

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν α, β είναι ετερόσημοι, τότε $\alpha + \beta < 0$. **Λάθος**
2. Ισχύει ότι $(\alpha^k)^\lambda = \alpha^{k+\lambda}$ **Λάθος**
3. Η εξίσωση $x^5 = 32$ έχει λύση την $x = 2$ **Σωστό**
4. Η εξίσωση $x^{2015} = -1$ είναι αδύνατη. **Λάθος**
5. Η εξίσωση $x^{2014} = 1$ έχει ακριβώς μία λύση. **Λάθος**
6. Το τετράγωνο ενός πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός. **Σωστό**
7. Αν n άρτιος τότε η εξίσωση $x^n = a^n$ έχει δύο λύσεις τις $x_1 = a$ και $x_2 = -a$ **Σωστό**
8. Ισχύει ότι $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ **Λάθος**
9. Η εξίσωση $x^n = a$ έχει πάντα πραγματική λύση για n περιττό. **Σωστό**
10. Ισχύει ότι $\sqrt{a^2} = a$ **Λάθος**
11. Ισχύει ότι $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$ **Σωστό**
12. Ισχύει ότι $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$ **Σωστό**
13. Ισχύει ότι $|\sqrt{2} - 5| = 5 - \sqrt{2}$ **Σωστό**
14. Ισχύει ότι $\frac{5}{\sqrt{5}} = 5$ **Λάθος**
15. Ισχύει ότι $\sqrt{(1 - \sqrt{9})^2} = 1 - \sqrt{9}$ **Λάθος**
16. Η εξίσωση $ax = b$ με $a \neq 0$ και $b = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$ **Σωστό**
17. Αν $a \neq 0$ τότε η εξίσωση $ax + b = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = -\frac{a}{b}$ **Λάθος**
18. Η εξίσωση $ax + b = 0$ με $a = 0$ είναι αδύνατη. **Λάθος**
19. Αν $\theta < 0$, τότε η ανίσωση $|x| < \theta$ είναι αδύνατη. **Σωστό**
20. Ισχύει $a \leq |a|$ για κάθε πραγματικό αριθμό a . **Σωστό**
21. Αν $\theta > 0$ τότε ισχύει $|x| = \theta \Leftrightarrow x = -\theta$ ή $x = \theta$ **Σωστό**
22. Η εξίσωση $|x| + 1 = 0$ έχει μία λύση. **Λάθος**
23. Ισχύει ότι $|x| = |-x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ **Σωστό**
24. Ισχύει ότι $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ **Λάθος**

25. Ισχύει ότι $|\alpha\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ **Σωστό**
26. Ισχύει ότι $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ **Σωστό**
27. Ισχύει ότι $|\alpha-\beta| = |\beta-\alpha|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ **Σωστό**
28. Ισχύει ότι $|x| < 2 \Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 2$ **Λάθος**
29. Ισχύει ότι $|x| > 1 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$ **Σωστό**
30. Η εξίσωση $|x+1| = -2$ είναι αδύνατη. **Σωστό**
31. Η εξίσωση $|x-1| < 2$ είναι αδύνατη. **Λάθος**
32. Μια δευτεροβάθμια εξίσωση μπορεί να έχει το πολύ δύο ρίζες. **Σωστό**
33. Ένα τριώνυμο για το οποίο ισχύει $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$, έχει δύο ετερόσημες ρίζες. **Σωστό**
34. Η εξίσωση $x^2+25 = 0$ έχει δύο λύσεις. **Λάθος**
35. Αν μια ανίσωση 2ου βαθμού αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι θετική. **Λάθος**

B. Απόδειξη μίας απλής πρότασης (ιδιότητας, λήμματος, θεωρήματος ή πορίσματος), που είναι αποδεδειγμένη στο σχολικό εγχειρίδιο.

1. Να αποδειχθεί ότι αν α, β είναι ομόσημοι αριθμοί τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$ (σελ. 58)
2. Να αποδείξετε ότι $|\alpha\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$ (σελ. 62)
3. Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ (σελ. 71)
4. Να λυθεί η εξίσωση $ax+\beta = 0$ (σελ. 79)
5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ μετασχηματίζεται ως εξής:
 $x^2 - Sx + P = 0$ όπου $S = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $P = \frac{\gamma}{\alpha}$ (τύποι του Vietta). (σελ. 90)
6. Να λυθεί η ανίσωση $ax+\beta > 0$ (σελ. 101)

Ασκήσεις

1. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 1$
2. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x}{x-2} = \frac{4}{x^2-2x}$

3. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{1+x}{x^2-1}$

4. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x+3}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{3}{x^2-3x}$

5. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x+4}{3} - \frac{3x-1}{15} = \frac{x-4}{5} + 2$

6. Να λυθεί η εξίσωση: $3(x^2+2) - 8x = 4-3x$

7. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{8x}{3} + 4 = \frac{5x+12}{3} + x$

8. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x-4}{2} = \frac{7x}{2} - 3x - 5$

9. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{1}{x^2+3x+2} - \frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{2(x+2)} = 0$

10. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x^2+2x}$

11. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x^2}{x-1} - 8 = \frac{1}{x-1}$

12. Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{4x+5}{2} - \frac{7x-3}{6} < 3$

13. Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{3-x}{4} - \frac{x}{2} > 3$

14. Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{x}{5} - 4 > \frac{x-20}{2}$

15. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων: $5(x-2) > x-18$ και $2x-9 \leq 5x-6$

16. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων: $2(x+1) < 7-x$ και

$3(x+4) > 2+3(2x-1)$

17. Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{x-1}{x+1} > 1 + \frac{2}{1-x}$

18. α) Να λύσετε την ανίσωση: $3x - 1 < x + 5$

β) Να λύσετε την ανίσωση: $3x < 7x + 2(x-3)$

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.