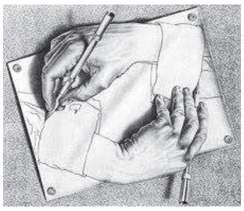
Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Β΄, Γεωμετρία, Κεφάλαιο 2, Συμμετρία

Κεφάλαιο 2
Β.2.2. Άξονας συμμετρίας

~



Άξονας συμμετρίας σχήματος ονομάζεται η ευθεία που χωρίζει το σχήμα σε δύο μέρη, τα οποία συμπίπτουν όταν διπλωθεί το σχήμα κατά μήκος της ευθείας. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σχήμα έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία αυτή.

Όταν ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας, το συμμετρικό του ως προς τον άξονα αυτόν είναι το ίδιο το σχήμα.

1. Μελετήστε το μικροπείραμα mpb2_1.ggb.

(α) Τι παρατηρείτε σ' αυτό το σχήμα;

....

....

....

(β) Με την ενεργοποίηση του κουμπιού «Πάνω σχήμα» και στη συνέχεια την ενεργοποίηση του κουμπιού «Κάτω σχήμα», τι παρατηρείτε;

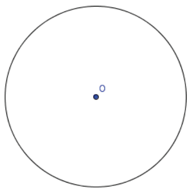
....

....

(γ) Ενεργοποιείστε το κουμπί «Άξονας». Μπορείτε να φανταστείτε ποιος είναι ο ρόλος της ευθείας που εμφανίστηκε;

....

2. Να βρείτε τους άξονες συμμετρίας του κύκλου και του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου (Ο, ρ). Μελετήστε το μικροπείραμα mpb2_2.ggb.



....

....

....

3. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

(1) Κάθε κύκλος και ο αντίστοιχος κυκλικός δίσκος έχουν:

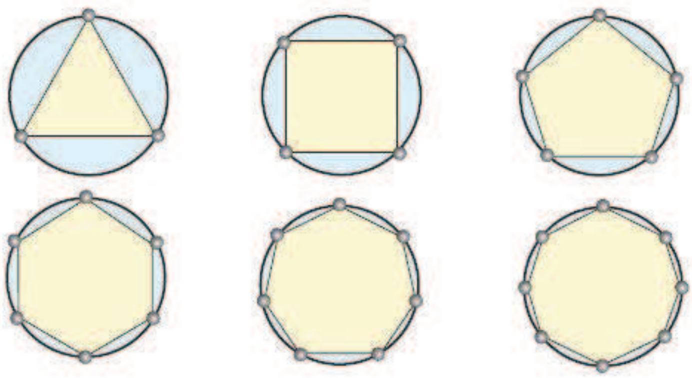
(α) έναν άξονα συμμετρίας
(β) άπειρους άξονες συμμετρίας
(γ) κανένα άξονα συμμετρίας.

(2) Εξετάσετε για καθένα από τα κεφαλαία γράμματα του αλφαβήτου Α, Ι, Γ και Θ αν έχουν:

(α) κανένα
(β) ένα
(γ) περισσότερους από ένα άξονες συμμετρίας

Α	**Ι**	**Γ**	**Θ**

4. Να σχεδιάστε τους άξονες συμμετρίας των παρακάτω γεωμετρικών σχημάτων.



Β.2.1. Συμμετρία ως προς άξονα

~

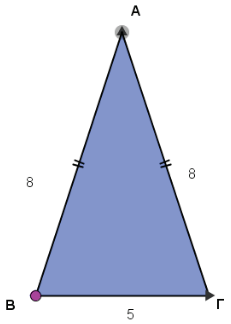
Συμμετρικό σημείου **Β** ως προς ευθεία **ε**, είναι το σημείο Γ με το οποίο συμπίπτει το **Β**, αν διπλώσουμε το φύλλο κατά μήκος της ευθείας ε.

Κάθε σημείο μιας ευθείας ε είναι συμμετρικό του εαυτού του ως προς την ε.

Δύο σχήματα **(Σ1)** και **(Σ2)** λέγονται **συμμετρικά** ως προς μία ευθεία **ε**, όταν καθένα αποτελείται από τα συμμετρικά σημεία του άλλου ως προς την **ε**.

Επειδή με δίπλωση κατά μήκος της **ε** συμπίπτει το **(Σ1)** με το **(Σ2)**, γνωρίζουμε ότι αυτά θα είναι ίσα. Επομένως: **Τα συμμετρικά ως προς ευθεία σχήματα είναι ίσα.**

5. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb2_3.ggb. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ.



(α) Τι παρατηρείτε όταν το τρίγωνο είναι διπλωμένο;

....

....

....

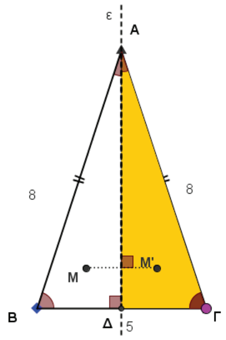
(β) Τι παρατηρείτε για το σημείο Μ;

....

....

....

....



(γ) Τι παρατηρείτε για την ευθεία ε σε σχέση με την ΒΓ;

....

....

(δ) Τι είναι η ΑΔ για την γωνία Α;

....

....

(ε) Ποιες είναι οι ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου;

....

....

....

....

6. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb2_4.ggb. Τι παρατηρείτε;

....

....

....

....

7. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb2_5.ggb. Τι παρατηρείτε;

....

....

....

....

Β.2.3. Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος

~

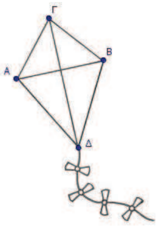
Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη προς αυτό και διέρχεται από το μέσον του.

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος έχει **ίσες αποστάσεις (ισαπέχει)** από τα άκρα του.

Κάθε σημείο που **ισαπέχει** από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στη **μεσοκάθετό** του.

Η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι **άξονας συμμετρίας** του.

8. Οι χαρταετοί κατασκευάζονται σε διάφορα σχήματα. Ένα από αυτά είναι το ακόλουθο.



(α) Αν ο καιρός είναι κατάλληλος, ο χαρταετός με την συγκεκριμένη κατασκευή θα πετάξει;

(β) Ποιες, προϋποθέσεις απαιτούνται γι’ αυτό;

....

....

....

....

9. Να σχεδιάσετε την μεσοκάθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, χωρίς τη βοήθεια του υποδεκάμετρου και του γνώμονα, αλλά μόνο με τη χρήση «κανόνα και διαβήτη» (mpb2_6.ggb).

10. Να κατασκευάσετε ευθεία δ κάθετη σε ευθεία ε στο σημείο της Α.
Να κατασκευάσετε την κάθετη δ μιας ευθείας ε από σημείο Α εκτός αυτής. (mpb2_7.ggb).

11. Να κατασκευάσετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α.

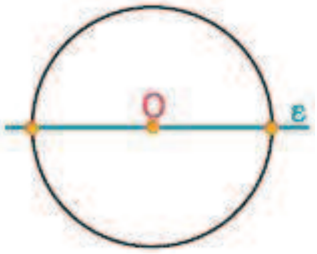
Β.2.5. Κέντρο συμμετρίας

~

Κέντρο συμμετρίας σχήματος ονομάζεται ένα σημείο του Ο, γύρω από το οποίο αν περιστραφεί το σχήμα κατά 180°, συμπίπτει με το αρχικό. Στην περίπτωση που υπάρχει τέτοιο σημείο, λέμε ότι το σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο Ο.

12. Εργαστείτε στο μικροπείραμα [mpb2_8.ggb](mpb2_8.ggb). Ελέγξτε αν τα σχήματα έχουν κέντρο συμμετρίας.

13. Ποιο είναι το κέντρο συμμετρίας ενός κύκλου;



....

....

....

....

....

Όταν ένα σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας, το συμμετρικό του ως προς το κέντρο αυτό είναι το ίδιο το σχήμα.

14. Τοποθετήστε ένα "Χ" στις κατάλληλες θέσεις, για τη θετική σας απάντηση.

	Άξονες συμμετρίας						Έχει Κέντρο Συμμετρίας
	Κανένα	Ένα	Δύο	Τρεις	Τέσσερις	Περισσότερους	
Ευθύγραμμο τμήμα							
Ισοσκελές τρίγωνο							
Ισόπλευρο τρίγωνο							
Παραλληλόγραμμο							
Ορθογώνιο							
Ρόμβος							
Τετράγωνο							
Κύκλος							

15. Να βρείτε στα παρακάτω σχήματα το κέντρο συμμετρίας, αν υπάρχει.

Β.2.4. Συμμετρία ως προς σημείο

∼

16. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb2_9.ggb. Τι παρατηρείτε;

Συμμετρικό σημείου Α ως προς κέντρο Ο, είναι το σημείο Α', με το οποίο συμπίπτει το Α, αν περιστραφεί περί το Ο κατά 180°.

17. Να βρείτε το συμμετρικό Α' του σημείου Α, ως προς σημείο Ο.

Δύο σημεία Μ και Μ' είναι συμμετρικά ως προς σημείο Ο, όταν το Ο είναι μέσο του τμήματος ΜΜ'.

18. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό Α'Β' ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ ως προς σημείο Ο.

Δύο σχήματα λέγονται συμμετρικά ως προς σημείο Ο, όταν κάθε σημείο του ενός είναι συμμετρικό ενός σημείου του άλλου ως προς το Ο.

19. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό ως προς σημείο Ο: (α) μιας ευθείας ε και (β) μιας ημιευθείας Αx.

Τα συμμετρικά ως προς σημείο σχήματα είναι ίσα.

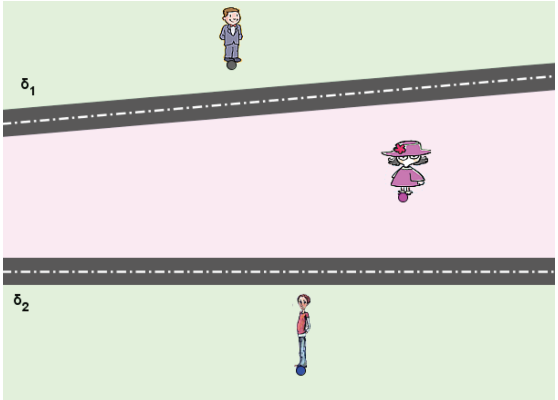
20. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό σχήμα μιας γωνίας xÂy ως προς σημείο Ο.

21. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό σχήμα ενός κύκλου (Κ, ρ) ως προς σημείο Ο.

Β.2.6. Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια άλλη ευθεία

~

22. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpb2_10.ggb.



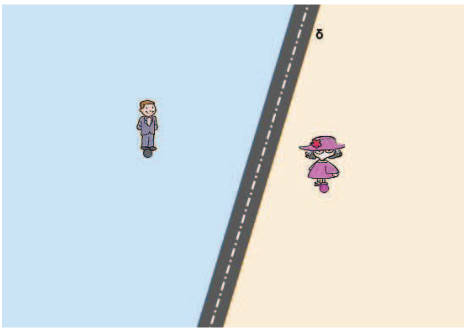
Σχήμα 1

(α) Αν σας ρωτούσαν σε ποια ζώνη βρίσκεται το κορίτσι στο Σχήμα 1 τι θα απαντούσατε;

....

(β) Αν σας ρωτούσαν σε ποια ζώνη βρίσκονται τα αγόρια στο Σχήμα 1 τι θα απαντούσατε;

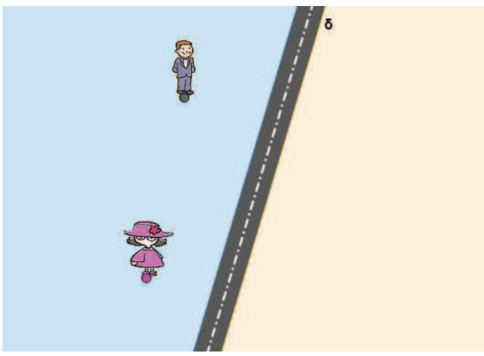
....



Σχήμα 2

(γ) Αν σας ρωτούσαν ποια είναι η θέση των δυο παιδιών ως προς τον δρόμο στο Σχήμα 2 τι θα απαντούσατε;

....



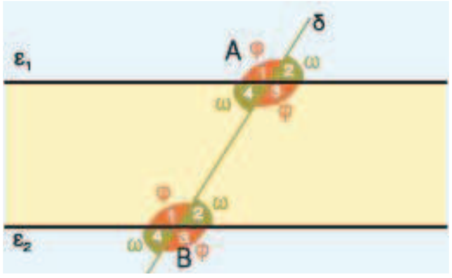
Σχήμα 3

(δ) Αν σας ρωτούσαν ποια είναι η θέση των δυο παιδιών ως προς τον δρόμο στο Σχήμα 3 τι θα απαντούσατε;

....

23. Μελετήστε τις δραστηριότητες του μικροπειράματος mpb2_11.ggb.

24. Παρατηρήστε το σχήμα και στη συνέχεια καταγράψετε τις γωνίες που βρίσκονται ανάμεσα στις ευθείες ε1 και ε2.



....

....

....

....

25. Παρατηρήστε το σχήμα και στη συνέχεια καταγράψετε τις γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ευθείας δ.

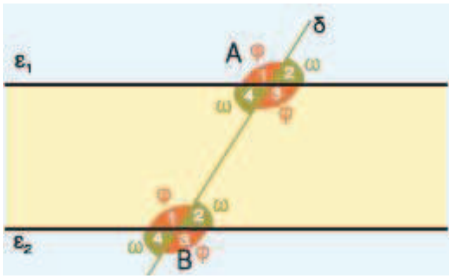
....

....

....

....

26. Παρατηρήστε το σχήμα και στη συνέχεια καταγράψετε τις γωνίες που βρίσκονται η μία στο ένα κι η άλλη στο άλλο ημιεπίπεδο της ευθείας δ.



....

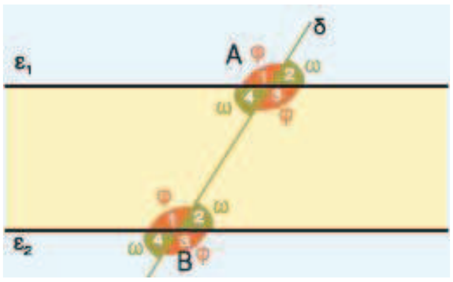
....

....

....

27. Παρατηρήστε το σχήμα και στη συνέχεια καταγράψετε

(α) τις εντός εναλλάξ γωνίες,
(β) τις εκτός εναλλάξ γωνίες,
(γ) εντός και επί τα αυτά γωνίες,
(δ) τις εκτός και επί τα αυτά γωνίες,
(ε) τις εντός - εκτός εναλλάξ γωνίες,
(στ) τις εντός - εκτός επί τα αυτά γωνίες,



....

....

....

....

....

Οι γωνίες που βρίσκονται ανάμεσα στις ευθείες ε1 και ε2 ονομάζονται «**εντός**» (των ευθειών) και όλες οι άλλες «**εκτός**».

Οι γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ευθείας **δ** ονομάζονται **«επί τα αυτά»** (μέρη της ευθείας).

Δύο γωνίες που βρίσκονται η μία στο ένα κι η άλλη στο άλλο ημιεπίπεδο της ευθείας δ, λέγονται μεταξύ τους «**εναλλάξ**».

Άρα έχουμε έξι ονομασίες για τα διαφορετικά ζευγάρια των γωνιών.

(α) **εντός εναλλάξ** και
(β) **εκτός εναλλάξ**
(γ) **εντός και επί τα αυτά** και
(δ) **εκτός και επί τα αυτά**
(ε) **εντός - εκτός εναλλάξ** και
(στ) **εντός - εκτός επί τα αυτά**.

Ο χαρακτηρισμός των γωνιών γίνεται: (α) από τη θέση τους ως προς την ενδιάμεση περιοχή που ορίζουν οι ε1 και ε2 (εντός, εκτός, εντός-εκτός) και (β) από τη θέση τους ως προς τα ημιεπίπεδα που ορίζει η δ (επί τα αυτά, εναλλάξ).

Οι χαρακτηρισμοί που δίνονται στα ζεύγη γωνιών είναι ανεξάρτητοι του αν οι ευθείες ε1 και ε2 είναι παράλληλες.

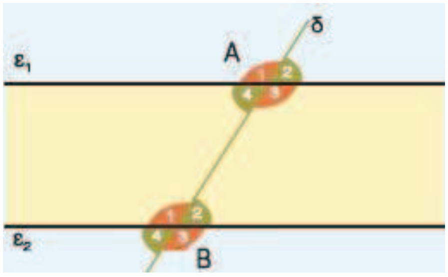
Στην περίπτωση κατά την οποία οι ευθείες που τέμνονται από άλλη είναι παράλληλες τότε ισχύουν ορισμένες σημαντικές σχέσεις μεταξύ των γωνιών.

1. Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.
2. Οι εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες είναι ίσες.
3. Οι εντός και επί τα αυτά γωνίες είναι παραπληρωματικές.

Αν μια από τις παραπάνω προτάσεις ισχύει, τότε οι ευθείες ε1 και ε2 είναι παράλληλες.

Συνεπώς, κάθε μια από τις παραπάνω τρεις προτάσεις αποτελεί συνθήκη παραλληλίας.

28. Να συγκρίνετε μεταξύ τους τις γωνίες, που σχηματίζονται στα σημεία Α και Β, στα οποία τέμνει μια ευθεία δ δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.



....

....

....

....

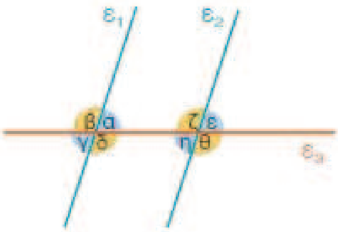
....

....

....

....

29. Στο παρακάτω σχήμα είναι ε1//ε2. Να υπολογίσετε όλες τις γωνίες, που είναι σημειωμένες, αν είναι α = 40°.



....

....

....

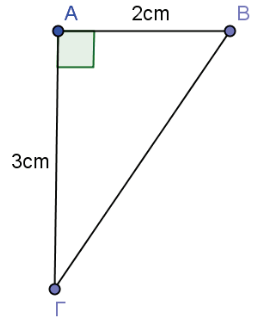
....

....

....

Ασκήσεις προς λύση

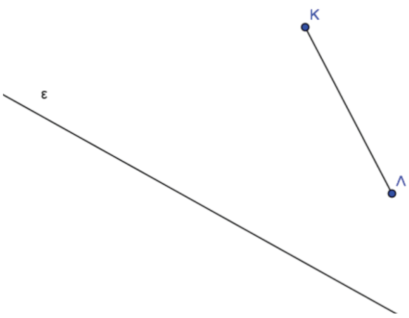
2.1. Στο παρακάτω σχήμα σχεδιάστε το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ ως προς την πλευρά ΒΓ.



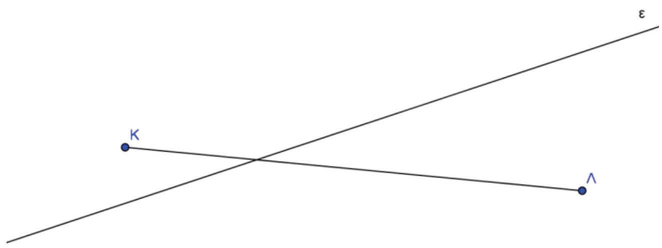
Τι σχήμα σχηματίζεται και γιατί;

2.2. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ ως προς την ευθεία ε σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα:

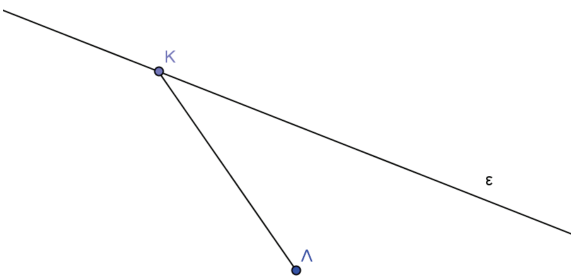
α)



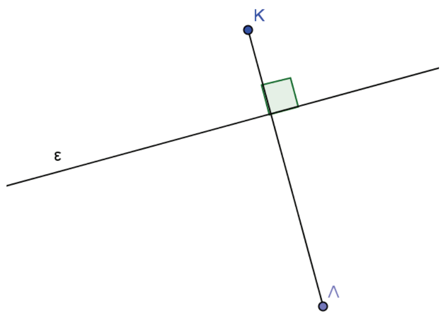
β)



γ)



δ)



2.3. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό ενός τυχαίου τριγώνου ΑΒΓ ως προς:

α) ευθεία ε η οποία διέρχεται από τα σημεία Β και Γ.

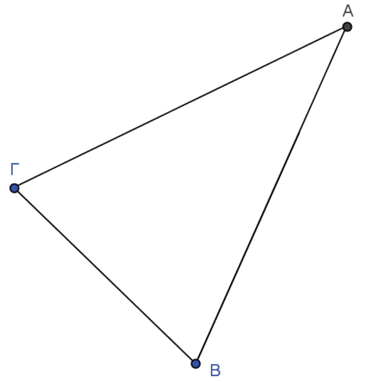
β) τυχαία ευθεία που διέρχεται από το σημείο Γ.

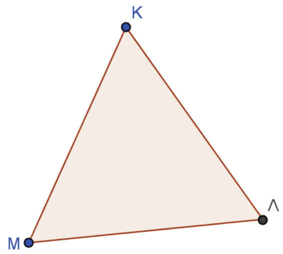
γ) ευθεία δ που είναι παράλληλη στην ΑΓ και διέρχεται από το σημείο Β.

2.4. Δίνεται μια γωνία $x\hat{O}y$ και η διχοτόμος της Οδ. Να βρείτε το συμμετρικό της γωνίας ως προς τη διχοτόμο Οδ.

2.5. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του τριγώνου ως προς τη διάμεσο ΑΜ.

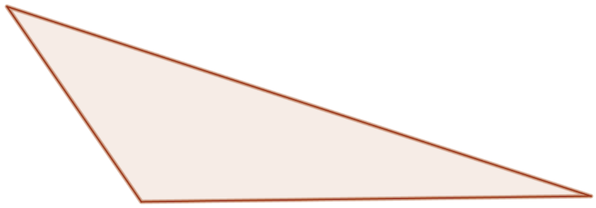
2.6. Δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΚΛΜ.

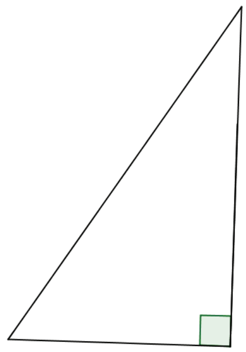




Να χαράξετε τους άξονες συμμετρίας σε καθένα από τα σχήματα.

2.7. Χαράξτε τον ή τους άξονες συμμετρίας σε όσα από τα παρακάτω σχήματα έχουν άξονα συμμετρίας.

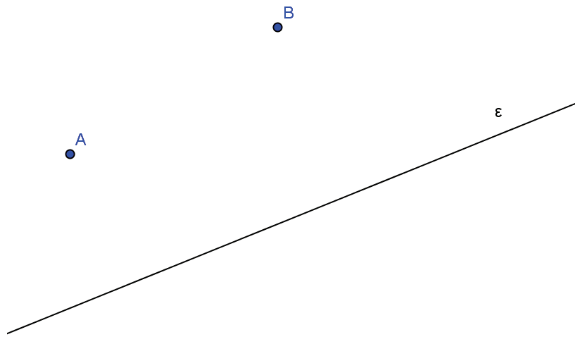




2.8. Να βρείτε τους άξονες συμμετρίας του σχήματος που αποτελείται από δύο ίσους κύκλους αν αυτοί:
α) εφάπτονται εξωτερικά,
β) τέμνονται,
γ) βρίσκονται ο ένας μέσα στον άλλο.

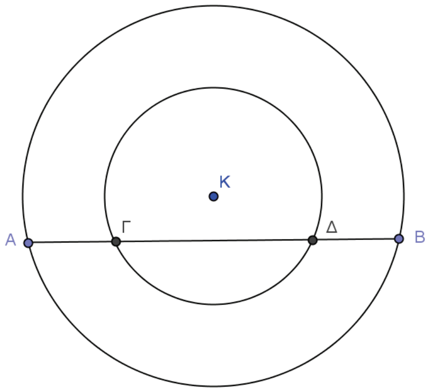
2.9. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάστε τις μεσοκαθέτους του. Τι παρατηρείτε;

2.10. Δίνεται ευθεία ε και δύο σημεία Α και Β εκτός της ευθείας.



Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει την ίδια απόσταση από τα σημεία Α και Β.

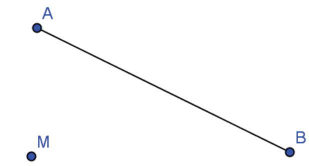
2.11. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Κ. Αποδείξτε ότι η κάθετη στις ΑΒ και ΓΔ από το Κ είναι μεσοκάθετός τους.



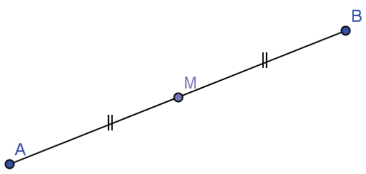
2.12. Να βρείτε το κέντρο ενός κύκλου, χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα και διαβήτη.

2.13. Κατασκευάστε το συμμετρικό του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ως προς το σημείο Μ στα παρακάτω σχήματα:

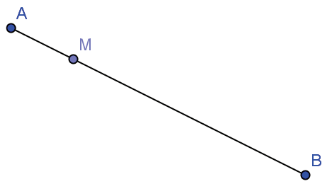
α)



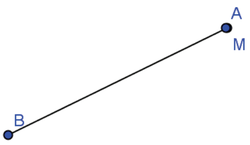
β)



γ)



δ)

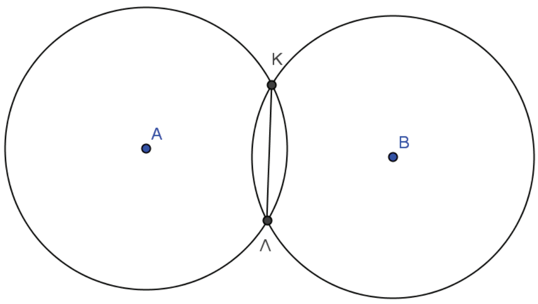


2.14. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό ενός τριγώνου ΑΒΓ ως προς:
α) το μέσο Δ της πλευράς ΑΓ.
β) το σημείο Β.

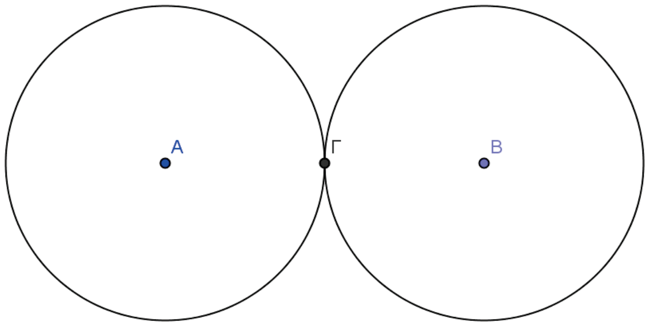
2.15. Να βρείτε το συμμετρικό μιας ημιευθείας ως προς την αρχή της.

2.16. Να βρείτε το συμμετρικό ενός ορθογωνίου τριγώνου ως προς την κορυφή της ορθής γωνίας του.

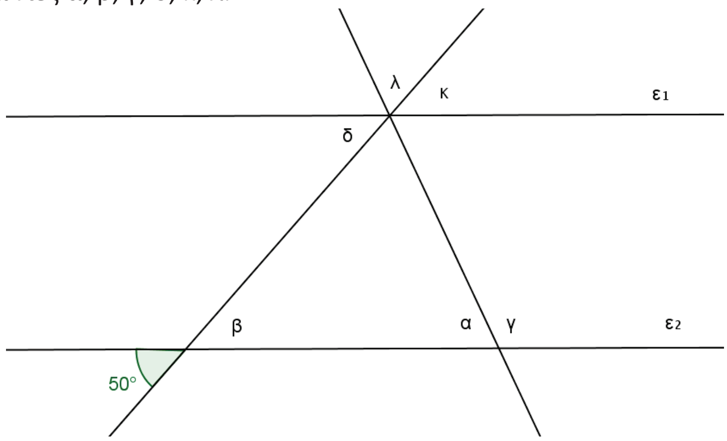
2.17. Να βρείτε το κέντρο συμμετρίας του παρακάτω σχήματος.



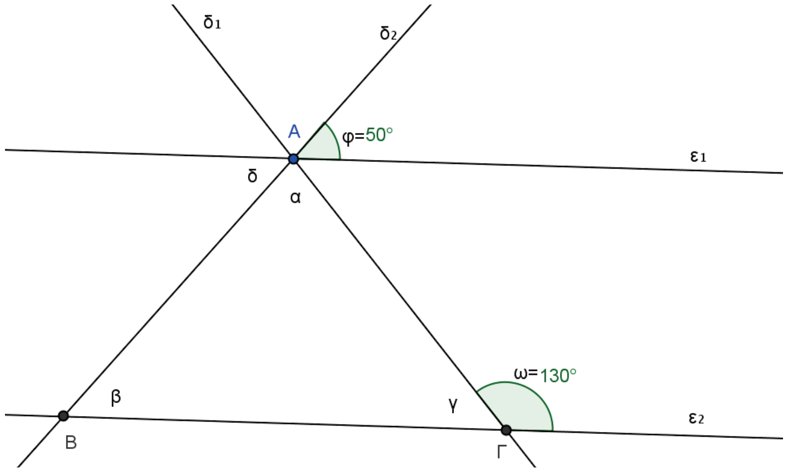
2.18. Να βρείτε το κέντρο συμμετρίας του παρακάτω σχήματος.



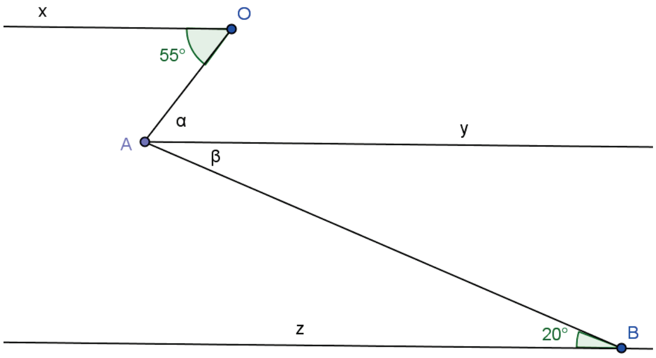
2.19. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και η γωνία γ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία α κατά 53°. Να υπολογίσετε τις γωνίες α, β, γ, δ, κ, λ.



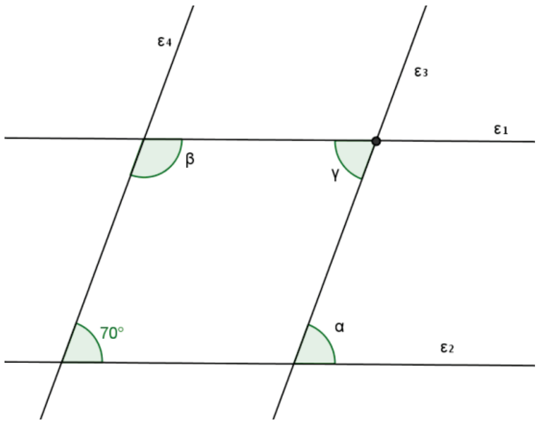
2.20. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες με τέμνουσες τις δ_1 και δ_2, που τέμνονται στο σημείο Α της ευθείας ε_1. Δίνονται οι γωνίες $\hat{\varphi} = 50^\circ$ και $\hat{\omega} = 130^\circ$. Να υπολογίσετε σε μοίρες, τις γωνίες $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



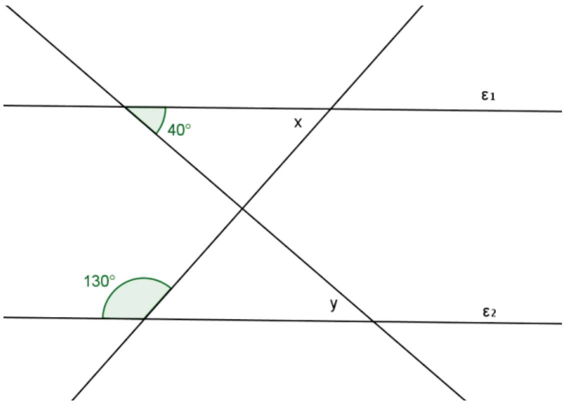
2.21. Οι ημιευθείες Οx, Αy και Βz είναι παράλληλες. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \widehat{OAB}$.



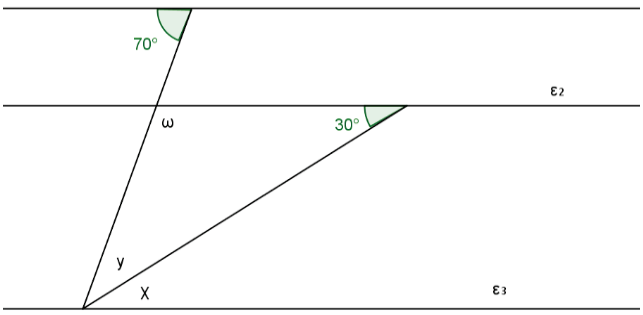
2.22. Στο παρακάτω σχήμα ισχύει $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. Οι ε_1 και ε_2 τέμνονται από τις $\varepsilon_3 // \varepsilon_4$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$.



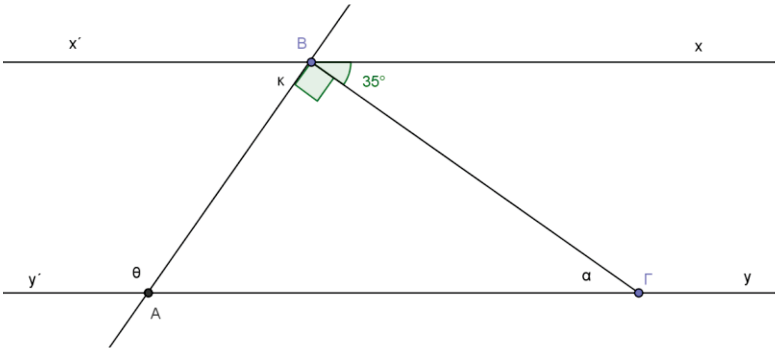
2.23. Στο παρακάτω σχήμα ισχύει $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{x}, \hat{y}$.



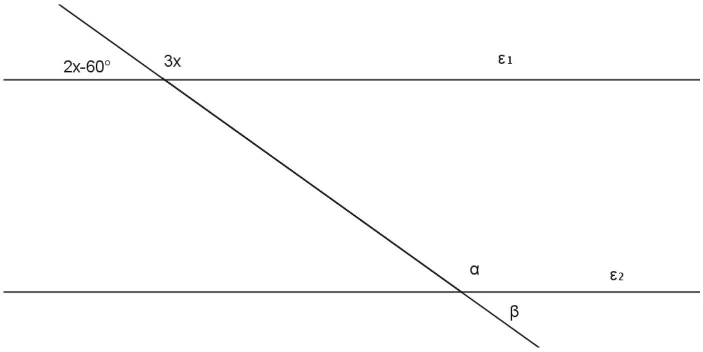
2.24. Στο παρακάτω σχήμα ισχύει $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{x}, \hat{y}, \hat{\omega}$.



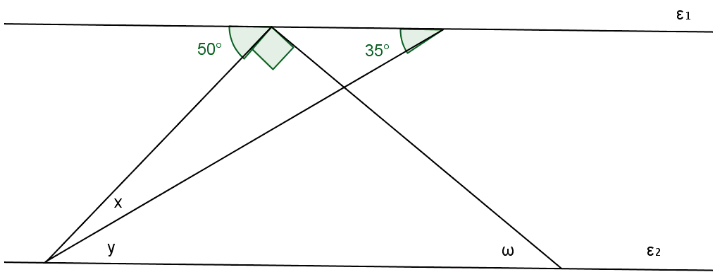
2.25. Στο παρακάτω σχήμα ισχύει $x'x//y'y$, $\hat{xBy}=35^\circ$ και $AB\perp B\Gamma$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\theta},\hat{\kappa},\hat{\alpha}$.



2.26. Αν $\varepsilon_1//\varepsilon_2$, να υπολογίσετε τις γωνίες που σημειώνονται στο παρακάτω σχήμα.



2.27. Στο παρακάτω σχήμα ισχύει $\varepsilon_1//\varepsilon_2$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{x},\hat{y},\hat{\omega}$.



2.28. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε $\varepsilon_1//\varepsilon_2//\varepsilon_3$ και τέμνονται από τις δ_1 και δ_2. Να υπολογίσετε:

α) το x.

β) τις γωνίες $\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma},\hat{\kappa}$.