Γ Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός θετικού αριθμού x συμβολίζεται με $\sqrt{x}$ και είναι ο θετικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό x. Π.χ. $\sqrt{25} = 5$, αφού $5^2 = 25$
Ορίζουμε ακόμη $\sqrt{0} = 0$.
Όμως και $(-5)^2 = 25$, οπότε έχουμε $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$.

Γενικά, για κάθε **πραγματικό αριθμό x** ισχύει:

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|} \qquad \sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7, \qquad \sqrt{7^2} = 7$$

Δεν ορίζεται τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός αριθμός.
Παρατηρούμε ακόμη ότι: $(\sqrt{9})^2 = 3^2 = 9$, δηλαδή $(\sqrt{9})^2 = 9$. Γενικά

$$\boxed{\text{Αν } x \geq 0, \text{ τότε } (\sqrt{x})^2 = x}$$

Ιδιότητες Για δύο μη αρνητικούς αριθμούς α, β μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

- Το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών τους ισούται με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου τους.
$$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$$
- Το πηλίκο των τετραγωνικών ριζών τους ισούται με την τετραγωνική ρίζα του πηλίκου τους.
$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \quad \text{με} \quad \beta > 0$$

Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί, τότε $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha+\beta}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να αποδειχθεί ότι $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ και γενικά για μη αρνητικούς αριθμούς α, β ότι ισχύει $\sqrt{\alpha^2\beta} = \alpha\sqrt{\beta}$.

Λύση

Επειδή $20 = 4 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$ έχουμε $\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.
Ομοίως έχουμε $\sqrt{\alpha^2\beta} = \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{\beta} = \alpha\sqrt{\beta}$.

➤ *Ο αριθμός 20 μπορεί να αναλυθεί και με άλλον τρόπο σε γινόμενο παραγόντων π.χ. $20 = 2 \cdot 10$, αλλά τότε κανένας παράγοντάς του δεν είναι τετράγωνο ενός θετικού ακέραιου αριθμού.*

2 Να αποδειχθεί ότι:
α) $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ β) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{24} = 6\sqrt{2}$ γ) $\sqrt{50} - \sqrt{18} = 2\sqrt{2}$

Λύση

α) Με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας έχουμε:
$3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = (3 + 2)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
β) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{24} = \sqrt{3 \cdot 24} = \sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
γ) $\sqrt{50} - \sqrt{18} = \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

3 Να μετατραπεί το κλάσμα $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$, που έχει άρρητο παρονομαστή, σε ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή.

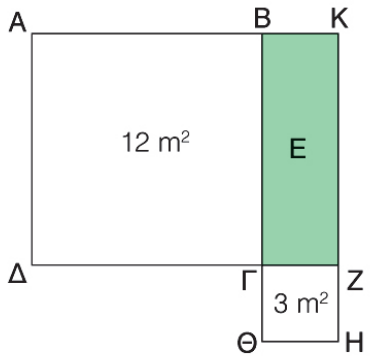
Λύση

Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με τον παρονομαστή.

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

4 Τα τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΓΖΗΘ έχουν εμβαδόν 12 m^2 και 3 m^2 αντιστοίχως. Να βρεθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΚΖΓ και το μήκος του τμήματος ΒΘ.

Λύση



Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $ΒΓ^2 = 12$ m^2, οπότε η πλευρά του είναι $ΒΓ = \sqrt{12}$ m.
Το εμβαδόν του τετραγώνου ΓΖΗΘ είναι $ΓΖ^2 = 3$ m^2, οπότε η πλευρά του είναι $ΓΖ = \sqrt{3}$ m. Επομένως
Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΚΖΓ είναι:
$Ε = ΒΓ \cdot ΓΖ = \sqrt{12}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{12\cdot 3} = \sqrt{36} = 6$ m^2.
Το μήκος του τμήματος ΒΘ είναι:
$ΒΘ = ΒΓ + ΓΘ = ΒΓ + ΓΖ = \sqrt{12} + \sqrt{3} =$
$\sqrt{4\cdot 3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ m.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $3\sqrt{3} + \sqrt{3} = \ldots\ldots$ β) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \ldots\ldots$ γ) $\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = \ldots\ldots$
δ) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3} = \ldots\ldots$ ε) $\sqrt{18} : \sqrt{2} = \ldots\ldots$ στ) $3\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} = \ldots\ldots$

2 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε στοιχείο της στήλης Α ένα στοιχείο από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\sqrt{25}$	
β. $\sqrt{-25}$	1. -5
γ. $-\sqrt{25}$	
δ. $\sqrt{5^2}$	2. δεν ορίζεται
ε. $\sqrt{(-5)^2}$	3. 5
στ. $\sqrt{-5^2}$	

α	β	γ	δ	ε	στ

3 Να συμπληρώσετε τους πίνακες:

α	β	$\sqrt{α}$	$\sqrt{β}$
4	1		
9	16		
64	36		

Άθροισμα

$\sqrt{α+β}$	$\sqrt{α}+\sqrt{β}$

Γινόμενο

$\sqrt{αβ}$	$\sqrt{α}\cdot\sqrt{β}$

Πηλίκο

$\sqrt{\dfrac{α}{β}}$	$\dfrac{\sqrt{α}}{\sqrt{β}}$

4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ ☐

β) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ ☐

γ) $\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2}$ ☐

δ) $\sqrt{(-3)^2} = 3$ ☐

ε) $\sqrt{\left(\dfrac{1}{2} - 1\right)^2} = \dfrac{1}{2} - 1$ ☐

στ) Το διπλάσιο του $\sqrt{5}$ είναι το $\sqrt{10}$. ☐

ζ) Το μισό του $\sqrt{12}$ είναι το $\sqrt{3}$. ☐

5 Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν 50 m^2. Είναι σωστό να ισχυριστούμε ότι η πλευρά του είναι $5\sqrt{2}$ m;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $3\sqrt{5} - 7\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$ β) $5\sqrt{7} - 8\sqrt{3} - 2\sqrt{7} + 4\sqrt{3}$

γ) $\sqrt{\dfrac{5}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{5}{8}} - \sqrt{\dfrac{3}{7}} \cdot \sqrt{\dfrac{12}{7}}$ δ) $\sqrt{\dfrac{14}{5}} \cdot \sqrt{\dfrac{10}{7}} + \sqrt{\dfrac{21}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{14}{3}}$

2 Να αποδείξετε τις ισότητες:

α) $3\sqrt{2} - \sqrt{50} + \sqrt{32} - 6\sqrt{8} = -10\sqrt{2}$ β) $\sqrt{27} - \sqrt{20} + \sqrt{12} - \sqrt{5} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$

γ) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{18} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{48} + \dfrac{\sqrt{120}}{\sqrt{5}} = \sqrt{6}$ δ) $\sqrt{3{,}6} \cdot \sqrt{4{,}9} - \sqrt{0{,}8} \cdot \sqrt{0{,}2} = 3{,}8$

3 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\sqrt{12+\sqrt{16}}$ β) $\sqrt{86+2\sqrt{52-\sqrt{9}}}$ γ) $\sqrt{6\sqrt{12\sqrt{3\sqrt{9}}}}$

4 Να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις περιμέτρους και τα εμβαδά των ορθογωνίων ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ και ΚΛΜΝ. Ποιο από τα ορθογώνια έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;

	μήκος	πλάτος	περίμετρος	εμβαδόν
ΑΒΓΔ	$5\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$		
ΕΖΗΘ	$4\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$		
ΚΛΜΝ	$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$		

5 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\sqrt{2}\left(\sqrt{18} + \sqrt{8}\right)$ β) $\sqrt{6}\left(\sqrt{27} - \sqrt{3}\right)$

γ) $\left(\sqrt{75} + \sqrt{45} - \sqrt{300}\right) : \sqrt{15}$ δ) $\left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right)$

6 Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα, που έχουν άρρητους παρονομαστές, σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητούς παρονομαστές.

α) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ β) $\dfrac{4}{\sqrt{6}}$ γ) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}}$ δ) $\dfrac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

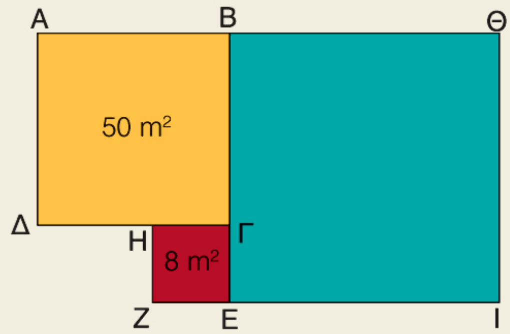
7 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{5} + x = 3\sqrt{5} - x$ β) $\sqrt{6}\,x = \sqrt{24}$

γ) $\dfrac{x}{\sqrt{2}} = \sqrt{32}$ δ) $3\sqrt{3} - x = \sqrt{27}$

8 Να αποδείξετε ότι $\left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{3} + 1\right) = 2$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ισότητα να μετατρέψετε το κλάσμα $\dfrac{1}{\sqrt{3} - 1}$, που έχει άρρητο παρονομαστή, σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

9 Αν τα τετράγωνα ΑΒΓΔ, ΓΕΖΗ έχουν εμβαδόν 50 m^2 και 8 m^2 αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΘΙΕ είναι 98 m^2.



10 Στις κάθετες πλευρές ΑΒ = 3 cm και ΑΓ = 6 cm ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, να πάρετε αντιστοίχως τα σημεία Δ, Ε, έτσι ώστε ΑΔ = 2 cm και ΑΕ = 1 cm. Να αποδείξετε ότι ΒΓ = 3ΔΕ.

11 Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), το ύψος ΑΔ = 4 cm και η πλευρά ΒΓ = 4 cm.

α) Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΓ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι $4 + 4\sqrt{5}$ cm.

β) Στην προηγούμενη ερώτηση 4 μαθητές έδωσαν τις παρακάτω απαντήσεις:

$4 + \sqrt{20}$, $4 + 2\sqrt{20}$, $8\sqrt{5}$, $2(2 + \sqrt{20})$.

Ποιες από αυτές είναι σωστές;