιμές των αντίστοιχων μεγεθών.

Μονάδες 10

- B. Να σχεδιάσετε το ιστογράμμα  $(x_i, f_i\%)$  και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

Μονάδες 5

- Γ. Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$ .

Μονάδες 5

- Δ. Να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων.

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

Οι πιθανότητες P(A) και P(B) δύο ενδεχομένων A και B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ίσες με τις τιμές του x, στις οποίες η f έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο.

A. Να δείξετε ότι  $P(A) = \frac{1}{2}$   $P(B) = \frac{1}{3}$

Μονάδες 9

B. Για τις παραπάνω τιμές των  $P(A)$ ,  $P(B)$  καθώς και για  $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ , να βρείτε τις πιθανότητες:

- i.  $P(A \cap B)$
- ii.  $P(A - B)$
- iii.  $P[(A \cap B)']$
- iv.  $P[(A - B) \cup (B - A)]$ .

Μονάδες 16

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας μόνο στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά την 10.30' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**  
**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ**  
**ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ 28 ΜΑΪΟΥ 2005**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**  
**ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

A. Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Μονάδες 10

B. α. Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές;

Μονάδες 3

β. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχής;

Μονάδες 4

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .

Μονάδες 2

β. Ισχύει  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ ,

όπου  $f, g$  παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Μονάδες 2

γ. Η διακύμανση είναι μέτρο θέσης.

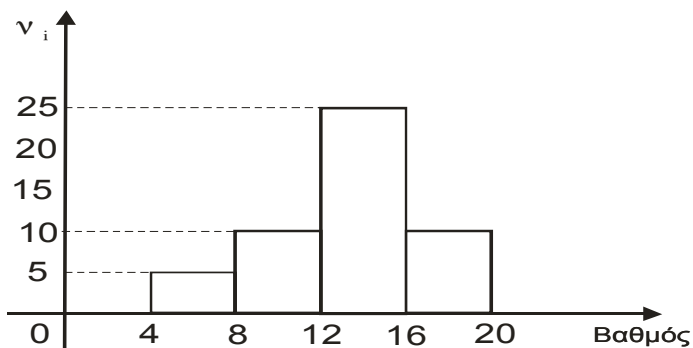
Μονάδες 2

δ. Αν  $A \subseteq B$  τότε  $P(A) > P(B)$ .

Μονάδες 2

**ΘΕΜΑ 2ο**

Σε ένα διαγώνισμα Βιολογίας η βαθμολογία των μαθητών δίνεται από το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων  $v_i$ :



α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις βαθ/γίας $I_i$	Κέντρο κλάσης $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Σχετική συχνότητα $f_i$	Αθροιστική συχνότητα $N_i$	Αθρ. σχετ. συχνότητα $F_i$
[4, 8)					
[8, 12)					
[12, 16)					
[16, 20)					
Σύνολο					

Μονάδες 11

β. Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών.

Μονάδες 8

γ. Πόσοι μαθητές έχουν βαθμό μέχρι και 10;

Μονάδες 6

**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω  $A, B$  ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , ώστε να ισχύουν:

(i) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα  $A, B$  είναι  $\frac{7}{8}$ .

(ii) Οι πιθανότητες  $P(B)$ ,  $P(A \cap B)$  δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο  $X = \left\{ k, \frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right\}$ , όπου

$$k = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 15}{x^2 - 6x + 5}$$

α. Να βρεθεί το  $k$ .

Μονάδες 5

β. Να βρεθούν τα  $P(B)$ ,  $P(A \cap B)$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

γ. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

(1) Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο  $A$ .

Μονάδες 6

(2) Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο  $A$ .

Μονάδες 6

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$ .

α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της  $f$  στο σημείο  $\Lambda(1,1)$ .

Μονάδες 7

β. Από τυχαίο σημείο  $M(x, y)$  της γραφικής παράστασης της  $f$  φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες  $xx'$  και  $yy'$ , οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες  $Ox, Oy$  ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου  $M$ , ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη.

**Μονάδες 10**

- γ. Οι τετμημένες πέντε διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος (α) έχουν μέση τιμή  $\bar{x} = 5$  και τυπική απόκλιση  $S_x = 2$ .

Να βρεθεί η μέση τιμή  $\bar{y}$  και η τυπική απόκλιση  $S_y$  των τεταγμένων των σημείων αυτών.

**Μονάδες 8**

### ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2006  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

### **ΘΕΜΑ 1ο**

- A. Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και  $c$  πραγματική σταθερά. Να αποδείξετε ότι

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), x \in \mathbb{R}.$$

**Μονάδες 10**

- B.a. Πότε δύο ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  λέγονται ασυμβίβαστα;

**Μονάδες 3**

- β. Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται συνεχής;

**Μονάδες 4**

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$ , λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_0 \in A$ , όταν  $f(x) \leq f(x_0)$  για κάθε  $x$  σε μια περιοχή του  $x_0$ .

**Μονάδες 2**

- β. Αν το ενδεχόμενο  $A'$ , συμπληρωματικό του ενδεχομένου  $A$ , πραγματοποιείται, τότε δεν πραγματοποιείται το  $A$ .

**Μονάδες 2**

γ. Για κάθε  $x \neq 0$  ισχύει:  $\left(\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{x^2}$ .

**Μονάδες 2**

δ. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Κατά την αρχή της σχολικής χρονιάς οι 50 μαθητές της τρίτης τάξης ενός Λυκείου ρωτήθηκαν σχετικά με τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν την περίοδο των θερινών διακοπών. Σύμφωνα με τις απαντήσεις που δόθηκαν, συντάχθηκε ο παρακάτω πίνακας:

Αριθμός Βιβλίων $x_i$	Αριθμός Μαθητών $v_i$
0	$\alpha+4$
1	$5\alpha+8$
2	$4\alpha$
3	$\alpha-1$
4	$2\alpha$
Σύνολο	50

α. Να υπολογίσετε την τιμή του  $\alpha$ .

**Μονάδες 3**

Στη συνέχεια να βρείτε:

β. Τη μέση τιμή του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.

**Μονάδες 7**

γ. Τη διάμεσο του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.

**Μονάδες 7**

δ. Την πιθανότητα ένας μαθητής να έχει διαβάσει τουλάχιστο 3 βιβλία.

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Σε ένα χορευτικό όμιλο συμμετέχουν  $x$  αγόρια και  $(x+4)^2$  κορίτσια.

α. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο, για να εκπροσωπήσει τον όμιλο σε μια εκδήλωση. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του  $x$  την πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι.

**Μονάδες 7**

β. Αν η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι είναι ίση με  $\frac{1}{19}$  και ο όμιλος περιλαμβάνει λιγότερα από 100 μέλη, να βρείτε τον αριθμό των μελών του ομίλου, καθώς και την πιθανότητα να επιλεγεί κορίτσι.

**Μονάδες 8**

γ. Ποιος πρέπει να είναι ο αριθμός των αγοριών του ομίλου, ώστε να μεγιστοποιείται η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι, και ποια είναι η τιμή της πιθανότητας αυτής;

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = -2x^2+kx + 4\sqrt{x} + 10, x \geq 0$ .

α. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο  $A(1, f(1))$  είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ , να αποδείξετε ότι  $k=2$  και να βρείτε την εξίσωσή της.

**Μονάδες 5**

β. Μία τυχαία μεταβλητή  $X$  ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\bar{x}=f(1)$  και τυπική απόκλιση

$s = -\frac{2f'(4)}{13}$ . Τρεις παρατηρήσεις, αντιπροσωπευτικού

δείγματος μεγέθους  $n$ , είναι μικρότερες ή ίσες του 8.

(i) Να βρείτε τον αριθμό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα (10,16).

**Μονάδες 10**

(ii) Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παρατηρήσεων που έχει ληφθεί, δεν είναι ομοιογενές.

Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παραμέτρου  $\alpha > 0$ , που πρέπει να προστεθεί σε κάθε μία από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα των νέων παρατηρήσεων να είναι ομοιογενές.

**Μονάδες 10**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορείτε να τα σχεδιάσετε και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΡΙΤΗ 22 ΜΑΪΟΥ 2007**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει  $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$ .

**Μονάδες 8**

**B.a.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

**β.** Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου ( $\delta$ ) ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων, όταν ο  $n$  είναι άρτιος αριθμός.

**Μονάδες 3**

**Γ1.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες  $F_i$  εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής  $x_i$ .

**Μονάδες 2**

β. Αν  $f, g$  είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης ισχύει:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

**Μονάδες 2**

γ. Αν για μια συνάρτηση  $f$  ισχύουν  $f'(x_0)=0$  για  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ,  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$  για  $x=x_0$  ελάχιστο.

**Μονάδες 2**

Γ2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f_1(x) = x^v, \quad \text{όπου } v \text{ φυσικός}$$

$$f_2(x) = \ln x, \quad \text{όπου } x > 0$$

$$f_3(x) = \sqrt{x}, \quad \text{όπου } x > 0$$

$$f_4(x) = \sin x, \quad \text{όπου } x \text{ πραγματικός.}$$

**Μονάδες 4**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = xe^x + 3$ , όπου  $x$  πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = f(x) + e^x - 3$

**Μονάδες 10**

β. Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - e^x}{x^2 - x}$ .

**Μονάδες 15**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω ο δειγματικός χώρος  $\Omega = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  για τον οποίο ισχύει  $P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2P(3) = 2P(4) = 2P(5)$ . Ορίζουμε τα ενδεχόμενα του  $\Omega$ :

$$A = \{1, 3, x^2 - x - 3\}, \quad B = \{2, x + 1, 2x^2 + x - 2, -2x + 1\}$$

όπου  $x$  ένας πραγματικός αριθμός.

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του  $\Omega$ , δηλαδή οι  $P(-1), P(0), P(1), P(2), P(3), P(4), P(5)$ .

**Μονάδες 7**

β. Να βρεθεί η μοναδική τιμή του  $x$  για την οποία ισχύει  $A \cap B = \{-1, 3\}$ .

**Μονάδες 8**

γ. Για  $x = -1$  να δειχθεί ότι:

$$P(A) = \frac{5}{11}, \quad P(B) = \frac{7}{11}, \quad P(A \cap B) = \frac{3}{11}$$

και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι πιθανότητες  $P(A-B)$  και  $P(A \cup B)$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Θεωρούμε δύο δείγματα  $A$  και  $B$  με παρατηρήσεις:

$$\text{Δείγμα } A: 12, 18, t_3, t_4, \dots, t_{25}$$

$$\text{Δείγμα } B: 16, 14, t_3, t_4, \dots, t_{25}.$$

Δίνεται ότι  $t_3 + t_4 + \dots + t_{25} = 345$ .

α. Να αποδείξετε ότι οι μέσες τιμές  $\bar{x}_A$  και  $\bar{x}_B$  των δύο δειγμάτων  $A$  και  $B$  αντίστοιχα είναι  $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 15$ .

**Μονάδες 7**

- β. Αν  $s_A^2$  είναι η διακύμανση του δείγματος Α και  $s_B^2$  είναι η διακύμανση του δείγματος Β, να αποδείξετε ότι  $s_A^2 - s_B^2 = \frac{16}{25}$ .

Μονάδες 8

- γ. Αν ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος Α είναι ίσος με  $CV_A = \frac{1}{15}$ , να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής  $CV_B$  του δείγματος Β.

Μονάδες 10

**ΟΔΗΓΙΕΣ**

(για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:30' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 22 ΜΑΪΟΥ 2008  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- Α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης  $f(x)=c$  (όπου  $x$  πραγματικός αριθμός) είναι ίση με 0, δηλαδή  $(c)'=0$ .

Μονάδες 8

- Β. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής  $X$ , αν  $\bar{x} > 0$  και πώς, αν  $\bar{x} < 0$ ;

Μονάδες 7

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Αν  $A, B$  είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , τότε ο τύπος

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ισχύει μόνον όταν τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου  $\Omega$  είναι ισοπίθανα.

Μονάδες 2

- β. Η διάμεσος  $\delta$  ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων  $t_1, t_2, \dots, t_n$  είναι πάντοτε μία από τις παρατηρήσεις αυτές.

Μονάδες 2

γ. Αν  $x > 0$ , τότε  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

**Μονάδες 2**

δ. Αν  $x_0$  είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta_{\mu x} = \eta_{\mu x_0}.$$

**Μονάδες 2**

ε. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$ , όπου  $x$  πραγματικός αριθμός.

α. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1}$ .

**Μονάδες 7**

β. Να αποδείξετε ότι  $e^x f'(x) = 2 - x$ .

**Μονάδες 9**

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f(x)$ .

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Για δύο τύπους μπαταριών Α και Β επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα (σε χιλιάδες ώρες) δίνονται στον επόμενο πίνακα:

A	B
20	26
26	32
24	19
22	20
18	23

α. Να βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου Α και μιας μπαταρίας τύπου Β.

**Μονάδες 5**

β. Αν μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει 38 ευρώ και μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει 40 ευρώ, ποιον τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσετε; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

**Μονάδες 5**

γ. Να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις  $S_A$  και  $S_B$  της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών.

**Μονάδες 7**

δ. Να βρείτε ποιος από τους δύο τύπους μπαταριών Α και Β παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του.

Δίνεται ότι  $\sqrt{11} \cong 3,3$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Το 50% των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα α, ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα α και δεν διαβάζουν την εφημερίδα β.

α. Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μη διαβάζει την εφημερίδα α ή να διαβάζει την εφημερίδα β;

**Μονάδες 7**

β. Ορίζουμε το ενδεχόμενο

B: «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την εφημερίδα β».

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}.$$

**Μονάδες 9**

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B)x$$

όπου x πραγματικός αριθμός και B το ενδεχόμενο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) δεν έχει ακρότατα.

**Μονάδες 9**

**ΟΔΗΓΙΕΣ**

(για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:30' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
 ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ  
 ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')  
 ΔΕΥΤΕΡΑ 18 ΜΑΪΟΥ 2009  
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
 ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
 ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

**Μονάδες 10**

- B. Αν  $x_1, x_2, \dots, x_k$  είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους  $n$  ( $k \leq n$ ), να ορίσετε τη σχετική συχνότητα  $f_i$  της τιμής  $x_i$ ,  $i=1, 2, \dots, k$ .

**Μονάδες 5**

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων  $f, g$  ισχύει ότι

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x) + f(x)g'(x)$$

**Μονάδες 2**

- β. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , τότε ισχύει ότι

$$A - B = A \cap B'$$

**Μονάδες 2**

- γ. Για τη συνάρτηση  $f(x) = \eta \mu x$  ισχύει ότι  $(\eta \mu x)' = -\sigma \upsilon \nu x$

**Μονάδες 2**

- δ. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

**Μονάδες 2**

- ε. Η μέση τιμή ενός συνόλου  $n$  παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης.

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές  $x_i$ ,  $i=1, 2, 3, 4$  μιας μεταβλητής X με αντίστοιχες συχνότητες  $v_i$ ,  $i=1, 2, 3, 4$ . Η συχνότητα  $v_2$  που αντιστοιχεί στην τιμή  $x_2=3$  είναι άγνωστη. Δίνεται ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι ίση με  $\bar{x}=4$ .

$x_i$	$v_i$
2	6
3	;
5	3
8	4

- α. Να αποδείξετε ότι  $v_2=7$ .

**Μονάδες 9**

- β. Να αποδείξετε ότι η διακύμανση των παρατηρήσεων είναι ίση με 4,9.

**Μονάδες 9**

- γ. Να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών της μεταβλητής X είναι ομοιογενές.

Δίνεται ότι  $\sqrt{4,9} \approx 2,2$

**Μονάδες 7**



**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=x^3-6x^2+ax-7$ , όπου  $a$  πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει

$$2f''(x)+f'(x)+15=3x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι  $a=9$

**Μονάδες 7**

β. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2-1}$

**Μονάδες 8**

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$ , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία  $y=-3x$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=\ln x - \frac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2$ ,  $x > 0$  όπου  $\lambda$  ένας πραγματικός αριθμός.

A. α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

**Μονάδες 6**

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση  $f$  ως προς τα ακρότατα.

**Μονάδες 6**

B. Θεωρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης  $f(2)$ ,  $f(4)$ ,  $f(8)$ ,  $f(3)$  και  $f(5)$  είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $X$ .

α. Αν  $R$  είναι το εύρος και  $\delta$  η διάμεσος των παρατηρήσεων, να δειχθεί ότι

$$R=3+\ln \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \delta=\ln 4+\lambda^2-6\lambda$$

**Μονάδες 7**

β. Έστω ο δειγματικός χώρος  $\Omega=\{1,2,3,\dots,100\}$  ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Αν το  $\lambda$  παίρνει τιμές στο δειγματικό χώρο  $\Omega$ , να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$$A=\{\lambda \in \Omega \mid R+\delta < -2\}$$

**Μονάδες 6**

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης.** Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ  
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')  
ΔΕΥΤΕΡΑ 17 ΜΑΪΟΥ 2010  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $t_1, t_2, \dots, t_n$  οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής  $X$  ενός δείγματος μεγέθους  $n$ , που έχουν μέση τιμή  $\bar{x}$

Σχηματίζουμε τις διαφορές  $t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, \dots, t_n - \bar{x}$

Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν.

**Μονάδες 7**

**A2.** Αν  $x_1, x_2, \dots, x_n$  είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής  $X$  ενός δείγματος μεγέθους  $n$  και  $w_1, w_2, \dots, w_n$  είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε το σταθμικό μέσο της μεταβλητής  $X$ .

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω  $\Omega$  ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Να δώσετε τους ορισμούς του βέβαιου ενδεχομένου και του αδύνατου ενδεχομένου.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν στο  $x_0$  όρια πραγματικούς αριθμούς, τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

**β)** Για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

**γ)** Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση  $x=f(t)$ , τη χρονική στιγμή  $t_0$  είναι  $v(t_0)=f'(t_0)$

**δ)** Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$

**ε)** Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

**B1.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$

**Μονάδες 10**

**B2.** Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0=0$

**Μονάδες 10**

**B3.** Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα  $x'x$

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Γ**

Οι τιμές της απώλειας βάρους, σε κιλά, 160 ατόμων, τα οποία ακολούθησαν ένα πρόγραμμα αδυνατίσματος, έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ $x_i$	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ $v_i$
[0 - ...)	...	20
[... - ...)	6	40
[... - ...)	...	45
[... - ...)	...	30
[... - ...)	...	25
ΣΥΝΟΛΟ		160

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι το πλάτος  $c$  κάθε κλάσης είναι ίσο με 4  
**Μονάδες 6**
- Γ2.** Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα σωστά συμπληρωμένο, να υπολογίσετε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  και την τυπική απόκλιση  $s$   
**Μονάδες 8**
- Γ3.** Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.  
**Μονάδες 5**
- Γ4.** Αν κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου Α: « η απώλεια βάρους ενός ατόμου που επιλέχθηκε τυχαία να είναι από 7 μέχρι και 14 κιλά».  
**Μονάδες 6**

$$\text{Δίνεται ο τύπος } s^2 = \frac{1}{v} \left[ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right]$$

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω  $A, B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με αντίστοιχες πιθανότητες  $P(A), P(B)$  και η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x - P(A)) - \frac{1}{2}(x - P(A))^2 + P(B), \quad x > P(A)$$

- Δ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.  
**Μονάδες 13**
- Δ2.** Αν η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο  $x_0 = \frac{5}{3}$  με τιμή  $f(x_0) = 0$ , να αποδείξετε ότι:

$$P(A) = \frac{2}{3} \quad \text{και} \quad P(B) = \frac{1}{2}$$

**Μονάδες 2**

Λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα **Δ2** και επιπλέον ότι  $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ , να βρείτε την πιθανότητα:

- Δ3.** να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα  $A, B$ .  
**Μονάδες 5**
- Δ4.** να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα  $A, B$ .  
**Μονάδες 5**

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης.** Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  να αποδειχθεί ότι:  
 $P(A-B)=P(A) - P(A \cap B)$ .  
**Μονάδες 7**
- A2.** Πότε δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  λέγονται ασυμβίβαστα;  
**Μονάδες 4**
- A3.** Τι εκφράζει η σχετική συχνότητα  $f_i$  μιας παρατήρησης  $x_i$  ενός δείγματος.  
**Μονάδες 4**
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα, στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Η διακύμανση εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.  
**Μονάδες 2**
- β)** Σε μία κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι φορές τη μέση τιμή, δηλαδή  $R \approx 6\bar{x}$ .  
**Μονάδες 2**

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

γ) Για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

**Μονάδες 2**

δ) Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα.

**Μονάδες 2**

ε) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, αν ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ξεπερνά το 10%.

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ Β**

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, κόκκινες και μαύρες σφαίρες. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα. Η πιθανότητα να είναι μαύρη είναι  $P(M) = \frac{1}{4}$ , η πιθανότητα να είναι άσπρη είναι  $P(A) = 4\lambda^2$

και η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι  $P(K) = -5\lambda + \frac{7}{4}$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Αν για το πλήθος  $N(\Omega)$  των σφαιρών που υπάρχουν στο κουτί ισχύει  $64 < N(\Omega) < 72$ , τότε

**B1.** Να δείξετε ότι  $N(\Omega) = 68$

**Μονάδες 6**

**B2.** Να υπολογιστεί η τιμή του  $\lambda$

**Μονάδες 8**

**B3.** Να βρείτε πόσες άσπρες, πόσες μαύρες και πόσες κόκκινες σφαίρες υπάρχουν στο κουτί.

**Μονάδες 6**

**B4.** Παίρνουμε τυχαία μία σφαίρα. Να βρεθεί η πιθανότητα αυτή να είναι άσπρη ή μαύρη.

**Μονάδες 5**

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΘΕΜΑ Γ**

Οι πωλήσεις, σε χιλιάδες ευρώ, που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους ομαδοποιήθηκαν σε πίνακα συχνοτήτων με κλάσεις ίσου πλάτους. Το αντίστοιχο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων  $f_i\%$  έχει διαδοχικές κορυφές τις:

A(8, 0)      B(10, 10)      Γ(12, 20)      Δ(14,  $y_\Delta$ )  
E(16,  $y_E$ )      Z(18, 10)      H(20, 0)

όπου  $y_\Delta$ ,  $y_E$  οι τεταγμένες των κορυφών Δ και Ε του πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖΗ.

**Γ1.** Να υπολογιστούν οι τεταγμένες  $y_\Delta$  και  $y_E$  των κορυφών Δ και Ε, αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των πωλήσεων στη διάρκεια του έτους είναι 14200 ευρώ και το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα

**Μονάδες 7**

**Γ2.** Να σχεδιαστεί το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων  $f_i\%$ .

**Μονάδες 3**

**Γ3.** Να κατασκευαστεί ο πίνακας των σχετικών συχνοτήτων  $f_i\%$  της κατανομής των πωλήσεων που έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.

**Μονάδες 7**

**Γ4.** Η διεύθυνση της εταιρείας αποφάσισε τη χορήγηση ενός επιπλέον εφάπαξ ποσού σε όσους πωλητές έχουν κάνει ετήσιες πωλήσεις τουλάχιστον 15000 ευρώ. Να υπολογιστεί το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν αυτό το ποσό.

**Μονάδες 4**

**Γ5.** Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων οι οποίες έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους και του οριζόντιου άξονα είναι 80. Να βρείτε τον αριθμό των πωλητών που

δικαιούνται το εφάπαξ ποσό που αναφέρεται στο Γ4 ερώτημα.

**Μονάδες 4**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^{\frac{1}{3}x \left( x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5} \right)}, x \in \mathbb{R}$$

**Δ1.** Να μελετηθεί η  $f$  ως προς τη μονοτονία.

**Μονάδες 8**

**Δ2.** Αν  $A, B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $A \subseteq B$  και  $P(A), P(B)$  είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης  $f$  να υπολογιστούν οι πιθανότητες  $P(A \cap B), P(A - B), P(A \cup B), P(B - A)$ .

**Μονάδες 8**

**Δ3.** Δίνεται η συνάρτηση

$$h(x) = e^{\frac{1}{5}x \left( \frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3} \right)}, x \in \mathbb{R}.$$

**α)** Να λυθεί η εξίσωση  $f(x) = h(x)$ .

**Μονάδες 3**

**β)** Αν  $x_1 < x_2 < x_3$  οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης και  $v_i = 2x_i + 1, i = 1, 2, 3$  οι συχνότητες των παρατηρήσεων  $x_i$  τότε να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων.

**Μονάδες 6**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ  
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι  $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 7**

**A2.** Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου  $A$

**Μονάδες 4**

**A3.** Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής  $X$ , αν  $\bar{x} > 0$  και πώς, αν  $\bar{x} < 0$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποσοτικών δεδομένων (μονάδες 2).

**β)** Η παράγωγος της  $f$  στο  $x_0$  εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του  $y=f(x)$  ως προς  $x$ , όταν  $x=x_0$  (μονάδες 2).

**γ)** Αν  $A, B$  ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $A \subseteq B$ , τότε ισχύει ότι  $P(A) > P(B)$  (μονάδες 2).

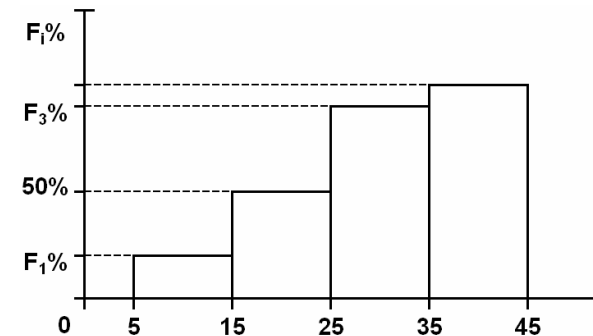
**δ)** Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής είναι μέτρα διασποράς (μονάδες 2).

**ε)**  $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta_{\mu x} = \eta_{\mu x_0}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  (μονάδες 2).

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα  $[5, 45)$  και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.



**B1.** Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

**Μονάδες 4**

**B2.** Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι  $\alpha=8$  (μονάδες 3) και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας (μονάδες 5).

Χρόνοι (λεπτά)	$x_i$	$v_i$	$f_i\%$	$N_i$	$F_i\%$
[5, ·)		$\alpha+4$			
[·, ·)		$3\alpha-6$			
[·, ·)		$2\alpha+8$			
[·, 45)		$\alpha-2$			
Σύνολο					

**Μονάδες 8**

**B3.** Να βρεθεί η μέση τιμή  $\bar{x}$  και η τυπική απόκλιση  $s$  των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

(Δίνεται ότι:  $\sqrt{84} \approx 9,17$ )

**Μονάδες 8**

**B4.** Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα.

**Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ Γ

Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Αν  $v$  φυσικός αριθμός με  $v \geq 3$ , τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει

- Γαλλικά είναι  $\frac{3v}{v^2+1}$
- Ισπανικά είναι  $\frac{v+2}{v^2+1}$

- και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι  $\frac{v+1}{v^2+1}$

- μία τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες είναι ίση με το όριο  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω δύο γλώσσες είναι βέβαιο.

**Μονάδες 7**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι  $v=3$

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες.

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι 32, να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης.

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1+\ln^2 x}{x}$ ,  $x > 0$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Έστω  $M(x, f(x))$ ,  $x > 0$  σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$ . Η παράλληλη ευθεία από το  $M$  προς τον άξονα  $y'y$  τέμνει τον ημιάξονα  $Ox$  στο σημείο  $K(x, 0)$  και η παράλληλη ευθεία από το  $M$  προς τον άξονα  $x'x$  τέμνει τον ημιάξονα  $Oy$  στο σημείο  $\Lambda(0, f(x))$ . Αν  $O$  είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου  $OK\Lambda$  γίνεται ελάχιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

**Μονάδες 7**



- Δ3. Έστω η ευθεία  $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ ,  $\beta \neq 10$ , η οποία είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $\Sigma(1, f(1))$ . Θεωρούμε δέκα σημεία  $(x_i, y_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, 10$  της ευθείας  $\varepsilon$ , τέτοια ώστε οι τετμημένες τους  $x_i$  να έχουν μέση τιμή  $\bar{x} = 10$  και τυπική απόκλιση  $s_x = 2$ . Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\beta$  το δείγμα των τεταγμένων  $y_i$  των δέκα σημείων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 8

- Δ4. Αν  $A$  και  $B$  είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τέτοια ώστε  $A \neq \emptyset$  και  $A \cap B \neq \emptyset$ , τότε να αποδείξετε ότι

$$f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$$

Μονάδες 5

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**  
**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

**ΘΕΜΑ Α**

- A1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης  $f(x) = x$  είναι  $f'(x) = 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 7

- A2. Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο  $x_0 \in A$ ;

Μονάδες 4

- A3. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου ( $\delta$ ) ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

- A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$  ισχύει ότι  $f'(x) = \frac{1}{x^2}$  (μονάδες 2)

- β) Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων  $f, g$  ισχύει ότι

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(μονάδες 2)

- γ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής. (μονάδες 2)

- δ) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις. (μονάδες 2)

- ε) Για δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $A \subseteq B$ , ισχύει ότι  $P(A) > P(B)$  (μονάδες 2)

Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται ο δειγματικός χώρος  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$  και τα ενδεχόμενα

$$A = \{\omega_1, \omega_4\} \quad \text{και} \quad B = \{\omega_1, \omega_3\}$$

Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων  $\{\omega_1\}$  και  $\{\omega_3\}$  του  $\Omega$  ισχύει ότι:

$$\bullet \quad P(\omega_1) = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x^3 + x^2}$$

- Η  $P(\omega_3)$  είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της  $f(x)$  ως προς  $x$ , όταν  $x=1$ , όπου

$$f(x) = \frac{x}{3} \ln x, \quad x > 0$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$  και  $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

**Μονάδες 10**

**B2.** Να αποδείξετε ότι  $\frac{1}{3} \leq P(A') \leq \frac{3}{4}$ , όπου  $A'$  το συμπληρωματικό του  $A$ .

**Μονάδες 7**

**B3.** Αν  $P(A') = \frac{3}{4}$ , τότε να βρείτε τις πιθανότητες  $P(\omega_2)$ ,  $P(\omega_4)$ ,  $P[(A-B) \cup (B-A)]$  και  $P(A \cap B')$ , όπου  $B'$  το συμπληρωματικό του  $B$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Θεωρούμε ένα δείγμα  $n$  παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής  $X$ , τις οποίες ομαδοποιούμε σε 4 ισοπλάτεις κλάσεις.

Δίνεται ότι:

- η μικρότερη παρατήρηση είναι 50
- η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι  $x_4 = 85$
- η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της τρίτης κλάσης
- η διάμεσος των παρατηρήσεων του δείγματος είναι  $\delta = 75$  και
- η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι  $\bar{x} = 74$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι το πλάτος είναι  $c = 10$

**Μονάδες 4**

**Γ2.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο σωστά

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές $x_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i$
[·, ·)		
[·, ·)		
[·, ·)		
[·, ·)		
Σύνολο		

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Δίνεται ότι  $f_1 = 0,1$ ,  $f_2 = 0,3$ ,  $f_3 = 0,2$  και  $f_4 = 0,4$

Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων, που είναι μικρότερες του 80, είναι  $\frac{200}{3}$

**Μονάδες 7**

**Γ4.** Επιλέγουμε  $k$  παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος με  $k < n$ , οι οποίες ακολουθούν κανονική κατανομή με

- το 2,5% των παρατηρήσεων αυτών να είναι τουλάχιστον 74
- το 16% των παρατηρήσεων αυτών να είναι το πολύ 68

Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων αυτών καθώς και να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές.

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = x \ln x + k$ ,  $x > 0$ , όπου  $k$  ακέραιος με  $k > 1$  και την εφαπτομένη ( $\epsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(1, f(1))$ , η οποία σχηματίζει με τους άξονες, τρίγωνο εμβαδού  $E$ , με  $E < 2$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $k = 2$

**Μονάδες 5**

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**Δ2.** Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_{50}$  οι τετμημένες 50 σημείων της (ε) των οποίων οι αντίστοιχες τεταγμένες τους έχουν μέση τιμή  $\bar{y}=31$

α) Να αποδείξετε ότι  $\bar{x}=30$  (μονάδες 2)

β) Για τις τετμημένες των παραπάνω σημείων θεωρούμε ότι :

Κάθε μία από τις τετμημένες  $x_1, x_2, \dots, x_{20}$  αυξάνεται κατά 3, οι επόμενες 15 τετμημένες παραμένουν σταθερές και κάθε μία από τις υπόλοιπες ελαττώνεται κατά  $\lambda \in \mathbb{R}$  με  $\lambda > 0$ .

Να βρείτε το  $\lambda$ , ώστε η νέα μέση τιμή των τετμημένων να είναι ίση με 31 (μονάδες 4)

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Αν  $\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e$  με  $\alpha^a \cdot \beta^b \cdot \gamma^c = e^7$ , τότε να βρείτε το εύρος R και τη μέση τιμή των τιμών  $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma), f(e), f\left(\frac{1}{e}\right)$ , όπου  $f(x) = x \ln x + 2$

**Μονάδες 7**

**Δ4.** Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο

$$\Omega = \left\{ t_n, n = 1, 2, 3, \dots, 30 : 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{10} < \frac{1}{e} < t_{11} < \dots < t_{30} = 1 \right\}$$

με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, καθώς και τα ενδεχόμενα

$A = \{ t \in \Omega : \text{η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της } f \text{ στο σημείο } (t, f(t)), \text{ να σχηματίζει με τον άξονα } x'x \text{ οξεία γωνία } \}$ ,

$B = \{ t \in \Omega : f(t) > f'(t) + 1 \}$ ,

όπου  $f(t) = t \ln t + 2$

Να βρεθούν οι πιθανότητες:

α) να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A (μονάδες 3)

β) να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα A και B (μονάδες 4)

**Μονάδες 7**

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μην γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και ΜΟΝΟ για πίνακες, διαγράμματα κλπ..
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

- A1. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και  $c$  σταθερός πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε με τη χρήση του ορισμού της παραγώγου ότι

$$(c f(x))' = c f'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

- A2. Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

- A3. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή λέγεται διακριτή και πότε συνεχής;

Μονάδες 4

- A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει  $f'(x_0) = 0$ , για  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ , και η παράγωγός της  $f'$  διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του  $x_0$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$  και δεν παρουσιάζει ακρότατο στο διάστημα αυτό.

(μονάδες 2)

- β) Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει:

$$P(A - B) = P(B) - P(A \cap B)$$

(μονάδες 2)

- γ) Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα  $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ , όπου  $\bar{x}$  η μέση τιμή και  $s$  η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

(μονάδες 2)

- δ) Αν  $x_i$  είναι τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής  $X$ , τότε η αθροιστική συχνότητα  $N_i$  εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής  $x_i$

(μονάδες 2)

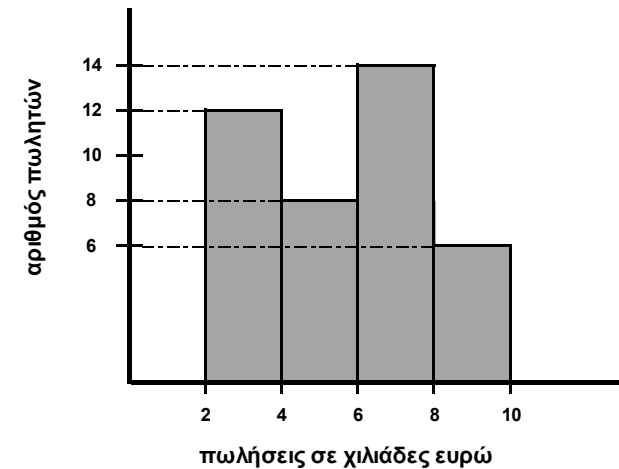
- ε) Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή, ισοδύναμα, τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες  $N_i$  ή τις σχετικές συχνότητες  $f_i$  των τιμών  $x_i$  της μεταβλητής.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων, το οποίο παριστάνει τις πωλήσεις σε χιλιάδες ευρώ που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.



- B1. Να βρείτε το πλήθος των πωλητών της εταιρείας.

Μονάδες 5

- B2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων κατάλληλα συμπληρωμένο, δικαιολογώντας τη στήλη με τις σχετικές συχνότητες  $f_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Σχετική συχνότητα $f_i$
$[-1, 0)$			
$[0, 1)$			
$[1, 2)$			
$[2, 3)$			
Σύνολο			

Μονάδες 8

B3. α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των πωλήσεων του έτους.

(μονάδες 6)

β) Να βρείτε το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδων ευρώ (θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανομημένες).

(μονάδες 6)

Μονάδες 12

**ΘΕΜΑ Γ**

Ένα δοχείο περιέχει κόκκινες (Κ), άσπρες (Α) και πράσινες (Π) μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα. Η πιθανότητα να προκύψει κόκκινη μπάλα είναι  $P(K) = x_1$ , ενώ η πιθανότητα να προκύψει άσπρη μπάλα είναι  $P(A) = x_2$ , όπου  $x_1, x_2$  είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης

$$f(x) = 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \text{ με } x_1 < x_2$$

Γ1. Να βρείτε τις πιθανότητες  $P(K)$ ,  $P(A)$  και  $P(\Pi)$ , όπου  $P(\Pi)$  η πιθανότητα να προκύψει πράσινη μπάλα.

Μονάδες 10

Γ2. Αν  $P(K) = \frac{1}{4}$  και  $P(A) = \frac{1}{3}$ , να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

- Γ: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι κόκκινη ή άσπρη»
- Δ: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι ούτε κόκκινη ούτε άσπρη»
- Ε: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι άσπρη ή να μην είναι πράσινη».

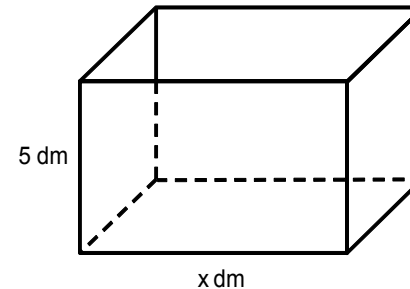
Μονάδες 9

Γ3. Αν οι άσπρες μπάλες είναι κατά τέσσερις (4) λιγότερες από τις πράσινες μπάλες, να βρείτε πόσες μπάλες έχει το δοχείο.

Μονάδες 6

**ΘΕΜΑ Δ**

Θεωρούμε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση ορθογώνιο και ανοικτό από πάνω.



Το ύψος του κουτιού είναι 5 dm. Η βάση του κουτιού έχει σταθερή περίμετρο 20 dm και μία πλευρά της είναι  $x$  dm με  $0 < x < 10$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνολική επιφάνεια του κουτιού ως συνάρτηση του  $x$  είναι  $E(x) = -x^2 + 10x + 100, \quad x \in (0, 10)$

και να βρείτε για ποια τιμή του  $x$  το κουτί έχει μέγιστη επιφάνεια.

Μονάδες 8

Στη συνέχεια, θεωρούμε τα σημεία  $A_i(x_i, y_i)$ , όπου  $y_i = E(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 15$  με  $5 = x_1 < x_2 < \dots < x_{14} < x_{15} = 9$

Δ2. Αν το δείγμα των τετμημένων  $x_i, i = 1, 2, \dots, 15$  των παραπάνω σημείων  $A_i(x_i, y_i)$

- δεν είναι ομοιογενές
- έχει μέση τιμή  $\bar{x} = 8$  και
- τυπική απόκλιση  $s$  τέτοια, ώστε

$$2s^2 - 5s + 2 = 0$$

τότε:

α) να αποδείξετε ότι  $s = 2$

(μονάδες 4)

β) να βρείτε τη μέση τιμή των  $x_i^2$ , με  $i = 1, 2, \dots, 15$

$$\text{Δίνεται ότι: } s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v t_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^v t_i \right)^2}{v} \right\}$$

(μονάδες 4)

**Μονάδες 8**

**Δ3.** Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα παραπάνω σημεία  $A_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 15$   
Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου:

$$B = \{A_i(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, 15 \text{ τέτοια, ώστε } y_i > -4x_i + 9R + 1\},$$

όπου  $R$  είναι το εύρος των  $y_i = E(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 15$

**Μονάδες 9**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)  
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2015  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: 5(ΠΕΝΤΕ)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Αν  $x_1, x_2, \dots, x_n$  είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής  $X$  ενός δείγματος μεγέθους  $n$  και  $w_1, w_2, \dots, w_n$  είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε τον σταθμικό μέσο της μεταβλητής  $X$ .

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύουν  $f'(x_0) = 0$  για  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ,  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$  για  $x = x_0$ .
- β) Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.
- γ) Η διακύμανση των παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής  $X$  εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

- δ) Αν για τους συντελεστές μεταβολής των δειγμάτων  $A$  και  $B$  ισχύει  $CV_B > CV_A$ , τότε λέμε ότι το δείγμα  $B$  εμφανίζει μεγαλύτερη ομοιογένεια από το δείγμα  $A$ .
- ε) Αν  $A, B$  είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , τότε η έκφραση «η πραγματοποίηση του  $A$  συνεπάγεται την πραγματοποίηση του  $B$ » δηλώνει ότι  $A \subseteq B$ .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω  $A, B$  και  $\Gamma$  ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ . Οι πιθανότητες των ενδεχομένων  $A, A \cap B$  και  $A \cup B$  ανήκουν στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$(3x - 1) \cdot (8x^2 - 6x + 1) = 0.$$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου  $\Gamma$  ανήκει στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$9x^2 - 3x - 2 = 0.$$

B1. Να αποδείξετε ότι  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$  και  $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ .

Μονάδες 5

B2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα  $P(A' - B')$ , καθώς επίσης και την πιθανότητα του ενδεχομένου

$\Delta$ : «πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$ ».

Μονάδες 8

B3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου  $E$ : «πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$ ».

Μονάδες 6

B4. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα  $B$  και  $\Gamma$  είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα  $n$  παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής  $X$ , τις οποίες ομαδοποιούμε σε 5 ισοπλατείς κλάσεις, όπως παρουσιάζονται στον Πίνακα **Γ**, όπου  $f_i\%$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  είναι οι σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό των αντιστοίχων κλάσεων. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες. Δίνεται ότι :

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%.
- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%.
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην 3<sup>η</sup> κλάση είναι  $108^\circ$ .
- Η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι  $\bar{x} = 14$ .

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Κλάσεις	$f_i\%$
[8 , 10)	
[10 , 12)	
[12 , 14)	
[14 , 16)	
[16 , 18)	

**ΠΙΝΑΚΑΣ Ι**

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $f_1\%=10, f_2\%=10, f_3\%=30, f_4\%=20, f_5\%=30$ . Δεν είναι απαραίτητο να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον **Πίνακα Ι** συμπληρωμένο.

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

Δίνεται ότι  $\sqrt{6,6} \approx 2,57$ .

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Έστω  $x_1, x_2, x_3$  και  $x_4$  τα κέντρα της 1<sup>ης</sup>, 2<sup>ης</sup>, 3<sup>ης</sup> και 4<sup>ης</sup> κλάσης αντίστοιχα και  $v_1, v_2, v_3$  και  $v_4$  οι συχνότητες της 1<sup>ης</sup>, 2<sup>ης</sup>, 3<sup>ης</sup> και 4<sup>ης</sup> κλάσης αντίστοιχα. Αν

$$\sum_{i=1}^4 x_i v_i = 1780, \text{ βρείτε το πλήθος } n \text{ των παρατηρήσεων του δείγματος.}$$

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Έστω  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  πέντε τυχαία επιλεγμένες παρατηρήσεις διαφορετικές μεταξύ τους από το παραπάνω δείγμα  $n$  παρατηρήσεων. Ορίζουμε ως  $\bar{\alpha}$  τη μέση τιμή των πέντε αυτών παρατηρήσεων και  $S_\alpha$  την τυπική τους απόκλιση.

Εάν  $\beta_i = \frac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{S_\alpha}$ , για  $i=1, 2, 3, 4, 5$ , να δείξετε ότι η μέση τιμή  $\bar{\beta}$  του δείγματος

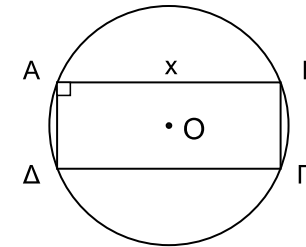
$\beta_i, i=1, 2, 3, 4, 5$  είναι ίση με 0 και η τυπική του απόκλιση  $S_\beta$  είναι ίση με 1.

**Μονάδες 7**

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται κύκλος  $(O, \rho)$  με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho=5$  και ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτόν με πλευρά  $AB=x$ , όπως φαίνεται στο **Σχήμα Ι**.



**ΣΧΗΜΑ Ι**

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$ , ως συνάρτηση του  $x$ , δίνεται από τον τύπο  $f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$ ,  $0 < x < 10$ .

**Μονάδες 4**

**Δ2.** Να βρείτε την τιμή του  $x$  για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$  γίνεται μέγιστο. Για την τιμή αυτήν του  $x$ , δείξτε ότι το ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  είναι τετράγωνο.

**Μονάδες 5**

**Δ3.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x}$ .

**Μονάδες 8**

**Δ4.** Έστω  $A, B$  ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ . Αν  $P(A-B) > 0$ , να δείξετε ότι

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}\right).$$

**Μονάδες 8**



**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

- 1.** Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
- 2.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
- 4.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 5.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 6.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)  
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2016  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ(4)

ΘΕΜΑ Α

- A1. Αν  $A$  και  $A'$  είναι δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  να αποδείξετε ότι για τις πιθανότητες τους ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A).$$

Μονάδες 7

- A2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου ( $\delta$ ) ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

- A3. Έστω  $f$  μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο  $x_0 \in A$ ;

Μονάδες 4

- A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Αν  $A$  και  $B$  είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $A \subseteq B$ , τότε για τις πιθανότητες τους ισχύει  $P(A) \leq P(B)$ .

- β) Ο σταθμισμένος αριθμητικός μέσος ή σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.

- γ) Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμες, τότε ισχύει ότι:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

- δ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

- ε) Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- B1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

Μονάδες 9

- B2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $A(0, f(0))$ .

Μονάδες 8

- B3. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x) - 12}{x + 1}$ .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μία οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά της ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησής τους.

- Γ1. Να προσδιορίσετε το δειγματικό χώρο  $\Omega$  του πειράματος χρησιμοποιώντας ένα δένδροδιάγραμμα.

Μονάδες 4

- Γ2. Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

A: «το πρώτο παιδί είναι κορίτσι»

B: «ο αριθμός των κοριτσιών υπερβαίνει τον αριθμό των αγοριών»

Γ: «τα δύο πρώτα παιδιά είναι του ίδιου φύλου».

Μονάδες 6

- Γ3. Υποθέτουμε ότι ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

- α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

$$\Delta = A \cap B, \quad E = A \cup B, \quad Z = \Gamma - E.$$

(μονάδες 9)

- β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

H: «δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A, B»

Θ: «πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A, B».

(μονάδες 6)

Μονάδες 15

**ΘΕΜΑ Δ**

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν  $n$  υπολογιστές για να τρέξουν ένα πρόγραμμα, έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 ισοπλάτεις κλάσεις πλάτους  $c$ , όπως στον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική Τιμή $x_i$	Συχνότητα $v_i$
[8 , )		20
[ , )	14	15
[ , )		10
[ , )		$v_4$
ΣΥΝΟΛΟ		$v = \dots\dots\dots$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $c=4$ .

**Μονάδες 4**

**Δ2.** Αν η μέση τιμή των χρόνων είναι  $\bar{x}=14$ , να αποδείξετε ότι  $v_4=5$  (μονάδες 4) και στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο (μονάδες 2).

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Αν οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανομημένες σε κάθε κλάση, να βρείτε πόσοι υπολογιστές χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά για να τρέξουν το πρόγραμμα.

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση των χρόνων είναι  $s=4$  και να εξετάσετε αν το δείγμα των χρόνων είναι ομοιογενές.

**Μονάδες 6**

**Δ5.** Αντικαθιστούμε τον επεξεργαστή κάθε υπολογιστή με έναν ταχύτερο και βρίσκουμε ότι κάθε υπολογιστής τρέχει τώρα το πρόγραμμα στο 80% του χρόνου που χρειαζόταν πριν. Να εξετάσετε ως προς την ομοιογένεια το καινούργιο δείγμα χρόνων.

**Μονάδες 4**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας, να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 19 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ(3)

**ΘΕΜΑ Α**

A1. Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 7

A2. Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_0 \in A$ ;

Μονάδες 4

A3. Αν ομαδοποιήσουμε τις παρατηρήσεις μιας μεταβλητής σε κλάσεις, τι ονομάζουμε πλάτος μιας κλάσης;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε ισχύει

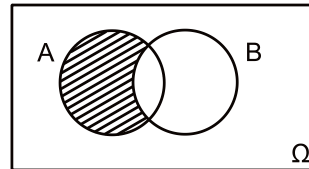
$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

β) Μία συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$ , με  $x_1 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ .

γ) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.

δ) Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει ότι  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

ε) Το γραμμοσκιασμένο χωρίο στο διπλανό σχήμα αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο  $B - A$ .



Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ Β**

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές  $x_i$  και οι αντίστοιχες συχνότητες  $v_i$  που προέκυψαν από παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $X$ .

$x_i$	$v_i$
1	2
3	3
5	4
9	1

B1. Για τις παρατηρήσεις αυτές να υπολογιστούν:

- α. η μέση τιμή  $\bar{X}$  (μονάδες 6)
- β. η διάμεσος  $\delta$  (μονάδες 5)
- γ. η διακύμανση  $s^2$ . (μονάδες 7)

Μονάδες 18

B2. Να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 7

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\epsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(2, f(2))$ .

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία ( $\epsilon$ ) του ερωτήματος Γ2 τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

Μονάδες 4

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1}$ .

Μονάδες 8

**ΘΕΜΑ Δ**

Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μία άσπρη, μία μαύρη και μία κόκκινη.

Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία άλλη μια φορά.

Δ1. Να κατασκευάσετε το δένδροδιάγραμμα που περιγράφει το παραπάνω πείραμα (μονάδες 3) και να γράψετε τον δειγματικό χώρο  $\Omega$  του πειράματος.

Μονάδες 5

Δ2. Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

A: «η δεύτερη μπάλα που θα εξαχθεί να είναι μαύρη»

B: «να εξαχθούν δυο μπάλες διαφορετικού χρώματος».

Μονάδες 6

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**Δ3.** Υποθέτουμε ότι ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  του προηγούμενου πειράματος αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και  $A, B$  είναι τα ενδεχόμενα του ερωτήματος **Δ2**.

α. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

$A', A \cap B, A - B, B - A$ . (μονάδες 8)

β. Αν  $\Gamma$  είναι ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου  $\Omega$ , το οποίο είναι ασυμβίβαστο τόσο με το ενδεχόμενο  $A$  όσο και με το ενδεχόμενο  $B$ , να υπολογίσετε ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να έχει η πιθανότητα  $P(\Gamma)$ . (μονάδες 6)

**Μονάδες 14**

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας, να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ