ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x-4)(x+1)=0$ β) $y(y+5)=0$ γ) $(3-\omega)(2\omega+1)=0$

δ) $7x(x-7)=0$ ε) $3y\left(\frac{y}{3}-2\right)=0$ στ) $\left(\frac{1}{2}-\omega\right)(2\omega-1)=0$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2=7x$ β) $-y^2=9y$ γ) $2\omega^2-72=0$

δ) $-2t^2-18=0$ ε) $-0{,}2\varphi^2+3{,}2=0$ στ) $\frac{z^2}{6}-0{,}5z=0$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(2x-1)^2-1=0$ β) $3(x+2)^2=12$ γ) $(x+1)^2=2x$

δ) $\frac{(x-9)^2}{3}=27$ ε) $(3x-1)^2-4x^2=0$ στ) $(x+\sqrt{3})^2-3=0$

4 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(3x+1)^2=5(3x+1)$ β) $0{,}5(1-y)^2=18$ γ) $(2\omega^2+1)(\omega^2-16)=0$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x(x-4)=-4$ β) $y^2+y-12=0$ γ) $\omega^2-2\omega-15=0$

δ) $2t^2-7t+6=0$ ε) $3\varphi^2+1=4\varphi$ στ) $5z^2-3z-8=0$

6 Να λύσετε τις εξισώσεις:

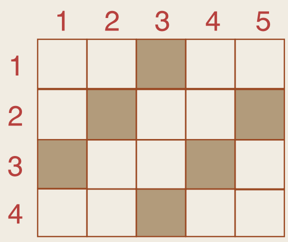
α) $25x^2+10x+1=0$ β) $y^2(y-2)+4y(y-2)+4y-8=0$

γ) $\omega^2+2006\omega-2007=0$

7 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ β) $x^2-(\sqrt{3}-1)x-\sqrt{3}=0$

8



Οριζόντια:

1. Μη μηδενική ρίζα της εξίσωσης $x^2=12x$
   – Ρίζα της εξίσωσης $x^2+225=30x$
2. Γινόμενο ριζών της εξίσωσης $x(x+4)+8(x+4)=0$
3. Άθροισμα ριζών της εξίσωσης $x^2-10x+9=0$
4. Η απόλυτη τιμή του γινομένου των ριζών της εξίσωσης $x^2=25$
   – Η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $x^2=32x$

Κάθετα:

1. Ρίζα της εξίσωσης $x^2-20x+100=0$
2. Το ακέραιο πηλίκο των ριζών της εξίσωσης $x(x-15)=x-15$
3. Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $(x-5)^2-(x-5)=0$
4. Μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $x^2-144=0$
5. Ρίζα της εξίσωσης $x^2(x-12)+2007(x-12)=0$

Β Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου

Στην προηγούμενη ενότητα εφαρμόσαμε τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$. Τη μέθοδο αυτή μπορούμε να την εφαρμόσουμε και για να λύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού στη γενική της μορφή, $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$. Έχουμε διαδοχικά:

$$αx^2 + βx + γ = 0$$

- Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με 4α.

$$4α \cdot αx^2 + 4α \cdot βx + 4α \cdot γ = 0$$

- Μεταφέρουμε το σταθερό όρο στο β′ μέλος.

$$4α^2x^2 + 4αβx = -4αγ$$

- Στο α′ μέλος έχουμε δύο όρους του αναπτύγματος $(2αx + β)^2$. Για να συμπληρώσουμε το τετράγωνο του $2αx + β$ προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $β^2$.

$$(2αx)^2 + 2 \cdot 2αx \cdot β = -4αγ$$

$$(2αx)^2 + 2 \cdot 2αx \cdot β + β^2 = β^2 - 4αγ$$

$$(2αx + β)^2 = β^2 - 4αγ$$

Αν συμβολίσουμε την παράσταση $β^2 - 4αγ$ με το γράμμα Δ, τότε η εξίσωση γράφεται $(2αx + β)^2 = Δ$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $Δ > 0$, τότε έχουμε:

$$2αx + β = \pm\sqrt{Δ}$$

$$2αx = -β \pm \sqrt{Δ}$$

$$x = \frac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$$

Άρα η εξίσωση έχει **δύο άνισες λύσεις**, τις $x = \frac{-β + \sqrt{Δ}}{2α}$ και $x = \frac{-β - \sqrt{Δ}}{2α}$

- Αν $Δ = 0$, τότε έχουμε:

$$(2αx + β)^2 = 0$$

$$2αx + β = 0$$

$$2αx = -β$$

$$x = -\frac{β}{2α}$$

Άρα η εξίσωση έχει **μία διπλή λύση**, τη $x = -\frac{β}{2α}$

- Αν $Δ < 0$, τότε η εξίσωση **δεν έχει λύση** (**αδύνατη**).

Η παράσταση $β^2 - 4αγ$, όπως είδαμε, παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση της εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$, γιατί μας επιτρέπει να διακρίνουμε το πλήθος των λύσεών της. Γι' αυτό λέγεται **διακρίνουσα** και συμβολίζεται με το γράμμα Δ, δηλαδή

$$\boldsymbol{Δ = β^2 - 4αγ}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

Η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$.

- Αν $Δ > 0$, έχει **δύο άνισες λύσεις** τις $x = \frac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$
- Αν $Δ = 0$, έχει **μία διπλή λύση** την $x = -\frac{β}{2α}$
- Αν $Δ < 0$, **δεν έχει λύση** (αδύνατη).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2x^2 + 5x + 3 = 0$ β) $6x^2 - 5x + 2 = 0$ γ) $-16x^2 + 8x - 1 = 0$

Λύση

α) Στην εξίσωση $2x^2 + 5x + 3 = 0$ είναι $α = 2$, $β = 5$, $γ = 3$, οπότε η διακρίνουσα είναι $Δ = β^2 - 4αγ = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = \dfrac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-5 \pm 1}{4}$,

δηλαδή είναι $x = \dfrac{-5 + 1}{4} = -1$ ή $x = \dfrac{-5 - 1}{4} = -\dfrac{3}{2}$

β) Στην εξίσωση $6x^2 - 5x + 2 = 0$ είναι $α = 6$, $β = -5$, $γ = 2$, οπότε η διακρίνουσα είναι $Δ = β^2 - 4αγ = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 25 - 48 = -23 < 0$.
Άρα η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη).

γ) Στην εξίσωση $-16x^2 + 8x - 1 = 0$ είναι $α = -16$, $β = 8$, $γ = -1$, οπότε η διακρίνουσα είναι $Δ = β^2 - 4αγ = 8^2 - 4 \cdot (-16) \cdot (-1) = 64 - 64 = 0$.

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, την $x = -\dfrac{β}{2α} = -\dfrac{8}{2 \cdot (-16)} = \dfrac{1}{4}$

2 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $9x^2 - (5x - 1)^2 = 2x$ β) $\dfrac{x(x + 3)}{3} - \dfrac{x - 6}{6} = \dfrac{1}{2}$

Λύση

α) $9x^2 - (5x - 1)^2 = 2x$

$9x^2 - (25x^2 - 10x + 1) = 2x$

$9x^2 - 25x^2 + 10x - 1 - 2x = 0$

$-16x^2 + 8x - 1 = 0$

$x = \dfrac{1}{4}$ (διπλή λύση)

(Παράδειγμα 1γ)

β) $\dfrac{x(x + 3)}{3} - \dfrac{x - 6}{6} = \dfrac{1}{2}$

$6 \cdot \dfrac{x(x + 3)}{3} - 6 \cdot \dfrac{x - 6}{6} = 6 \cdot \dfrac{1}{2}$

$2x(x + 3) - (x - 6) = 3$

$2x^2 + 6x - x + 6 - 3 = 0$

$2x^2 + 5x + 3 = 0$

$x = -1$ ή $x = -\dfrac{3}{2}$ *(Παράδειγμα 1α)*

3 α) Να λυθεί η εξίσωση $2x^2 - 8x + 6 = 0$.

β) Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο $2x^2 - 8x + 6$.

Λύση

α) Στην εξίσωση $2x^2 - 8x + 6 = 0$ είναι $α = 2$, $β = -8$, $γ = 6$, οπότε η διακρίνουσα είναι $Δ = β^2 - 4αγ = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 64 - 48 = 16 > 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = \dfrac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$ ή $x = \dfrac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 2} = \dfrac{8 \pm 4}{4}$,

δηλαδή είναι $x = 3$ ή $x = 1$.

β) $2x^2 - 8x + 6 = 2(x^2 - 4x + 3) = 2(x^2 - 3x - x + 3) = 2\left[x(x - 3) - (x - 3)\right] =$
$= 2(x - 3)(x - 1)$

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Στο προηγούμενο παράδειγμα διαπιστώσαμε ότι:

- Οι λύσεις της εξίσωσης $2x^2 - 8x + 6 = 0$ είναι οι αριθμοί 3 και 1.
- Το τριώνυμο $2x^2 - 8x + 6$ αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων ως εξής:
  $2x^2 - 8x + 6 = 2(x - 3)(x - 1)$

Γενικά

Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$$

Για παράδειγμα, η εξίσωση $2x^2 + 5x + 3 = 0$ έχει λύσεις τις -1 και $-\frac{3}{2}$ *(παράδειγμα 1α)*.
Άρα το τριώνυμο $2x^2 + 5x + 3$ γράφεται

$$2x^2 + 5x + 3 = 2[x - (-1)]\left[x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right] = 2(x + 1)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

Ομοίως η εξίσωση $-16x^2 + 8x - 1 = 0$ έχει μία διπλή λύση, την $x = \frac{1}{4}$ *(παράδειγμα 1γ)*.

Άρα το τριώνυμο $-16x^2 + 8x - 1$ γράφεται

$$-16x^2 + 8x - 1 = -16\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = -16\left(x - \frac{1}{4}\right)^2$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Αν Δ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, τότε να αντιστοιχίσετε σε κάθε περίπτωση της στήλης (Α) το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη (Β).

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\Delta > 0$	**1.** Η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση.
β. $\Delta = 0$	**2.** Η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις.
γ. $\Delta \geq 0$	**3.** Η εξίσωση έχει μία διπλή λύση.
δ. $\Delta < 0$	**4.** Η εξίσωση δεν έχει λύση.

α	β	γ	δ

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν μία εξίσωση 2ου βαθμού έχει διακρίνουσα θετική, τότε δεν έχει λύση. ☐

β) Αν μία εξίσωση 2ου βαθμού έχει διακρίνουσα θετική ή μηδέν, τότε έχει μία τουλάχιστον λύση. ☐

γ) Η εξίσωση $2x^2 + 4x - 6 = 0$ έχει ως λύσεις τους αριθμούς 1 και -3, οπότε το τριώνυμο $2x^2 + 4x - 6$ γράφεται $2x^2 + 4x - 6 = (x - 1)(x + 3)$. ☐

3 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις είναι προτιμότερο να λυθούν με τη βοήθεια του τύπου

α) $2x^2 = 7x$ β) $3x^2 - 2x + 8 = 0$ γ) $-2x^2 + 50 = 0$ δ) $5x^2 + x - 4 = 0$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να φέρετε τις εξισώσεις της πρώτης στήλης στη μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ και να συμπληρώσετε τις υπόλοιπες στήλες του πίνακα.

Εξίσωση	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$	α	β	γ
$x(x - 1) = -2$				
$3x^2 + 4 = 2(x + 2)$				
$(x - 1)^2 = 2(x^2 - x)$				

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - x - 2 = 0$ β) $4y^2 + 3y - 1 = 0$ γ) $-2\omega^2 + \omega + 6 = 0$

δ) $2z^2 - 3z + 1 = 0$ ε) $-25t^2 + 10t - 1 = 0$ στ) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

ζ) $3x^2 + 18x + 27 = 0$ η) $x^2 - 4x = 5$ θ) $x^2 - 3x + 7 = 0$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $x^2 - 7x = 0$ β) $x^2 - 16 = 0$

i) με τη βοήθεια του τύπου ii) με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

4 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3x^2 - 2(x - 1) = 2x + 1$ β) $(y + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5(2y + 3)$

γ) $(2\omega - 3)^2 - (\omega - 2)^2 = 2\omega^2 - 11$ δ) $\varphi(8 - \varphi) - (3\varphi + 1)(\varphi + 2) = 1$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{x^2 - 1}{3} - \dfrac{x + 3}{5} = x - 2$ β) $\dfrac{y^2}{3} - \dfrac{6y + 1}{4} = \dfrac{y - 2}{6} - 2$

γ) $0{,}5t^2 - 0{,}4(t + 2) = 0{,}7(t - 2)$ δ) $\dfrac{\omega}{2}(\sqrt{3}\omega - 7) = -\sqrt{3}$

6 Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) $x^2 + 4x - 12$ β) $3y^2 - 8y + 5$ γ) $-2\omega^2 + 5\omega - 3$

δ) $x^2 - 16x + 64$ ε) $9y^2 + 12y + 4$ στ) $-\omega^2 + 10\omega - 25$

7 Αν α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον λύση

α) $\alpha x^2 - x + 1 - \alpha = 0$ β) $\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0$

8 Δίνεται η εξίσωση $(\alpha + \gamma)x^2 - 2\beta x + (\alpha - \gamma) = 0$, όπου α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ. Αν η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.