

**Α' Γυμνασίου, Μέρος Α', Άλγεβρα,
Κεφάλαιο 7, Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί,
Α.7.8. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό,
Α.7.9. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο**

Μέρος Α' Κεφάλαιο 7ο Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί

A.7.8. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό



1. Γιατί υπάρχει η ανάγκη εισαγωγής των δυνάμεων;

.....

2. Δραστηριότητα.

Μία εταιρεία με σκοπό την προώθηση ενός νέου προϊόντος στέλνει ένα μήνυμα σε έναν πελάτη. Στις 8.50' ο πελάτης προωθεί το μήνυμα σε τρεις φίλους του. Στα επόμενα 10 λεπτά ο καθένας από τους τρεις φίλους προωθεί το μήνυμα σε άλλους τρεις, αυτοί επαναλαμβάνουν το ίδιο το επόμενο δεκάλεπτο και ούτω καθεξής.

Σε κάθε επόμενο στάδιο μετά τις 8.50' πόσα άτομα λαμβάνουν το μήνυμα;

Πόσα άτομα έχουν λάβει το μήνυμα στις 10.00' ;

.....

3. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

α) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$

β) $(+2)^5 =$

γ) $(-2)^4 =$

δ) $(-2)^5 =$

ε) $(+2)^4 =$

Πότε το αποτέλεσμα της δύναμης είναι αρνητικό;


.....

Γιατί το αποτέλεσμα της δύναμης είναι αρνητικό στην παραπάνω περίπτωση;

.....

4. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων.

α) -3^3	β) $(-3)^3$	γ) -3^4	δ) $(-3)^4$
ε) -6^2	στ) $(-6)^2$	ζ) -1^4	η) $(-1)^4$
θ) $(-2)^3$	ι) -2^4	ια) $(-2)^4$	ιβ) -2^3




Το γινόμενο $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha$,
 n παράγοντες
 συμβολίζεται με α^n και
 λέγεται **δύναμη με βάση το α**
 και εκθέτη το φυσικό $n > 1$.



Για $n = 1$, γράφουμε $\alpha^1 = \alpha$.




Η δύναμη α^n διαβάζεται και νιοστή δύναμη του α.



Η δύναμη α^2 λέγεται και τετράγωνο του α ή α στο τετράγωνο.



Η δύναμη α^3 λέγεται κύβος του α ή α στον κύβο.

- 
- Αν η βάση θετική, τότε η δύναμη θετική.
 Αν $\alpha > 0$, τότε $\alpha^n > 0$
 - Αν η βάση αρνητική τότε
 - Αν ο εκθέτης άρτιος (ζυγός) τότε η δύναμη είναι θετική.
 Αν $\alpha < 0$ και n άρτιος, τότε $\alpha^n > 0$
 - Αν ο εκθέτης περιττός (μονός) τότε η δύναμη είναι αρνητική.
 Αν $\alpha < 0$ και n περιττός, τότε $\alpha^n < 0$



Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το άθροισμα των εκθετών.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$



Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου.

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$



Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε εκθέτη, υψώνουμε κάθε παράγοντα του γινομένου στον εκθέτη αυτό.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

ή

Αν κάθε παράγοντας ενός γινομένου είναι υψωμένος στον ίδιο εκθέτη, μπορούμε να υψώσουμε το γινόμενο των παραγόντων στον εκθέτη αυτό.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$



Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε καθένα από τους όρους του πηλίκου στον εκθέτη αυτό.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Αν κάθε όρος ενός πηλίκου είναι υψωμένος στον ίδιο εκθέτη μπορούμε να υψώσουμε το πηλίκο των όρων στον εκθέτη αυτό.

5. Να εκτελέσετε τις πράξεις (αναλυτικά στις παραστάσεις α και β).

α) $2^3 \cdot 2^5 = \dots\dots\dots$

β) $(-7)^3 \cdot (-7)^2 = \dots\dots\dots$

Τι παρατηρείτε ως προς τον εκθέτη του αποτελέσματος και το άθροισμα των εκθετών της αρχικής παράστασης; $\dots\dots\dots$

γ) $2 \cdot 2^5 = \dots\dots\dots$

δ) $2^{34} \cdot 2^{51} = \dots\dots\dots$

6. Να εκτελέσετε τις πράξεις (αναλυτικά στις παραστάσεις α και β).

α) $2^7 : 2^4 = \dots\dots\dots$

β) $(-2)^7 : (-2)^4 = \frac{(-2)^7}{(-2)^4} = \dots\dots\dots$

Τι παρατηρείτε ως προς τον εκθέτη του αποτελέσματος και τη διαφορά των εκθετών της αρχικής παράστασης; $\dots\dots\dots$

γ) $\frac{(-3)^{34}}{(-3)^{29}} = \dots\dots\dots$

δ) $\frac{5^{56}}{5^{47}} = \dots\dots\dots$

7. Να εκτελέσετε (αναλυτικά) τις πράξεις (με δύο τρόπους).

<p>α) $(2 \cdot 3)^4 =$</p>	<p>β) $(2 \cdot 3)^4 =$</p>
--	--

Τι παρατηρείτε; $\dots\dots\dots$

8. Να εκτελέσετε τις πράξεις.

<p>α) $(20 \cdot 5)^4 =$</p>	<p>β) $5^3 \cdot 20^3 =$</p>
---	---

9. Να εκτελέσετε (αναλυτικά) την πράξη:

$\left(\frac{2}{9}\right)^3 = \dots\dots\dots$

Τι παρατηρείτε; $\dots\dots\dots$

10. Να εκτελέσετε τις πράξεις.

α) $\left(\frac{6}{5}\right)^3 =$	β) $\frac{9^4}{3^4} =$	γ) $16^3 : 8^3 =$
--	-------------------------------	--------------------------

11. Να εκτελέσετε τις πράξεις

α) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 4^3 =$	β) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 9^3 =$
--	---



Για να υψώσουμε μία δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο γινόμενο των εκθετών.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Εφόσον ο εκθέτης μιας δύναμης μπορεί να γραφεί σε γινόμενο εκθετών, μπορούμε να υψώσουμε την βάση σε έναν όρο εκ του γινομένου των εκθετών, και στη συνέχεια την δύναμη που προκύπτει μπορούμε να την υψώσουμε στον άλλο όρο του γινομένου των εκθετών.

12. Να εκτελέσετε (αναλυτικά) την πράξη (με δύο τρόπους).

α) $(8^3)^7 =$	β) $(8^3)^7 = =$
-----------------------	-------------------------

Τι παρατηρείτε;

.....

.....

13. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων.

α) $3^2 \cdot 3^3$	β) $(-3)^3 \cdot (-3)^2$	γ) $3^7 : 3^5$	δ) $(2^3)^4$	ε) -2^3
στ) $a^2 \cdot a^3$	ζ) $(-a)^3 \cdot (-a)^2$	η) $a^7 : a^5$	θ) $(-a^3)^4$	ι) $(a^3)^4$
ια) $(a^3)^4$	ιβ) $(2a)^3$	ιγ) $(2a^2)^3$	ιδ) $(a^4 \cdot a^2)^3$	ιε) $(-2^3 a)^2$

14. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων.

α) $\frac{(4^3)^6}{(4^2)^5 \cdot 4^7} =$	β) $\frac{16 \cdot (a^3)^6}{(2a^2)^4 a^2} =$
---	---



Η σειρά των πράξεων είναι η ακόλουθη:

1. Δυνάμεις,
2. Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις
3. Προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, προηγούνται οι πράξεις μέσα σ' αυτές με την ίδια σειρά.

15. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\Pi = (-2)^3 \cdot 3 - 3^4 + (-2)^4 \cdot 16 + [-1 - (-1)^7 \cdot 8]$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

16. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\Delta = 3(-4)^2 + (-5)(-1)^4 - 6(-2)^3$

.....

.....

.....

.....

17. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = \frac{(-4)^2}{2^2} - \frac{(21)^3}{(-7)^3} + \frac{(-28)^4}{(-6)^4}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Α.7.9. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο



Η δύναμη κάθε αριθμού, διάφορου του μηδενός με εκθέτη το μηδέν είναι ίση με μονάδα.

$$a^0 = 1$$



Η δύναμη κάθε αριθμού, διάφορου του μηδενός, με εκθέτη αρνητικό είναι ίση με κλάσμα που έχει αριθμητή τη μονάδα και παρονομαστή τη δύναμη του αριθμού αυτού με αντίθετο εκθέτη.

$$a^{-v} = \frac{1}{a^v} = \left(\frac{1}{a}\right)^v$$



Επειδή τα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και

$\frac{\beta}{\alpha}$ είναι αντίστροφα όπως

και τα α και β στην προηγούμενη σχέση, εξάγουμε το συμπέρασμα ότι ισχύει:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v$$



Οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη φυσικό, που μάθαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ισχύουν και για τις δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο.

18. Να εκτελέσετε την πράξη:

$$\frac{5^7}{5^7} = \dots\dots\dots$$

19. Να εκτελέσετε (αναλυτικά) τις πράξεις:

α) $\frac{2^7}{2^5} = \dots\dots\dots$

β) $\frac{2^7}{2^6} = \dots\dots\dots$

γ) $\frac{2^7}{2^7} = \dots\dots\dots$

δ) $\frac{2^7}{2^8} = \dots\dots\dots$

ε) $\frac{2^7}{2^9} = \dots\dots\dots$

20. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α) 2^{-5}	β) -3^{-3}	γ) $(-234567)^0$	δ) $(-4)^{-2}$	ε) -4^{-2}
-------------	--------------	------------------	----------------	--------------

21. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α) $(-2)^{-5}$	β) $(-3)^{-3}$	γ) $(\alpha \cdot \beta)^0$	δ) $-(-4)^{-2}$	ε) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$
----------------	----------------	-----------------------------	-----------------	------------------------------------

22. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α) $-\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$	β) $\left(\frac{-3}{4}\right)^{-2}$	γ) $-\left(\frac{-3}{4}\right)^{-2}$	δ) $-\left(\frac{-3}{4}\right)^{-3}$	ε) $\left(\frac{-3}{4}\right)^{-3}$
-------------------------------------	-------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------	-------------------------------------

23. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $[(-3)^3]^2$	β) $3^3 : 3^{-2}$	γ) $(-2)^4 \cdot (-2)^6$	δ) $\frac{12^{-3}}{3^{-3}}$
-----------------	-------------------	--------------------------	-----------------------------

24. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α) 10^{-1}	β) 10^{-2}	γ) 10^{-3}	δ) 10^{-4}	ε) 10^{-5}	στ) 10^{-6}	ζ) 10^{-7}
--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	---------------	--------------

25. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $[(-3)^3]^2$	β) $3^3 : 3^{-2}$	γ) $(-2)^4 \cdot (-2)^6$	δ) $\frac{12^{-3}}{3^{-3}}$	ε) $(-2)^3 \cdot (-2)^{-5}$
------------------------	--------------------------	---------------------------------	------------------------------------	------------------------------------

26. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

α) $5^3 \cdot 5^{-2}$	β) $\frac{(-4)^5}{(-4)^7}$	γ) $[(-2)^3]^{-2}$	δ) $(5^2)^{-3} \cdot 5^7$	ε) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-13}$
------------------------------	-----------------------------------	---------------------------	----------------------------------	---

27. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$A = (2^{-2} + 4^{-1})^{-1}$	$B = \frac{2 - 2^{-2}}{1 - 2^{-3}}$	$E = \frac{27^2 \cdot 3^2}{81^4}$
------------------------------	-------------------------------------	-----------------------------------

28. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$\Delta = \frac{2^4 \cdot 4^2}{8^3}$	$\Gamma = \frac{5^0 - 3^1}{3^{-1}} + \left(-\frac{2}{3}\right)^0$
--------------------------------------	---

29. Να απλοποιήσετε την παράσταση $Z = \frac{(\alpha^{-2})^3 \cdot \alpha^{-2}}{(\alpha^3)^{-3}} \cdot \alpha^{-1}$ για $\alpha \neq 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Όταν έχουμε διαφορετικές βάσεις, είναι βολικό για την εφαρμογή των ιδιοτήτων να εκφράζουμε τους αριθμούς ως δυνάμεις με βάση το 2 ή το 3 π.χ. $32 = 2^5$ ή $81 = 3^4$

30. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $H = (-3)^3 - 2^2 + [(-1)^{1000} + 4^2 : (-8)] + (-2)^3 : 4$

.....

.....

.....

.....

31. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Theta = \left(-\frac{1}{2}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{1-x} - x^x$ για $x = 2$

.....

.....

.....

.....

32. Αν $x = \left\{ \left[\left(-\frac{1}{3} \right)^{-2} \right]^0 \right\}^{100}$ να υπολογίσετε την παράσταση $K = \frac{(-6)^5}{3^5} - \frac{8^4}{(-4)^4} + \frac{10^3}{(-5)^3} - (-x)^{2013}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ασκήσεις προς λύση

7.8. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

7.1. Να υπολογίσετε τα εξαγόμενα των παρακάτω πράξεων:

α) $(-3)^2 - (+2)^3$

β) $(-3)^2 \cdot (+2)^3$

γ) $3^2 - 3^3$

δ) $3^2 \cdot 3^3$

7.2. Να υπολογίσετε τα εξαγόμενα των παρακάτω πράξεων:

α) $2^3 + 2^2$

β) $\frac{2^3}{2^2}$

γ) $((-2)^3)^4$

δ) $((-2)^2)^2$

7.3. Να υπολογίσετε τα εξαγόμενα των παρακάτω πράξεων:

α) $3(-4)^2 + (-5)(-1)^4 - 6(-2)^4$

β) $3^2 - 4(-2)^2(-1) + 2015^0$

γ) $2(-3)^2(-1)^4 + 3(-5)^2 2^3$

7.4. Να βρείτε τον αριθμό κ αν ισχύει: $7^κ + 7^κ + 7^κ + 7^κ + 7^κ + 7^κ + 7^κ = 7^{19}$.

7.5. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $-3^2 x = -27$

β) $(-3)^2 y = 3$

γ) $4^3 k = 4^7$

δ) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 3^2 = -3\alpha$

7.6. Να γράψετε ως μια δύναμη με βάση το x τις παραστάσεις:

α) $x^3 \cdot x^2 \cdot x^0 \cdot x^5$

β) $\frac{x^6 \cdot x^{10}}{x^5}, x \neq 0$

γ) $\frac{x^2 \cdot (x^3)^3 \cdot x}{x^7 \cdot x^4}, x \neq 0$

7.7. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις:

α) $y^0 \cdot x^3 \cdot y^4 \cdot x$

β) $x^3 \cdot y^2 \cdot (xy^2)^3 \cdot (x^6)^0 \cdot (y^2)^2$

γ) $\frac{x^3 \cdot (xy^4)^2 \cdot y}{(x^2)^3 \cdot y^3}, \text{ με } x, y \neq 0$

7.8. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = \frac{(-6)^2}{3^2} - \frac{(21)^3}{(-7)^3} + \frac{(-28)^4}{(-4)^4}$$

$$B = \frac{(-4)^{10} \cdot 3^7}{(-3)^5 \cdot 4^9} - 2(-1)^0$$

7.9. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = 2x - x^2 + y^x - 3(y-x)^3$, αν $x = 2$ και $y = 1$.

7.10. Τοποθετήστε τους αριθμούς σε σειρά από τον πιο μικρό ως τον πιο μεγάλο.

$(2^2)^3$

$((-2)^2)^2$

$(3^2)^2$

$((-2)^3)^2$

$3^{(-2)^3}$

7.11. Αν είναι $x = (-1+3)^2 - (-1)^0$ και $y = (-2)^2$, ποια είναι η αριθμητική τιμή της παράστασης $A = y - 15^2 - 2x^3$;

7.12. Αν ο ν είναι περιττός φυσικός να κάνετε τις πράξεις:

α) $x^ν + (-x)^ν$

β) $(-x)^ν \cdot x^ν$

γ) $\frac{x^{2ν}}{(-x)^{2ν}}$

7.13. Αν $\alpha = -1$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $M = (\alpha + 1)^{2014} - (1 - \alpha)^3 + (\alpha + 2)^{2015}$

7.9. Δυνάμεις ρητών με εκθέτη ακέραιο

7.14. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $9 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

β) $(-16)^3 : (4^{-2})^{-3}$

γ) $\frac{3 \cdot 3^4 \cdot 3^{-2} \cdot 3^{-5}}{3^0 \cdot 3^{-8}}$

7.15. Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{3^{-2} \cdot (-2)^{-3} \cdot 8^{-1} \cdot (-10)^2}{4^{-2} \cdot 5^3 \cdot (-3)^{-2}}$

7.16. Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{(0,2)^{-1} - 3(0,9)^0}{(0,1)^{-2} \cdot (10)^2 - (-1)^{19}}$

7.17. Αν $\alpha = -1$ και $\beta = -1$, να υπολογίσετε την παράσταση: $(\alpha^2 \cdot \beta^5)^3 \cdot (\alpha^{-3} \cdot \beta^2)^{-2} \cdot \beta$

7.18. Να λύσετε τις εξισώσεις.

α) $3^{-4} \cdot y = 3$

β) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} : k = 3^0$

γ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \cdot x = 32$

7.19. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \left(\frac{2}{x}\right)^{-x+1} - (x+1)^{-x} + \left(\frac{1}{x-1}\right)^{x-2}$ αν $x = 2$.

7.20. Αν $x = -|-4| + |-2|$ και $y = |-10| - |11|$, να υπολογίστε την τιμή της παράστασης $A = \frac{y^x - (-2)^x}{3y^2 + (-x)^y}$.

7.21. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις ως δύναμη ενός αριθμού:

α) $\left(\frac{6}{7}\right)^{-4} \cdot \left(-\frac{7}{6}\right)^7$

β) $64^{-2} \cdot \left[32^{-1} : \left(\frac{1}{8}\right)^{-3}\right]^2$

7.22. Να υπολογίσετε την παράσταση $\left(\frac{-5x^3}{3y^6}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{27y^4}{10x^2}\right)^{-3}$

7.23. Ποιος είναι ο μικρότερος από τους παρακάτω αριθμούς;

$0,01^{-3}$ 10^{-3} $0,1^4$ 100^{-1}

7.24. Να βρείτε την τιμή του γ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\frac{2^{y-2}}{2^6} = 2^0$

β) $\frac{11^6}{11^{2y-3}} = 11$