Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄: Αριθμητική – Άλγεβρα, Κεφάλαιο 2 - Κλάσματα

Κεφάλαιο 2ο: Κλάσματα

Α.2.1. Η έννοια του κλάσματος

∼

1. Δραστηριότητα

Ένα βράδυ τρεις φίλοι αγοράζουν μια πίτσα και την χωρίζουν σε οκτώ ίσα κομμάτια. Ο ένας έφαγε το ένα, ο δεύτερος τα τρία και ο τρίτος δύο κομμάτια.

(α) Σε πόσα ίσα κομμάτια χωρίσαμε την πίτσα; ....

(β) Ποιο μέρος της πίτσας έφαγε ο πρώτος από τους φίλους; ....

(γ) Πώς διαβάζεται το μέρος της πίτσας που έφαγε ο πρώτος από τους φίλους;

....

(δ) Μπορείτε να βρείτε το μέρος της πίτσας που έφαγε ο δεύτερος από τους φίλους;

....

(ε) Τι μέρος της πίτσας περίσσεψε;

....

- Στο κλάσμα $\frac{3}{8}$ → Αριθμητής, → Κλασματική γραμμή, → Παρονομαστής
- Ο Αριθμητής και ο Παρονομαστής λέγονται όροι του κλάσματος.
- Όλα τα νιοστά, δηλαδή ν νιοστά, μας δίνουν την αρχική ποσότητα: $\frac{\nu}{\nu}=1$.
- Η έννοια του κλάσματος επεκτείνεται και στην περίπτωση που ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή. Τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1.
- Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή κλάσματος με παρονομαστή το 1.

2. Δώστε δύο παραδείγματα κλασμάτων που είναι μεγαλύτερα του 1.

....

....

3. Δώστε δύο παραδείγματα κλασμάτων που είναι μικρότερα του 1.

....

....

4. Γράψτε δύο φυσικούς αριθμούς σε μορφή κλάσματος.

....

....

Όταν ένα μέγεθος ή ένα σύνολο ομοειδών αντικειμένων χωρισθεί σε ν ίσα μέρη, το κάθε ένα από αυτά αποτελεί το ένα νιοστό του μεγέθους και συμβολίζεται με το $\frac{1}{\nu}$.

Κάθε τμήμα του μεγέθους ή του συνόλου αντικειμένων, που αποτελείται από κ τέτοια ίσα μέρη, δίνεται από το κλάσμα $\kappa\cdot\frac{1}{\nu}=\frac{\kappa}{\nu}$ και διαβάζεται «κάπα νιοστά».

Ο παρονομαστής ενός κλάσματος δεν μπορεί να είναι μηδέν.

Ένα κλάσμα είναι μικρότερο από το 1 όταν:

....

....

....

Ένα κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1 όταν:

....

....

....

Ένα κλάσμα είναι ίσο με 1 όταν:

....

....

Ένα κλάσμα είναι ίσο με 0 όταν:

....

....

5. Δραστηριότητα

(α) Παρατηρώντας το παρακάτω σχήμα, μπορείτε να βρείτε ποιο μέρος του μήκους του τμήματος ΑΒ είναι το μήκος του τμήματος ΑΚ; Πειραματιστείτε με το μικροπείραμα **mpa2_1.ggb**.

....	Χρειάζεται να χωρίσω το τμήμα σε ίσα μέρη. Κάνοντας δοκιμές και πειραματισμό διαπιστώνω ότι χρειάζεται να το χωρίσω το τμήμα ΑΒ σε .... ίσα μέρη, ώστε να μπορώ να προσδιορίσω το μέρος που έχει το μήκος του τμήματος ΑΚ σε σχέση με το τμήμα ΑΒ. Έτσι, το τμήμα ΑΒ χωρίστηκε σε .... ίσα μέρη, ενώ παρατηρώ ότι το μήκος του τμήματος ΑΚ είναι ίσο με τα .... του ΑΒ.

Αφού προσδιορίσετε ποιο μέρος του όλου είναι το τμήμα ΑΚ, μπορείτε να υπολογίσετε το μήκος του γνωρίζοντας το μήκος του ΑΒ.

(β) Να υπολογίσετε το μήκος του ΑΚ, αν γνωρίζουμε ότι το ΑΒ είναι 32 cm;

....	Αφού το μήκος του ΑΒ είναι 32 cm, το ΑΚ θα έχει μήκος μικρότερο του ΑΒ. Επειδή το ΑΒ είναι 32 cm, κάθε ένα από τα .... ίσα μέρη του ΑΒ θα είναι ίσο με: .... Έχοντας υπολογίσει το μήκος που έχει ένα μέρος του ΑΒ, μπορώ να υπολογίσω το μήκος που θα έχει το ΑΚ, αφού γνωρίζω πόσα μέρη του ΑΒ είναι το ΑΚ. Το ΑΚ είναι ίσο με τα .... του ΑΒ. Συνεπώς, το ΑΚ θα έχει μήκος ....

Για να βρείτε την τιμή του μέρους χρειάζεται να ξεκινήσετε από την τιμή του όλου που είναι η τιμή της μονάδας.

6. Άσκηση

Μια σοκολάτα ζυγίζει 120 gr και έχει 6 ίσα κομμάτια.

(α) Ποιο μέρος της σοκολάτας είναι το κάθε κομμάτι;

(β) Πόσα κομμάτια πρέπει να κόψουμε για να πάρουμε 40 gr;

....

....

7. Άσκηση

Κατά την διάρκεια της εκδρομής, ένας φίλος σας, έχει ένα παγούρι που χωράει 500 ml νερού. Τον ρωτάτε αν έχει αρκετό νερό ακόμα και σας απαντάει: «Κοίτα εδώ! Έχει απομείνει το $\frac{1}{4}$ του νερού μου». Πόσα ml νερού έχει ακόμα στο παγούρι του;

....

....

....

Α.2.2. Ισοδύναμα κλάσματα

~

Δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται **ισοδύναμα** όταν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών.

Επειδή εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους είναι ίσα και μπορεί να γραφεί:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$$

Αν δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα τότε τα «χιαστί γινόμενα»:
$\alpha \cdot \delta$ και $\beta \cdot \gamma$ είναι ίσα.
Δηλαδή:
Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

Η διαίρεση των όρων ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό (≠0) λέγεται απλοποίηση του κλάσματος.

Το κλάσμα εκείνο που δεν μπορεί να απλοποιηθεί (δεν υπάρχει κοινός διαιρέτης αριθμητή και παρονομαστή) λέγεται **ανάγωγο**.
Ένα κλάσμα είναι ανάγωγο όταν ο ΜΚΔ του αριθμητή και παρανομαστή είναι 1.

Το επίθετο ανάγωγο στα μαθηματικά προέρχεται από τη λέξη αναγωγή, δεν σχετίζεται με τη λέξη αν-αγωγή.

Για να ελέγξετε αν δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα χρειάζεται να υπολογίσετε αν τα «χιαστί γινόμενα» είναι ίσα.

8. Δραστηριότητα

Τα παρακάτω πέντε τετράγωνα είναι χωρισμένα αντίστοιχα, σε ίσα μέρη.

(α) Προσπαθήστε να βρείτε για καθεμία περίπτωση το κλάσμα του τετραγώνου που αποτελεί το χρωματισμένο μέρος του;

(β) Στη συνέχεια συγκρίνετε τα κλάσματα, που θα βρείτε μεταξύ τους.

Τι παρατηρείτε για τα κλάσματα που βρήκατε;

....

....

....

Για να κατασκευάσετε ισοδύναμα κλάσματα ή για να διαπιστώσετε ότι δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα, μπορείτε να εφαρμόσετε τους παρακάτω κανόνες:

1. Όταν πολλαπλασιαστούν οι όροι ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό (≠ 0) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο. $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{8}{12}$
2. Όταν οι όροι ενός κλάσματος διαιρεθούν με τον ίδιο φυσικό αριθμό (≠ 0) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο. $\frac{10}{15}=\frac{10:5}{15:5}=\frac{2}{3}$

9. Να γράψετε δύο ισοδύναμα κλάσματα.

....

....

....

10. Να εξετάσετε αν τα κλάσματα $\frac{3}{5}$ και $\frac{10}{14}$ είναι ισοδύναμα. Εργαστείτε στο μικροπείραμα [mpa2_2.ggb](mpa2_2.ggb).

....

....

Για να απλοποιήσετε ένα κλάσμα χρειάζεται να διαιρέσετε τον αριθμητή και τον παρονομαστή του, με τον ίδιο αριθμό.
Για να οδηγηθείτε σε ένα ανάγωγο κλάσμα χρειάζεται να διαιρέσετε αριθμητή και παρονομαστή με τον ΜΚΔ.
Άρα για να απλοποιήσετε ένα κλάσμα:
1. Βρίσκετε έναν κοινό διαιρέτη αριθμητή και παρονομαστή.
2. Διαιρείτε αριθμητή και παρονομαστή με τον κοινό διαιρέτη.

11. Να εξετάσετε αν τα κλάσματα $\frac{3}{8}$ και $\frac{18}{48}$ είναι ισοδύναμα.

12. Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{30}{66}$.

13. Το κλάσμα $\frac{8}{9}$ δεν απλοποιείται. Να εξηγήσετε γιατί.

Για να κάνετε ένα κλάσμα ανάγωγο:
1. Βρίσκετε τον ΜΚΔ αριθμητή και παρονομαστή.
2. Διαιρείτε αριθμητή και παρονομαστή με τον ΜΚΔ.

14. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{2}{5}$ σε ένα ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή 60.

Για να μετατρέψετε ένα κλάσμα σε ισοδύναμο κλάσμα με άλλο παρονομαστή,
1. Χρειάζεται να διαιρέσετε το ζητούμενο παρονομαστή με αυτόν του κλάσματος
2. Χρειάζεται να πολλαπλασιάσετε τους όρους του κλάσματος με το πηλίκο που προκύπτει.

15. Δίνονται τα κλάσματα $\frac{1}{4}$, $\frac{12}{48}$ και $\frac{3}{12}$. Να εξετάσετε αν κάποια από τα κλάσματα είναι ίσα.

Όταν δύο ή περισσότερα κλάσματα έχουν τον ίδιο παρονομαστή λέγονται <u>ομώνυμα</u> και όταν έχουν διαφορετικούς παρονομαστές ονομάζονται <u>ετερώνυμα</u>.

Για να μετατρέψετε σε ομώνυμα δύο ή περισσότερα κλάσματα:

1. Ελέγχετε αν τα κλάσματα απλοποιούνται.
2. Αν απλοποιούνται τα κάνετε ανάγωγα.
3. Βρίσκετε το ΕΚΠ των παρονομαστών των ανάγωγων κλασμάτων.
4. Διαιρείτε το ΕΚΠ με τον παρονομαστή του κάθε κλάσματος.
5. Πολλαπλασιάζετε τους δύο όρους κάθε κλάσματος επί τον αντίστοιχο αριθμό που βρήκατε.

16. Δίνονται τα κλάσματα $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{3}$ και $\frac{4}{14}$. Να εξετάσετε αν κάποια από τα κλάσματα είναι ομώνυμα.

....

....

....

17. Να μετατρέψετε σε ομώνυμα τα κλάσματα $\frac{5}{6}$ και $\frac{3}{4}$.

....

....

....

18. Να μετατρέψετε σε ομώνυμα τα κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ και $\frac{5}{20}$.

....

....

....

....

....

....

Α.2.3. Σύγκριση κλασμάτων

~

19. Δραστηριότητα

Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpa2_3.ggb για να διερευνήσετε τι μέρος του μεγάλου τετραγώνου καλύπτει κάθε χρώμα στο σχήμα.

....

....

....

Από δύο ομώνυμα κλάσματα, εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή είναι μεγαλύτερο.

20. Στο ωρολόγιο πρόγραμμα έχετε 40 ώρες μαθημάτων την εβδομάδα. Κάποιες από αυτές είναι: 7 ώρες αγγλικά, 4 ώρες μαθηματικά, 3 ώρες γυμναστική, 5 ώρες αρχαία, 5 ώρες νέα και 1 ώρα πληροφορική.

(α) Ποιο μέρος του ωρολογίου προγράμματος είναι τα αγγλικά; ....

(β) Ποιο μέρος του ωρολογίου προγράμματος είναι τα μαθηματικά; ....

(γ) Ποιο μέρος του ωρολογίου προγράμματος είναι τα αρχαία; ....

(δ) Ποιο μέρος του ωρολογίου προγράμματος είναι η γυμναστική; ....

(ε) Ποιο μέρος του ωρολογίου προγράμματος είναι η πληροφορική; ....

(στ) Ποιο μέρος του ωρολογίου προγράμματος είναι τα νέα; ....

(ζ) Ποιο μάθημα καταλαμβάνει περισσότερες ώρες; ....

(η) Να γράψετε τα παραπάνω μαθήματα από αυτό που καταλαμβάνει μεγαλύτερο προς αυτό που καταλαμβάνει μικρότερο μέρος.

Για να συγκρίνετε ετερώνυμα κλάσματα τα μετατρέπετε σε ομώνυμα και συγκρίνετε τους αριθμητές τους.

7 ώρες >5 ώρες ....
(αγγλικά) (αρχαία)

Από δύο κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρονομαστή.

21. Να συγκρίνετε τα κλάσματα $\frac{7}{12}$ και $\frac{5}{16}$.

....

....

Αν το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι μεγαλύτερο του κλάσματος $\frac{\gamma}{\delta}$ μπορείτε να γράψετε: $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}$

22. Να συγκρίνετε τα κλάσματα $\frac{7}{10}$ και $\frac{7}{15}$. Γράψτε την αντίστοιχη σχέση.

....

....

23. Να συγκρίνετε τα κλάσματα $\frac{5}{8}$ και $\frac{4}{9}$. Γράψτε την αντίστοιχη σχέση.

....

....

24. Να εξηγήσετε γιατί το κλάσμα $\frac{2}{3}$ είναι μικρότερο του 1.

25. Να εξηγήσετε γιατί το κλάσμα $\frac{3}{2}$ είναι μεγαλύτερο του 1.

26. Μεταξύ ποιων διαδοχικών φυσικών αριθμών βρίσκεται το κλάσμα $\frac{7}{8}$;

27. Μεταξύ ποιων διαδοχικών φυσικών αριθμών βρίσκεται το κλάσμα $\frac{16}{3}$;

Η ευθεία των αριθμών

28. Να τοποθετήσετε στην ευθεία των αριθμών τα κλάσματα: (α) $\frac{2}{3}$ και (β) $\frac{8}{5}$

29. Να βρείτε ένα κλάσμα μεγαλύτερο από το $\frac{2}{5}$ και μικρότερο από το $\frac{3}{5}$

Α.2.4. Πρόσθεση και Αφαίρεση κλασμάτων

~

30. Δραστηριότητα

Έχετε 7 μπισκότα και θέλετε να τα μοιράσετε σε 4 άτομα.

Καταγράψτε τρόπους με τους οποίους θα τα μοιράσετε.

Για να προσθέσετε δύο ή περισσότερα ομώνυμα κλάσματα χρειάζεται να προσθέσετε τους αριθμητές τους.
Αν τα κλάσματα είναι ετερώνυμα αρχικά χρειάζεται να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ομώνυμα και στη συνέχεια προσθέτετε τους αριθμητές τους.

$$\frac{α}{β}+\frac{γ}{β}=\frac{α+γ}{β}$$

Με αντίστοιχο τρόπο μπορείτε να εργαστείτε για την αφαίρεση κλασμάτων.

$$\frac{α}{β}-\frac{γ}{β}=\frac{α-γ}{β}$$

31. Άσκηση

Ως μέλος του 15μελούς έχετε αναλάβει να ενημερώσετε τα 12 τμήματα του σχολείου για μία φιλανθρωπική δράση που θα οργανώσει το 15μελές. Την πρώτη περίοδο ενημερώνετε τα $\frac{4}{12}$ των τμημάτων, ενώ την δεύτερη περίοδο ενημερώνετε τα $\frac{2}{12}$ των τμημάτων. Πόσα τμήματα έχετε ενημερώσει συνολικά;

32. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+3$.

33. Να υπολογίσετε τη διαφορά και το άθροισμα των κλασμάτων $\frac{7}{20}$ και $\frac{3}{12}$.

Ισχύει ότι: $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}+1$

Μερικές φορές αντί να γράψετε $1+\frac{4}{5}$, μπορείτε να γράψετε $1\frac{4}{5}$.

Ο συμβολισμός αυτός, που παριστάνει το άθροισμα ενός **ακέραιου** με ένα **κλάσμα** μικρότερο της μονάδας, ονομάζεται **μεικτός αριθμός**.

Για να μετατρέψετε ένα αποτέλεσμα σε μεικτό αριθμό εκτελείτε την ευκλείδεια διαίρεση: Δ = δ · π + υ. Οπότε το κλάσμα γράφεται:

$$\frac{\Delta}{\delta}=\frac{\delta\cdot\pi+\upsilon}{\delta}=$$

$$\frac{\delta\cdot\pi}{\delta}+\frac{\upsilon}{\delta}=\pi+\frac{\upsilon}{\delta}=\pi\frac{\upsilon}{\delta}$$

Ισχύει ότι:

$$\pi\frac{\upsilon}{\delta}=\pi+\frac{\upsilon}{\delta}$$

Γενικά ελέγχετε πόσες φορές χωράει ο παρονομαστής στον αριθμητή και το αποτέλεσμα καθορίζει τον ακέραιο αριθμό του μεικτού. Το υπόλοιπο τοποθετείται ως εκθέτης του νέου κλάσματος.

Για να μετατρέψετε ένα μεικτό αριθμό σε κλάσμα: Βρίσκετε το π · δ + υ. Το τοποθετείτε στον αριθμητή και στον παρονομαστή τοποθετείτε το δ.

$$\pi\frac{\upsilon}{\delta} \quad \frac{\pi\cdot\delta+\upsilon}{\delta}$$

34. Να εξετάσετε αν ισχύει ότι: $\frac{3+5}{5}=\frac{3}{5}+1$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

35. Να δείξετε ότι ισχύει: $\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}-1$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

36. Να βρείτε τη διαφορά: $\frac{15}{4}-1$ **και το αποτέλεσμα να γίνει μεικτός.**

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

37. Να βρείτε το άθροισμα: $2+1\frac{1}{3}$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

38. Ποιο κλάσμα πρέπει να προσθέσετε στο $\frac{3}{7}$ **για να βρείτε άθροισμα** $\frac{6}{9}$**;**

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

39. Δίνεται ο μεικτός $3\frac{3}{4}$**. Να τον γράψετε σε κλάσμα.**

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

40. Να εργαστείτε και με άλλα κλάσματα και μικτούς στο μικροπείραμα mpa2_4.ggb.

Α.2.5. Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

~

41. Σχεδιάστε δύο τετράγωνα και χωρίστε το ένα σε 5 ίσα μέρη με τη χρήση κάθετων γραμμών και το άλλο σε 3 ίσα μέρη με την χρήση οριζόντιων γραμμών. Στη συνέχεια ζωγραφίστε το $\frac{1}{5}$ του πρώτου τετραγώνου και τα $\frac{2}{3}$ του δεύτερου τετραγώνου. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpa2_5.ggb.

Διερευνήστε τι συμβαίνει όταν τοποθετήσετε το δεύτερο τετράγωνο πάνω στο πρώτο.

....

....

....

Το γινόμενο δύο κλασμάτων είναι το κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών.

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}$$

42. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα γινόμενα.

(i) $\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{4}=$	(ii) $\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{5}=$	(iii) $\frac{2}{7}\cdot\frac{14}{4}=$	(iv) $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}=$

Το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού επί ένα κλάσμα είναι το κλάσμα με αριθμητή το γινόμενο του αριθμητή επί τον φυσικό αριθμό και με τον ίδιο παρονομαστή.

$$\lambda\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\lambda\cdot\gamma}{\delta}=\frac{\gamma}{\delta}\cdot\lambda$$

43. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα γινόμενα.

(i) $3\cdot\frac{5}{4}=$	(ii) $\frac{2}{1}\cdot\frac{8}{5}=$	(iii) $\frac{14}{3}\cdot 5=$	(iv) $\frac{14}{3}\cdot\frac{5}{1}=$

Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή κλάσματος με παρονομαστή το 1.

Τα κλάσματα που έχουν γινόμενο 1 λέγονται αντίστροφα.

44. Να ελέγξετε αν τα ακόλουθα κλάσματα είναι αντίστροφα.

(i) $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}=$	(ii) $\frac{2}{4}\cdot\frac{10}{5}$	(iii) $\frac{14}{3}\cdot\frac{2}{9}$	(iv) $\frac{1}{4}\cdot 4$

45. Να γράψετε δύο αντίστροφα κλάσματα που είναι ταυτόχρονα ισοδύναμα.

....

....

46. Να γράψετε ένα κλάσμα που δεν έχει αντίστροφο.

....

....

$1\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$

47. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα γινόμενα.

(i) $1\cdot\frac{5}{2}=$ | (ii) $\frac{2}{3}\cdot 1$ | (iii) $1\cdot\frac{2}{9}$ | (iv) $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1}$

Τι παρατηρείτε;

....

....

Αντιμεταθετική

$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$

48. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα γινόμενα.

(i) $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=$ | (ii) $\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{3}$ | (iii) $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{9}$ | (iv) $\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{5}$

Τι παρατηρείτε;

....

....

Προσεταιριστική

$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\left(\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}\right)=\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}$

49. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα γινόμενα.

(i) $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{3}\right)=$ | (ii) $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\right)\cdot\frac{4}{3}=$ | (iii) $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{3}=$

Τι παρατηρείτε;

....

....

Επιμεριστική

$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\left(\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\varepsilon}{\zeta}\right)=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}$

50. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα γινόμενα.

(i) $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{5}{7}+\frac{4}{3}\right)=$ | (ii) $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}=$

Τι παρατηρείτε;

....

....

51. Σε ένα σχολείο με 252 μαθητές, τα $\frac{5}{9}$ είναι αγόρια. Να βρείτε πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια έχει το σχολείο;

Α.2.6. Διαίρεση κλασμάτων

~

Με τον τρόπο αυτό μπορεί να παρουσιαστεί το πηλίκο δύο κλασμάτων. Γράφοντας $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$ είναι σαν να τίθεται το ερώτημα: «Πόσα $\frac{1}{4}$ υπάρχουν στο $\frac{1}{2}$;»

Για να διαιρέσετε δύο φυσικούς αριθμούς αρκεί να πολλαπλασιάσετε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

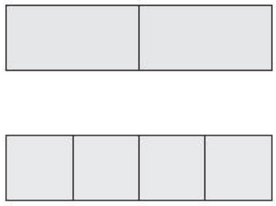
$$\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Για να διαιρέσετε δύο κλάσματα αρκεί να πολλαπλασιάσετε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}$$

Ένα κλάσμα, του οποίου ένας τουλάχιστον όρος του είναι κλάσμα, ονομάζεται σύνθετο κλάσμα.

52. Α. Πόσα $\frac{1}{4}$ υπάρχουν στο $\frac{1}{2}$; Διερευνήστε τι συμβαίνει αξιοποιώντας τα παρακάτω σχήματα.



....

....

53. Να κάνετε τις διαιρέσεις.

(i) $3:\frac{9}{4}=$ (ii) $1:\frac{8}{5}=$ (iii) $\frac{14}{3}:\frac{4}{9}=$ (iv) $\frac{4}{9}:\frac{14}{3}=$

54. Να κάνετε τις διαιρέσεις.

(i) $\frac{3}{7}:\frac{9}{14}=$ (ii) $\frac{4}{3}:\frac{2}{15}=$ (iii) $\frac{9}{7}:\frac{9}{7}=$ (iv) $\frac{3}{5}:\frac{12}{20}=$

55. Να κάνετε τις διαιρέσεις.

(i) $1:\frac{5}{2}=$ (ii) $\frac{2}{3}:1=$ (iii) $\frac{1}{1}:\frac{2}{9}=$ (iv) $\frac{1}{4}:\frac{1}{1}=$

56. Να ελέγξετε αν τα ακόλουθα κλάσματα είναι σύνθετα κλάσματα.

(i) $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}$ (ii) $\dfrac{\frac{2}{3}}{5}$ (iii) $\frac{5}{3}$ (iv) $\dfrac{5}{\frac{3}{4}}$

Για να μετατρέψετε ένα σύνθετο κλάσμα σε απλό είναι χρήσιμο να θυμάστε ότι το σύνθετο κλάσμα είναι η διαίρεση δύο κλασμάτων:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$$

Συνεπώς μπορεί να γραφεί ως:

$\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}$, όπου για να γίνει η διαίρεση αντιστρέφεται το δεύτερο κλάσμα:

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}$$

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να γίνει και ως εξής:

- Πολλαπλασιάζεται μέσους και άκρους.

ή με άλλο λόγια

- Πολλαπλασιάζεται τον αριθμητή του πρώτου με τον παρονομαστή του δεύτερου και τον παρονομαστή του πρώτου με αριθμητή του δεύτερου.

Γενικά:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$$

57. Να μετατρέψετε σε απλά τα σύνθετα κλάσματα:

(i) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{9}}=$	(ii) $\frac{4}{\frac{9}{8}}=$	(iii) $\frac{\frac{7}{10}}{5}=$

58. Να εκτελέσετε τις πράξεις: $\frac{\frac{3}{10}+\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}-\frac{4}{6}}$

....

....

....

....

Ανακεφαλαίωση

1. Τι είναι κλάσμα;

....

....

2. Τι σχέση έχει ο Αριθμητής και ο Παρανομαστής με τον Διαιρετέο και τον διαιρέτη;

....

....

3. Κάθε αριθμός μπορεί να γραφεί με την μορφή κλάσματος;

....

....

4. Μπορεί ένα κλάσμα να είναι μεγαλύτερο του 1;

....

....

5. Πότε δύο κλάσματα λέγονται ισοδύναμα;

....

....

6. Πώς ελέγχουμε ότι δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα;

....

....

7. Τι είναι ανάγωγο κλάσμα;

....

....

8. Πώς απλοποιούμε ένα κλάσμα;

....

....

9. Τι είναι ομώνυμα και τι ετερώνυμα κλάσματα;

....

....

10. Πώς κάνουμε δύο ή περισσότερα κλάσματα ομώνυμα;

....

....

11. Πώς συγκρίνουμε δύο ή περισσότερα κλάσματα;

....

....

12. Πώς γράφουμε ότι ένα κλάσμα είναι μεγαλύτερο από ένα άλλο;

....

....

13. Πώς τοποθετούμε τα κλάσματα στην ευθεία των αριθμών;

....

....

14. Πώς προσθέτουμε και πώς αφαιρούμε κλάσματα;

....

....

15. Πώς γράφουμε ένα κλάσμα με την μορφή μεικτού αριθμού;

....

....

16. Πώς πολλαπλασιάζουμε δύο ή περισσότερα κλάσματα;

....

....

17. Τι είναι αντίστροφα κλάσματα;

....

....

18. Ποια κλάσματα δεν έχουν αντίστροφο κλάσμα;

....

....

19. Ποιες ιδιότητες των πράξεων ισχύουν στα κλάσματα;

....

....

20. Πώς διαιρούμε δύο κλάσματα;

....

....

21. Τι είναι σύνθετο κλάσμα;

....

....

22. Πώς μετατρέπουμε ένα σύνθετο κλάσμα σε απλό;

....

....

23. * Ο Στέφανος κατέγραψε ότι από τα βιβλία στο σπίτι του το $\frac{1}{2}$ είναι μυθιστορήματα, ενώ ο Ανδρέας διαπίστωσε ότι από τα βιβλία που υπάρχουν στο σπίτι του το $\frac{1}{5}$ είναι μυθιστορήματα.

Ο Στέφανος υποστήριξε ότι στο σπίτι του υπάρχουν περισσότερα βιβλία με μυθιστορήματα από ό,τι τα βιβλία με μυθιστορήματα του Ανδρέα.

Α. Έχει δίκιο ο Στέφανος;

Β. Γιατί; Γιατί όχι;

Γ. Τι χρειάζεται να κάνουμε;

24. *Η Κατερίνα έγραψε $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{5}$.

Α. Είναι σωστή η λύση;

Β. Η Κατερίνα ρωτήθηκε σχετικά και είπε:

«Έφαγα 1 από τα 2 τοστ που είχα και η Χαρά έφαγε τα 2 από τα 3 τοστ που είχε. Άρα μαζί φάγαμε 3 από τα 5 τοστ που είχαμε».

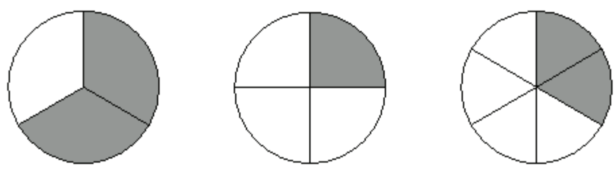
Γ. Χρειάζεται να πούμε κάτι στην Κατερίνα για να κατανοήσει το θέμα;

25. *Ο Βασίλης έγραψε $1\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=1\frac{1}{4}$.

Α. Είναι σωστή η λύση;

Β. Ποιος είναι ο πιθανός λόγος που έδωσε αυτό το αποτέλεσμα;

26. *Ποιο σχήμα έχει σκιασμένο το $\frac{1}{3}$ της επιφάνειάς του;



Α. Η Μαρία υποστήριξε ότι κανένα από τα σχήματα δεν έχει σκιασμένο το $\frac{1}{3}$ της επιφάνειάς του.

Β. Τι χρειάζεται να κάνετε για να ελέγξετε αυτό που υποστηρίζει η Μαρία;

27. *Ο Χρήστος έγραψε ότι: $\frac{1}{6}>\frac{1}{4}$.

Α. Έχει δίκιο;

Β. Αν χρειάζεται να κάνετε κάτι, τι θα ελέγχατε;

* New Zealand Ministry of Education

Ασκήσεις προς λύση

2.1. Να βρείτε την τιμή της μεταβλητής x για να ισχύει η ισότητα:

Α. $\frac{x-7}{12}=0$ **Β.** $\frac{151-\kappa}{13}=0$ **Γ.** $\frac{x-2}{3}=1$ **Δ.** $\frac{9-x}{6}=1$ **Ε.** $\frac{2x+7}{25}=1$

2.2. Αν Α = $\left(\frac{3}{4}+2\right):\frac{2}{3}$, Β = $\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{5}$ και Γ = $\frac{3}{2}:\left(2+2\frac{1}{3}\right)$ να υπολογίσετε:

(α) Τις τιμές των Α, Β, Γ

(β) Την παράσταση $A:B+\Gamma+B\cdot A$

2.3. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

Α. $\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{3\cdot(5^2-4^2)}{3^4}$

Β. $\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)\cdot 4+2\frac{3}{4}-1\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}$

Γ. $\left(\frac{5}{4}+3\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right):\frac{5}{2}+4\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}$

Δ. $\frac{1}{2}-\left(\frac{5}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{25}+3\cdot\left(3-\frac{1}{4}\right)$

Ε. $\dfrac{\frac{5}{4}:\frac{25}{21}+\frac{11}{15}:4\frac{8}{9}-\frac{1}{5}}{2\frac{1}{3}-1\frac{1}{2}}$

2.4. Ένα τμήμα ενός δρόμου ασφαλτοστρώνεται σε 5 ώρες αν εργαστεί μια ομάδα από το συνεργείο που έχει αναλάβει το έργο, σε 7 ώρες αν εργαστεί μια άλλη ομάδα και σε 9 ώρες αν εργαστεί μια τρίτη ομάδα.

Α. Τι μέρος του έργου ασφαλτοστρώνει σε μια ώρα κάθε ομάδα;

Β. Τι μέρος του έργου ασφαλτοστρώνουν σε μια ώρα όταν εργαστούν και οι τρείς ομάδες ταυτόχρονα;

2.5. **Α.** Σε μια τάξη 25 μαθητών, 6 μαθητές πήραν στο διαγώνισμα των Μαθηματικών βαθμό άριστα. Να βρείτε το μέρος των μαθητών που πήρε βαθμό άριστα.

Β. Σε μια άλλη τάξη 20 μαθητών, 4 μαθητές πήραν βαθμό άριστα. Να βρείτε το μέρος των μαθητών που πήρε βαθμό άριστα.

Γ. Να μετατρέψετε τα παραπάνω κλάσματα σε ισοδύναμα με παρονομαστή το 100 και να βρείτε ποια από τις δυο τάξεις είχε μεγαλύτερο ποσοστό άριστων στα μαθηματικά.

2.6. Να βρείτε για ποιες τιμές του φυσικού αριθμού y έχουν νόημα τα παρακάτω κλάσματα:

Α. $\frac{3}{3-y}$ **Β.** $\frac{2}{2y-6}$ **Γ.** $\frac{1}{y-4}$

2.7. Με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας να βρείτε τις τιμές των παρακάτω κλασμάτων:

Α. $\frac{3x+3}{3}$ **Β.** $\frac{2x-2}{2}$ **Γ.** $\frac{4x-12}{4}$ **Δ.** $\frac{5x+20}{5}$

2.8. Να βρείτε ποια κλασματική μονάδα παριστάνει καθένα από τα παρακάτω κλάσματα με την προϋπόθεση ότι ορίζονται τα κλάσματα:

Α. $\dfrac{x+2}{2x+4}$ **Β.** $\dfrac{x-3}{3x-9}$ **Γ.** $\dfrac{5x+10}{25x+50}$ **Δ.** $\dfrac{2x-4}{4x-8}$

2.9. Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή ω (ω ≠ 0, φυσικός) ώστε να ισχύει:

Α. $\dfrac{\omega}{5}<1$ **Β.** $\dfrac{\omega}{3}<1$ **Γ.** $\dfrac{4}{\omega}>1$ **Δ.** $\dfrac{9}{\omega}>1$

2.10. Αν α, β, γ ≠ 0,να αποδείξετε ότι:

Α. $\dfrac{2\alpha-\beta}{\alpha}=2-\dfrac{\beta}{\alpha}$ **Β.** $\dfrac{4\alpha+6\beta}{2\beta}=\dfrac{2}{\beta}+3$

Γ. $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\alpha\gamma}$ **Δ.** $\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$

2.11. Αν είναι $x+y=\dfrac{3}{2}$ και $z+y=\dfrac{4}{3}$, να υπολογίσετε την παράσταση $x+2y+z$.