ΤΣΙΚΟΥΛΗ ή ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ
ΧΡΥΣΑΝΘΗ

ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ
ΒΑΣΙΛΙΚΗ

ΟΙ ΡΙΖΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΟΥΝ

ΘΕΣ/ΝΙΚΗ 1988

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η εργασία αυτή είχε σαν αφετηρία το πρόβλημα της παρουσίασης της νιοστής ρίζας ενός αριθμού, είτε μέσα από τα διδακτικά βιβλία της χώρας μας, είτε μέσα από τη διδασκαλία αυτής μέσα στην τάξη.

Το περιεχόμενό της στοχεύει στο να συνεισφέρει στη διευθέτηση του θέματος της παρουσίασης των ριζών στους μαθητές.

Η βιβλιογραφία της χώρας μας, πάνω σ'αυτό το θέμα περιλαμβάνει σχετικά λίγα κείμενα. Κατά συνέπεια, παραμένουν από ιστορικής άποψης.άγνωστες οι λεπτομέρειες των εξελίξεών του.

Στην εργασία αυτή περιέχονται σε γενικές γραμμές τα ακόλουθα:

α)Σύντομη ιστορική αναδρομή στην εξέλιξη της έννοιας της ρίζας και της παρουσίασης της από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα.

β)Παρουσίαση διδακτικών βιβλίων από το 1948 μέχρι σήμερα.

γ)Τεστ κατανόησης της έννοιας της ρίζας από μαθητές Λυκείου και φοιτητές του Μαθηματικού τμήματος του Α.Π.Θ.

δ)Παρουσίαση των απόψεων καθηγητών Μέσης Εκπαίδευσης.

ε)Συμπεράσματα από την όλη θεώρηση του θέματος.

ΣΥΝΤΟΜΗ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

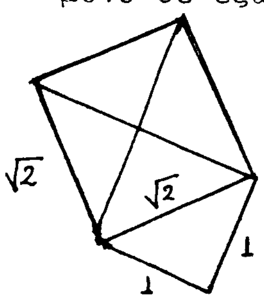
Ο πρώιμος πολιτισμός που αναπτύχθηκε στην κοιλάδα του Τίγρη και του Ευφράτη είχε σαν αποτέλεσμα την ανάπτυξη της αστρονομίας και κατ΄επέκταση των μαθηματικών. Η ανακάλυψη των δύο θεμελιωδών αριθμών-του 10 και του 60-που αποτελούσαν τη βάση του αριθμητικού συστήματος των Βαβυλωνίων είχε σαν άμεσο αποτέλεσμα την οριστική ερμηνεία του μαθηματικού περιεχομένου των πινακιδίων του Σενκερέχ, τα οποία ήταν εύρημα της περιόδου 2300-1600 π.Χ. του γεωλόγου W.K.LOFTUS το 1854. Αν εξαιρέσουμε μερικά κενά που οφείλονται σε αναπόφευκτες φθορές, περιέχονται σ΄αυτά τα πινακίδια τα τετράγωνα των αριθμών 1,2,3,...,60 και οι κύβοι των αριθμών 1,2,3,...,30 με τη βοήθεια των οποίων εκτελούνταν οι αντίστροφες πράξεις όπως η εξαγωγή της τετραγωνικής και της κυβικής ρίζας οι οποίες ήταν χρήσιμες στους ιερείς και σ΄αυτούς που ασχολούνταν με αστρολογικές μελέτες. ΄Ετσι έφτιαξαν πίνακες από ρητές τετραγωνικές ρίζες ενώ οι άρρητες τετραγωνικές ρίζες υπολογίζονταν προσεγγιστικά με τη μέθοδο "του αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου" με τη βοήθεια του τύπου $\sqrt{a^2+b} \simeq a+b/2a$

ο οποίος δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο: $\sqrt{50}=\sqrt{7^2+1}=7+\frac{1}{14}=7.071428571$

ενώ με σημερινό μικροϋπολογιστή:

$$\sqrt{50}=7.071067812$$

Οι Έλληνες ήταν ήδη εξοικειωμένοι με το πρόβλημα της εύρεσης του μήκους της πλευράς ενός τετραγώνου του οποίου το εμβαδό είναι γνωστό. Είναι εύκολο να βρούμε το μήκος Χ της πλευράς όταν το εμβαδό είναι ένα τετράγωνο όπως το 4, το 9, το Ι6 κ.λ.π. από την εξίσωση $X^2=3^2$ από την οποία έπεται ότι Χ=3. Στη γενική περίπτωση, όταν το εμβαδό είναι ένας αυθαίρετος αριθμός θετικός, δεν ήταν τότε γνωστή καμμία γενική λύση. Στο διάλογο "ΜΕΝΩΝ" του Πλάτωνα, ο Σωκράτης εξηγεί ότι η διαγώνιος ενός τετραγώνου πλευράς ένα, είναι η πλευρά ενός τετραγώνου εμβαδού 2. Σήμερα ο Μένωνας θα μπορούσε να συνοψίσει το γεωμετρικό πρόβλημα του διαλόγου στο ότι: Η πλευρά ενός τετραγώνου εμβαδού 2 έχει την τιμή $X=\sqrt{2}$. Εδώ, το σύμβολο $\sqrt{2}$ συμβολίζει τον αριθμό Χ ο οποίος όταν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του δίνει την τιμή 2. Το πρόβλημα της εύρεσης της πραγματικής αριθμητικής τιμής του αριθμού Χ μπορεί να λυθεί μόνο σε εξαιρετικές περιπτώσεις, π.χ. $\sqrt{9}=3$ γιατί $3^2=9$.



Σχήμα 1 : Η διαγώνιος ενός τετραγώνου πλευράς Ι είναι η πλευρά ενός τετραγώνου εμβαδού 2.

Οι Πυθαγόρειοι, με πρωτοστάτη τον Ίπασσο, γνώριζαν ότι η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι ασύμμετρο μέγεθος ως προς την πλευρά του. Δηλαδή αν πάρουμε την πλευρά του τετραγώνου ίση με Ι, τότε δεν υπάρχει ρητός ο οποίος να είναι η διαγώνιος αυτού του τετραγώνου, δηλαδή δεν υπάρχει ρητός τέτοιος ώστε $X^2=2$, δηλαδή ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος (Η απόδειξη αναφέρεται στο βιβλίο "Θεωρία Αριθμών" του κ. Κ.Λάκκη)
Την απόδειξη αυτή παρουσιάζει ο Αριστοτέλης χωρίς όμως

να την έχει επινοήσει ο ίδιος. Παρόμοιο συλλογισμό μ΄αυτόν που ακολουθήθηκε στην παραπάνω απόδειξη, χρησιμοποίησε πιθανόν και ο δάσκαλος του Πλάτωνα Θεόδωρος ο Κυρηναίος για να αποδείξει ότι οι αριθμοί $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... $\sqrt{17}$ είναι άρρητοι (ασύμμετροι) εκτός από τους αριθμούς $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$. Συγκεκριμένα στο "Θεαίθητο" του Πλάτωνα ο συνομιλητής του Σωκράτη λέει τα εξής: "Αυτός εδώ ο Θεόδωρος μας δίδασκε περί τετραγωνικών ριζών, και περί τις τετραγωνικές ρίζες του 3 και 5, αποδεικνύων ότι αυτές δεν είναι σύμμετρες προς την υπόρριζη ποσότητα, και έτσι εξετάζων μια-μια έφθασε μέχρι του 17" (ελεύθερη μετάφραση). Οι αριθμοί αυτοί που ανακαλύφθηκαν απο τους Πυθαγόρειους προκάλεσαν σοβαρή ανησυχία στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά γιατί ανέτρεπαν το μέχρι τότε οικοδόμημά τους που στηρίζονταν στους ρητούς και στους ακέραιους αριθμούς. Έτσι θα έπρεπε να κατασκευαστεί μια νέα θεωρία που να περιέχει και τους άρρητους αριθμούς. Κατά συνέπεια, συμφώνησαν να μείνει μυστική αυτή η ανακάλυφη. Κάποιος όμως μαρτύρησε αυτό το μυστικό με αποτέλεσμα να τον πνίξουν. Μια πρώτη προσπάθεια εισαγωγής των αριθμών αυτών στα μαθηματικά έγινε από τον Εύδοξο, η θεωρία του οποίου σώζεται στο 5ο βιβλίο των "Στοιχείων" του Ευκλείδη. Η θεωρία αυτή όμως εγκαταλείφθηκε το Μεσαίωνα όμως το 16ο αιώνα ξαναδημιουργήθηκαν παρόμοια προβλήματα στους μαθηματικούς. Ο STIFEL το 1544 έγραφε στο έργο του "ARITHMETICA INTEGRA", ότι οι ασύμμετροι αριθμοί είναι αναγκαίο κακό γιατί έχουν πρακτική αξία αλλά δεν είναι αληθινοί. Το 19ο αιώνα έγινε η αξιωματική τους θεμελίωση από τους DEDEKIND και CANTOR των οποίων οι βασικές ιδέες ήταν οι ιδέες του Εύδοξου εκφρασμένες με τη σύγχρονη μαθηματική γλώσσα.

Το Δήλιο πρόβλημα των Ελλήνων μαθηματικών (οι κάτοικοι της Δήλου ρώτησαν το μαντείο με ποιο τρόπο θα γλίτωναν από το λοιμό που μάστιζε την πόλη και το μαντείο τους απάντησε ότι θα έπρεπε να διπλασιάσουν έναν κυβικό βωμό.), ήταν ο διπλασιασμός του κύβου, δηλαδή η εύρεση της πλευράς ενός κύβου του οποίου ο όγκος να είναι διπλάσιος του όγκου ενός κύβου με ακμές μήκους Ι. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα την επινόηση της τρίτης ή κυβικής ρίζας. Σήμερα, το πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ως εξής: Η ακμή ε ενός κύβου όγκου 2 είναι ο αριθμός $\varepsilon=\sqrt[3]{2}$ του οποίου η 3η δύναμη έχει την τιμή 2, $\varepsilon^3=2$. Το να βρούμε αυτόν τον αριθμό είναι εύκολο μόνο σε εξαιρετικές περιπτώσεις π.χ. $\sqrt[3]{8}=2$ γιατί $2^3=8$.

Στο Μεσαίωνα, οι υπολογισμοί με ρίζες αναπτύχθηκαν σταθερά. Τον 9ο αιώνα, οι Ινδοί υποστήριζαν ότι η λύση μίας εξίσωσης 2ου βαθμού και η τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού, έχουν δύο τιμές και ότι η τετραγωνική ρίζα ενός αρνητικού αριθμού δε μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός. Επίσης, μπορούσαν να υπολογίζουν τετραγωνικές και κυβικές ρίζες, προσεγγιστικά.

Στη "Γενική Πραγματεία" του TARTAGLIA, ο οποίος άρχισε το συγγραφικό του έργο το Ι537, περιέχεται ένα πρόβλημα που του προτάθηκε στη Βερόνα το Ι523, ~~του~~ το οποίο δίνει ώθηση να προσθέσει στον προσεγγιστικό τύπο: $\sqrt{a^2+b} \cong a + b/2a$

τον ανάλογο: $\sqrt[3]{a^3+b} \simeq a + \frac{b}{3a(a+1)}$

που δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα όπως φαίνεται και απο το παρακάτω παράδειγμα.

$$\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{3^3+1} = 3 + \frac{1}{9\cdot 4} = 3.027777$$

ενώ με σημερινό μικροϋπολογιστή:

$$\sqrt[3]{28} = 3.036588972$$

Ο CATALDI (1552-1626) επινόησε την εξής διαδικασία εύρεσης ριζών: ο αριθμός N του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε την τετραγωνική ρίζα, τίθεται στη μορφή $N=\alpha^2+\beta$ όπου α^2 είναι το μέγιστο τετράγωνο που περιέχεται στον N, δηλαδή $N=\alpha^2+\beta$ και η διαδικασία είναι η εξής:

$$\sqrt{N}=\sqrt{\alpha^2+b}=\alpha+\cfrac{b}{2\alpha+\cfrac{b}{2\alpha+\cfrac{b}{2\alpha+\cfrac{b}{2\alpha+\dots}}}}$$

π.χ. $$\sqrt{18}=4+\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\dots}}}}$$

Ο BOMBELLI εισήγαγε το σύμβολο R για να συμβολίσει τις ρίζες π.χ. $R.q.49=\sqrt{49}$ όπου το q προέρχεται από τη λέξη QUADRATA, δηλαδή το R.q. συμβολίζει την τετραγωνική ρίζα ενώ το $R.c.9=\sqrt[3]{9}$ όπου το c προέρχεται από τη λέξη CUBICA, δηλαδή το R.c. συμβολίζει την κυβική ρίζα ενός αριθμού. Για την εξαγωγή των τετραγωνικών και κυβικών ριζών ο BOMBELLI επίσης παρατήρησε ότι το τετράγωνο ακέραιου αριθμού δεν λήγει ποτέ σε 2,3,7,8 ενώ οι κύβοι μπορούν να λήγουν σε οποιοδήποτε αριθμό.

Ο MICHAEL STIFEL (1487-1567) έγραψε για τον αριθμητικό υπολογισμό ριζών τάξης μεγαλύτερης του 7. Επέκτεινε τη θεωρία των άρρητων αριθμών του τύπου $\sqrt{\alpha+\sqrt{b}}$ σε εκφράσεις του τύπου $\sqrt[m]{\alpha+\sqrt[n]{b}}$. Βαθμιαία, το σύμβολο της ρίζας απέκτησε τη σημερινή του μορφή ενώ ο CHRISTOFF RUDOLFF (16ος αιώνας) χρησιμοποιούσε τα ακόλουθα σύμβολα: $\sqrt{\ }$ για την τετραγωνική ρίζα $\sqrt[2]{\ }$, το $\sqrt{\ }.\sqrt{\ }\sqrt{\ }$ για την κυβική ρίζα $\sqrt[3]{\ }$ κ.λ.π. Είναι επίσης παραδεκτό, ότι οι ρίζες μπορούν να παρασταθούν σα δυνάμεις με κλασματικούς εκθέτες.

Το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$ καθιερώθηκε την εποχή της Αναγέννησης. Πρίν από την καθιέρωσή του, οι μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν πολλών ειδών σύμβολα. Ο Ολλανδός μαθηματικός S.STEVIN (1548-1620) συμβόλιζε την κυβική ρίζα με ν3α. Το 1629 ο A.GIRARD πρότεινε το σύμβολο $\sqrt[3]{\alpha}$ και το 1690 ο M.ROLLE στο έργο του TRAITE D'ALGEBRE εισήγαγε το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Τελειώνοντας, θα ήταν αξιόλογο να αναφέρουμε τις προόδους που έκαναν οι Κινέζοι, οι Άραβες και οι Πέρσες στην εξαγωγή των ριζών. Δεν ήταν μόνο αντιγραφείς αρχαίων κειμένων αλλά αφού πρώτα έγιναν κάτοχοι των Ελληνικών και των παραδοσιακών τους μεθόδων, κατόρθωσαν να προσφέρουν και νέα αποτελέσματα. Ο Αλ-Καρχί (έζησε μέχρι το 1029 περίπου) έγραψε μια επιμελημένη άλγεβρα στα στοιχεία του Διόφαντου και είχε συγκεντρώσει ενδιαφέρον υλικό για τις ρίζες ακέραιων όπως π.χ. ότι αληθεύουν οι ισότητες: $\sqrt{8}+\sqrt{18}=\sqrt{50}$, $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{16}$

Ο Νασίρ επίσης έκανε σημαντικές έρευνες πάνω στη νέα αριθμητική αντίληψη, που προσέγγιζε σε θεωρία ασύμμετρων.

Μέχρι το 16ο αιώνα, οι απόψεις των μαθηματικών πάνω στις ρίζες δεν είχαν προχωρήσει πολύ πέρα από τα επιτεύγματα των Ελλήνων και των Αράβων, Στίς αρχές του 16ου αιώνα οι Ιταλοί έδειξαν ότι πράγματι ήταν δυνατό να αναπτυχθεί νέα μαθηματική θεωρία που οι αρχαίοι Έλληνες και οι Άραβες είχαν παραλήψει. Οι αρχαίοι Έλληνες δε γνώριζαν τους αρνητικούς αριθμούς γιατί κύρια οι γνώσεις τους προέρχονταν από γεωμετρικά προβλήματα. Στην Ινδία ο λογισμός με αρνητικούς αριθμούς είχε προχωρήσει αλλά δεν έφτασε στην Ευρώπη γιατί οι Άραβες που αποτέλεσαν τη γέφυρα ανάμεσα στην Ινδία και την Ευρώπη αρνιόταν να δεχτούν αρνητικούς αριθμούς.

Έτσι στην Ευρώπη δημιουργήθηκε έντονη προκατάληψη ενάντια στους αρνητικούς αριθμούς με αποτέλεσμα να αποφεύγουν συστηματικά και τις αρνητικές ποσότητες κάτω από ριζικά.

Ο Καρντάνο στο έργο του "Μεγάλη Τέχνη", θεώρησε τους αρνητικούς αριθμούς για την επίλυση της τριτοβάθμιας εξίσωσης και τους ονόμασε "πλασματικούς". Ο Μπομπέλλι στο βιβλίο του ALGEBRA που εκδόθηκε το 1572, χρησιμοποιούσε το σύμβολο R(0m9) όπου το R συμβολίζει τη ρίζα και το το πρόσημο μείον. Έτσι η έκφραση R(0m9) είναι ισοσύναμη με τη σημερινή $\sqrt{-9}$ η οποία όπως ξέρουμε, είναι ο αριθμός $3i$. Ο συμβολισμός αυτός επέτρεψε στον Μπομπέλλι να χρησιμοποιεί τους αρνητικούς αριθμούς σαν υπόρριζες ποσότητες. Έτσι στο βιβλίο που αναφέραμε προηγούμενα βλέπει κανείς για παράδειγμα ότι:

$$\sqrt[3]{52+\sqrt{0-2209}} = 4+\sqrt{0-1}$$

Το περίεργο είναι ότι η πρώτη εισαγωγή των φανταστικών αριθμών, είχε σαν αφετηρία τη θεωρία των τριτοβάθμιων εξισώσεων και μάλιστα την περίπτωση όπου είναι φανερή η ύπαρξη μόνο πραγματικών λύσεων. Στα σημερινά όμως διδακτικά βιβλία την εισαγωγή των φανταστικών αριθμών τη συνδέουμε με τη θεωρία των δευτεροβάθμιων εξισώσεων.

<u>Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α</u>

1. "Συνοπτική ιστορία μαθηματικών" DIRK J.STRUIK
2. "Ιστορία των μαθηματικών" G.LORIA (4 τόμοι)
3. "MATHEMATICS AT A GLANCE" VEB BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT LEIPZIG 1975
4. Μαθηματικά Α΄τάξης Ενιαίου Πολυκλαδικού Λυκείου Μ.ΛΑΜΠΡΟΥ-Α.ΠΑΤΕΡΑΚΗΣ-Γ.ΜΑΡΑΚΗΣ-Γ.ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

Όπως προκύπτει από μια σύγκριση των διδακτικών βιβλίων του προηγούμενου και του σημερινού αιώνα, υπάρχει διαφορά στον τρόπο έκφρασης των ριζών. Συγκεκριμένα, στο Βιβλίο "Στοιχειώδης Άλγεβρα" του Σπ. Μανάρη (1862-3η έκδοση) στη σελίδα 176, αναφέρονται τα εξής:

"Πάσα ρίζα περιττού βαθμού πρέπει να έχει το αυτό σημείο της ποσότητας: $\sqrt[3]{+8\alpha^3} = +2\alpha$

$$\sqrt[3]{-8\alpha^3} = -2\alpha$$

Πάσα ρίζα άρτιου βαθμού θετικής ποσότητας δύναται να έχει αδιαφόρως το + ή το - :

$$\sqrt[4]{81\alpha^4\beta^8} = \pm 3\alpha\beta^2 \text{ "}$$

Έτσι, ο σπουδαστής μάθαινε ότι η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού, μπορεί να πάρει 2 τιμές, μια αρνητική και μια θετική. Ο σπουδαστής αυτός, έχοντας αυτές τις αντιλήψεις, είναι πιθανόν να τις μετέδωσε και σε μεταγενέστερους του.

Στο βιβλίο του ο Χρήστος Α. Μπαρμπαστάθης, ορίζει την τετραγωνική ρίζα να παίρνει 2 τιμές, μια θετική και μια αρνητική. (Άλγεβρα ΟΕΔΒ Αθήνα 1948) Στη σελίδα 114 υπάρχει η εξής παρατήρηση: "Κατά τα ανωτέρω λοιπόν είναι:

(1) $\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = \sqrt[3]{8^2}$

Επειδή δε $\sqrt[3]{8} = 2$, έχομεν $(\sqrt[3]{8})^2 = 4$. Επίσης, επειδή $8^2 = (2^3)^2 = 2^6$, έχομεν $\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 4 = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{2^6}$

(2) $\left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = \sqrt[4]{16^3}$. Αλλά $\sqrt[4]{16} = \pm 2$. Ώστε είναι:

$$\left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = (\pm 2)^3 = \pm 8$$

Εξ άλλου είναι $16^3 = (2^4)^3 = 2^{12}$. Ώστε είναι:

$$\sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = \pm 2^3 = \pm 8$$

(3) $\left(\sqrt[4]{16}\right)^2=\sqrt[4]{16^2}$. Αλλ΄εις το παράδειγμα τούτο, το πρώτον μέλος ισούται με $(\pm 2)^2=4$, ενώ το δεύτερον μέλος ισούται με

$$\sqrt[4]{16^2}=\sqrt[4]{2^8}=\pm 2^2=\pm 4$$

Εκ των ανωτέρω λοιπόν παραδειγμάτων βλέπομεν, ότι η ισότης (Ι) δεν είναι τελεία. Διά να είναι δε τελεία η ισότης αυτή θα υποθέτωμεν τον αριθμόν α πάντοτε θετικόν, και όταν η ρίζα είναι αρτίας τάξεως, οπότε θα έχει δύο τιμές αντίθετες, θα λαμβάνομεν εξ αυτών υπ΄όψιν μόνον την θετικήν ."

Στη σελίδα ΙΙ5 του ίδιου βιβλίου, γίνεται αναφορά στις ρίζες των αρνητικών αριθμών περιττής τάξης. Συγκεκριμένα, γράφονται: "Επειδή $\sqrt[3]{-8}=-2$ και $-\sqrt[3]{8}=-2$

έπεται, ότι $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}$

Ομοίως έχομεν $\sqrt[5]{-16}=-\sqrt[5]{16}$.Ταύτα δε φανερώνουν ότι τας ρίζας των αρνητικών αριθμών περιττής τάξεως δυνάμεθα να τας ανάγωμεν εις ρίζας της αυτής τάξεως των θετικών αριθμών."

Ο μελετητής του συγκεκριμένου βιβλίου, ή έχει αποκομίσει την άποψη ότι οι τετραγωνικές ρίζες είναι θετικές και αρνητικές, ή προσέχοντας την παρατήρηση του συγγραφέα, συγκράτησε ότι η τετραγωνική ρίζα είναι μόνο θετικός αριθμός. Από τα παραπάνω επίσης είναι δύσκολο να καταλάβει κανείς, άν ορίζεται η ρίζα περιττής τάξεως αρνητικού αριθμού ή η αρνητική ρίζα περιττής τάξης της απόλυτης τιμής του παραπάνω αριθμού.

Στο βιβλίο"Αριθμητική" των Π.Τόγκα-Θ.Πάσσα-Ν.Νικολάου (Αθήνα 195Ι ΟΕΣΒ) στο 2ο κεφάλαιο, στη σελίδα 2Ι2 αναφέρεται η έννοια της τετραγωνικής ρίζας αριθμού. Συγκεκριμένα, δίνεται ο εξής ορισμός της τετραγωνικής ρίζας:

""Τετραγωνική ρίζα δοθέντος αριθμού λέγεται ο αριθμός, ο οποίος υψούμενος είς το τετραγωνον δίδει τον δοθέντα." Ούτως η τετραγωνική ρίζα του 49 είναι το 7, διότι $7^2=49$."
Από τον παραπάνω ορισμό απορρέει εύλογα το εξής ερώτημα:
Αν υψώσουμε το -7 στο τετράγωνο παίρνουμε επίσης τον αριθμό 49, συνεπώς γιατί η ρίζα του 49 να είναι μόνο το 7;

Για 50 περίπου χρόνια, από το 1920 μέχρι το 1970 περίπου, διδάσκονταν στις ανώτερες τάξεις του Γυμνασίου, το βιβλίο του Ν.Σακελλαρίου. Στην έκδοση του 1962-63 που έχουμε στη διάθεσή μας στη σελίδα 169, §140 αναφέρονται τα εξής:
" Α)Πας θετικός αριθμός έχει δύο μεν ρίζας άρτιας τάξεως αντιθέτους, μίαν δε περιττής τάξεως (θετικήν)

Διότι αφ΄ενός μεν θετικός ή αρνητικός αριθμός υψούμενος είς άρτιαν δύναμιν δίδει εξαγόμενον θετικόν αριθμόν, ενώ αφ΄ ετέρου μόνον θετικός αριθμός υψούμενος εις περιττήν δύναμιν δίδει εξαγόμενον θετικόν αριθμόν.

Εκ των δύο ριζών μιας αρτίας τάξεως θετικού αριθμού, η θετική συμβολίζεται κατά συνθήκην με το οικείον ριζικόν άνευ πρόσημου, η δε αρνητική με το αυτό ριζικόν έχον αριστερά το πρόσημο (–). Ούτω, αν α είναι θετικός αριθμός, το σύμβολον $\sqrt{\alpha}$ σημαίνει: η θετική τετραγωνική ρίζα του α. Η αρνητική τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με το $-\sqrt{\alpha}$."

΄Οπως φαίνεται από τα παραπάνω, η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού έχει 2 τιμές. Το σύμβολο όμως $\sqrt{\alpha}$ αντιπροσωπεύει μόνο τη θετική τετραγωνική ρίζα του α, αλλά διαβάζεται "τετραγωνική ρίζα του α". ΄Ετσι, το $\sqrt{\alpha}$ και ο όρος τετραγωνική ρίζα έχουν την ίδια ονομασία όχι όμως και την ίδια σημασία.

Συνεπώς, με ένα επιπόλαιο διάβασμα των παραπάνω,(π.χ. διαβάζοντας μόνο τα μαύρα γράμματα-είναι αυτά που στην εργασία αυτή υπογραμίζονται-) μπορεί να προκληθεί σύγχυση.

Στην ίδια σελίδα, αναφέρονται τα εξής:
"Πας αρνητικός αριθμός έχει μόνον μίαν ρίζαν περιττής τάξεως, αρνητικήν, ουδεμίαν δε αρτίας τάξεως.

Διότι μόνον αρνητικός αριθμός υψούμενος εις περιττήν δύναμιν δίδει εξαγόμενον αρνητικόν αριθμόν, ενώ ουδείς εκ των γνωστών αριθμών (θετικός ή αρνητικός) υψούμενος εις δύναμιν άρτιαν δίδει εξαγόμενον αρνητικόν αριθμόν.
Έστω π.χ. η $\sqrt[3]{-8}$. Αυτή είναι -2, διότι είναι $(-2)^3=(-2)(-2)(-2)=-8$. Παρατηρούμε όμως ότι είναι $\sqrt[3]{8}=2$, διότι είναι $2^3=2.2.2=8$
Επομένως έχομεν:

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$$

Από τα παραπάνω, φαίνεται ότι η $\sqrt[3]{-8}$ ορίζεται και ισούται με -2. Στη συνέχεια, δίνεται απλώς ένας δεύτερος τρόπος γραφής της, $-\sqrt[3]{8}$.

Το 1968, στο βιβλίο "Μαθηματικά Β΄Γυμνασίου" των Βαβαλέτσκου-Μπούσγου (Αθήνα 1968), στη σελίδα 116-117 αναφέρονται τα εξής: "Π.χ. του αριθμού 25 μια τετραγωνική ρίζα είναι ο +5

"	"	25	"	"	"	"	ο -5
"	"	-27	"	κυβική	"	"	ο -3

Πας πραγματικός αριθμός α έχει 1)μίαν μονην πραγματικήν νιοστήν ρίζαν χ περιττής τάξεως θετικήν ή αρνητικήν, καθ΄όσον

<u>ο α είναι θετικός ή αρνητικός αντιστοίχως, ήτις καλείται πρωτεύουσα νιοστή ρίζα του α, 2)δύο πραγματικάς ρίζας αντιθέτους άρτιας τάξης αν α>0, εκ των αποίων η θετική καλείται πρωτεύουσα νιοστή ρίζα του α και 3)ουδεμίαν πραγματικήν νιοστήν ρίζαν, αν α<0.</u> Την πρωτεύουσα νιοστήν ρίζαν του α συμβολίζουμε $\sqrt[\nu]{\alpha}$ "

Θα μπορούσε κανείς να παρατηρήσει ότι το συγκεκριμένο βιβλίο δεν έχει ουσιαστικά καμμία διαφορά από το βιβλίο του Π.Σακελλαρίου, παρόλα αυτά με το παράδειγμα που αναφέραμε, και με τον ορισμό που είναι υπογραμμένος παραπάνω(υπενθυμίζουμε ότι η υπογράμμιση σημαίνει, ότι στο βιβλίο τα υπογραμμισθέντα είναι τυπωμένα με μαύρα γράμματα) θα μπορούσε να δημιουργηθεί σύγχυση γιατί στο (I) του ορισμού ορίζονται οι νιοστές ρίζες περιττής τάξης για α∈R, ενώ στο (3) δεν ορίζονται για α αρνητικό. Το πρόβλημα όμως αυτό, ξεδιαλύνεται αρκετά στη σελίδα II7, με την εξής συνόψιση των ιδιοτήτων του συμβόλου $\sqrt[\nu]{\alpha}$:

" I) Αν α>0 και ν ε N, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha}>0$, ρητός ή άρρητος.

2) Αν α<0 και ν=2κ+I,κ ε N, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha}<0$, ρητός ή άρρητος.

3) Αν α∈R και ν=2κ, εκ των ανωτέρω συνάγεται ότι $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=|\alpha|$ εαν δε ν=2κ+I τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=\alpha=(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu$

4) Αν α <0 και ν=2κ, τότε το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$ δεν έχει έννοιαν πραγματικού αριθμού.

5) Εις πάσαν περίπτωσιν ορίζομεν: $\sqrt[\nu]{0}=0$ "

Αυτή η συνόψιση όπως φαίνεται, δεν είναι γραμμένη με μαύρα (υπογραμμισμένα) γράμματα και κατά συνέπεια εντυπωσιάζει λιγότερο από τον ορισμό που προαναφέρθηκε.

Στο βιβλίο "Μαθηματικά Γ΄Γυμνασίου" (Ιος τόμος) των Γ.Μπούσγου-Ι.Ταμβάκλή (ΟΕΔΒ ΑΘΗΝΑ Ι977) στο 4ο κεφάλαιο

εξιδεικεύεται ο ορισμός της νιοστής ρίζας στον ακόλουθο:
" Για κάθε πραγματικό θετικό αριθμό β και για κάθε φυσικό ν υπάρχει ένας, και μόνο ένας, πραγματικός θετικός, έστω α, με την ιδιότητα: η νιοστή δύναμη του α να είναι ο β, δηλαδή με την ιδιότητα: $\alpha^{\nu}=\beta$ και συμβολίζεται $\sqrt[\nu]{\beta}$ "

Στη συνέχεια στη σελίδα 68, γίνεται μια αναφορά στις ρίζες περιττής τάξης αρνητικών αριθμών. Συγκεκριμένα, αυτές ορίζονται ώς εξής: "Για κάθε πραγματικό αρνητικό αριθμό β και για κάθε περιττό φυσικό ν, υπάρχει ένας και μόνον ένας, πραγματικός αρνητικός α, ώστε να ισχύει: $\alpha^{\nu}=\beta$ π.χ. $\sqrt[3]{-8}=-2$ "

Είναι λοιπόν φανερό, ότι το σύμβολο $\sqrt[2k+1]{-\alpha}$, όπου $\alpha>0$, έχει νόημα και δεν τίθεται το πρόβλημα της αντικατάστασής του από το σύμβολο $-\sqrt[2k+1]{\alpha}$, που όπως είπαμε θα μπορούσε να δημιουργήσει ερωτηματικά.

Στα "Μαθηματικά Α΄Λυκείου" του Ενιαίου Πολυκλαδικού Λυκείου που διδάσκεται σήμερα, η έννοια των ριζών τάξης ν πραγματικών αριθμών, δίνεται θεωρώντας δύο περιπτώσεις:

Α) Αν $\alpha>0$, στη σελίδα Ι58 υπάρχει το εξής θεώρημα:
" Αν $\alpha>0$ και $\nu \in N^*$ τότε υπάρχει ένας μοναδικός μη αρνητικός αριθμός χ που επαληθεύει την εξίσωση $\chi^{\nu}=\alpha$ "
ενώ στη σελίδα Ι59, όπου περιέχεται η Β) περίπτωση στην οποία $\alpha<0$, δίνεται το εξής θεώρημα:
"Αν $\alpha<0$ και $\nu \in N^*$ τότε η εξίσωση $\chi^{\nu}=\alpha$
α) έχει ακριβώς μια ρίζα αν ν περιττός
β) είναι αδύνατη αν ν άρτιος "

Έτσι είναι φανερό ότι το σύμβολο $\sqrt[2k+1]{-\alpha}$, όπου $\alpha>0$ ορίζεται. Στη σελίδα όμως Ι60 υπάρχει η παρακάτω συνόψιση:

"Κάθε θετικός αριθμός έχει ακριβώς δύο νιοστές ρίζες άρτιας τάξης που είναι αντίθετοι αριθμοί και μόνο μια ρίζα περιττής τάξης που είναι θετικός αριθμός.
Κάθε αρνητικός αριθμός έχει μια μόνο ρίζα περιττής τάξης αρνητική και δεν έχει καμιά ρίζα άρτιας τάξης."

Ο όρος νιοστή ρίζα άρτιας τάξης μήπως είναι δυνατό να μπερδέψει τον αναγνώστη;

Οι σημερινοί μαθητές της Ιης τάξης των Γενικών Λυκείων έχουν στα χέρια τους, το βιβλίο "Μαθηματικά α΄λυκείου" που τονίζει ότι το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$ έχει νόημα ΜΟΝΟ όταν $\alpha \geq 0$.
Ο ορισμός που δίνει είναι ο ακόλουθος:" Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \geq 0$ υπάρχει ένας μοναδικός $\chi \geq 0$ τέτοιος, ώστε $\chi^{\nu}=\alpha$. Ο <u>μη αρνητικός</u> αυτός αριθμός συμβολίζεται $\sqrt[\nu]{\alpha}$ "

Δηλαδή, δεν υπάρχουν ρίζες αρνητικών αριθμών; Κατά συνέπεια δεν υπάρχουν νιοστές ρίζες που να είναι ίσες με αρνητικούς αριθμούς;

Θα ήταν παράλειψη να μην ασχοληθούμε στην εργασία αυτή με ορισμένα ξενόγλωσσα βιβλία, σύγχρονα με τα διδακτικά βιβλία που αναφέραμε παραπάνω, διότι όπως είναι γνωστό, τα ελληνικά βιβλία δέχονται επιρροές από ξενόγλωσσα.

Έτσι, στο βιβλίο "ELEMENTARY ALGEBRA" των D.K. FADDEYEV AND SOMINKII (Ιη έκδοση-1965) στη σελίδα 209 αναφέρεται ο εξής ορισμός της τετραγωνικής ρίζας:

"Η νιοστή ρίζα ενός αριθμού είναι ένας αριθμός χ του οποίου η νιοστή δύναμη ισούται με το α. π.χ. το 2 είναι η 5ης τάξης ρίζα του 32 αφού $2^5=32$. Όταν ν=2 τότε η ρίζα καλείται τετραγωνική και όταν ν=3, τότε καλείται κυβική ρίζα. Ο υπολογισμός της ρίζας είναι η αντίστροφη πράξη της ύψωσης σε μια δύναμη. Η νιοστή ρίζα ενός αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ "

Από τα παραπάνω μπορεί κανείς να **αναρωτηθεί και** πάλι όπως και στην περίπτωση της έκθεσης του ορισμού της ρίζας των Τόγκα-Πασσα-Νικολάου, **άν η** τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού μπορεί να είναι ίση και με έναν αρνητικό αριθμό.(δηλ. $\sqrt{4}=\pm 2$)

Στην ίδια σελίδα, στις ασκήσεις που ακολουθούν, ζητείται ο υπολογισμός της $\sqrt{4}$, και στις απαντήσεις των ασκήσεων δίνεται σαν απάντηση η τιμή 2. Γιατί, σύμφωνα με τα παραπάνω να μην δίνεται και η τιμή -2;

Στη συνέχεια, στη σελίδα 226-227, υπάρχει το εξής θεώρημα: "Μια ρίζα περιττής τάξης ενός αρνητικού αριθμού δεν έχει περισσότερες **από** μια τιμές και αυτή είναι μόνο αρνητική. Έτσι, $\sqrt[3]{-27}=-3$. "

Από το θεώρημα αυτό, αμέσως καταλαβαίνει κανείς, ότι οι νιοστές ρίζες περιττής τάξεως αρνητικών αριθμών ο ίσονται και είναι ίσες πάντα με κάποιον αρνητικό αριθμό.

Στη συνέχεια, συναντά κανείς το θεώρημα: "Εαν υπάρχει μια τιμή της ρίζας άρτιας τάξης ενός θετικού αριθμού τότε υπάρχει ακόμη μία και μόνο μία τιμή η οποία διαφέρει από την πρώτη μόνο στο πρόσημό της. Έτσι η $\sqrt[4]{16}$ έχει δύο τιμές, τις 2 και -2 αφού $2^4=(-2)^4=16$. " Είναι λοιπόν φανερό ότι η ρίζα άρτιας τάξης ενός θετικού αριθμού έχει δύο τιμές, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα. Γίνεται, επομένως, σύγχιση ανάμεσα στον όρο "τετραγωνική ρίζα" και στο σύμβολο $\sqrt{}$.

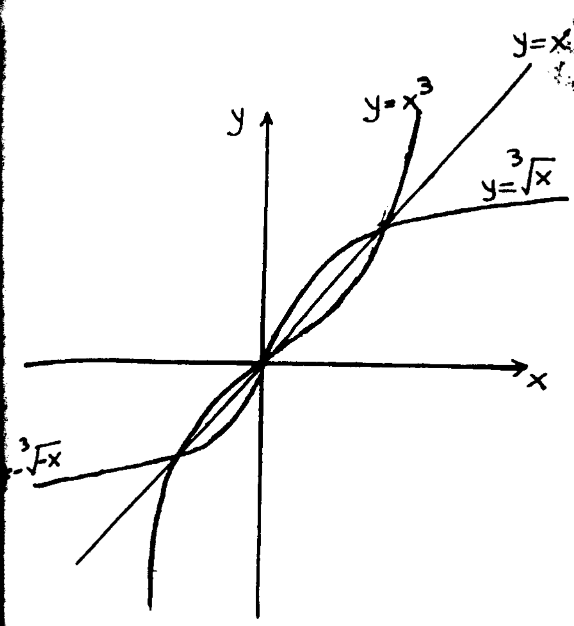
Στην "ALGEBRA" των JONSON-LENDSEY-SLESNICK (SECONDARY MATHEMATICS SERIES-1967), διαβάζουμε:

"Κάθε θετικός πραγματικός αριθμός έχει δύο τετραγωνικές ρίζες, καθεμιά απ'αυτές είναι η αντίθετη ή η αρνητική της άλλης. Για παράδειγμα, το 49 έχει 2 τετραγωνικές ρίζες το 7 και το -7. Το σύμβολο $\sqrt{}$ χρησιμοποιείται για να εκφράσει την μη-αρνητική τετραγωνική ρίζα του αριθμού. Έτσι $\sqrt{4}=2$ ενώ $-\sqrt{4}=-2$. " Τα συμπεράσματα που βγαίνουν από τα παραπάνω, είναι ότι ο όρος τετραγωνική ρίζα και το σύμβολο $\sqrt{}$ δεν έχουν ακριβώς την ίδια σημασία, όπως προέκυψε και από μερικά από τα ελληνικά διδακτικά βιβλία. Από τη σελίδα 459 του ίδιου βιβλίου, καταλαβαίνει κανείς ότι οι ρίζες περιττής τάξεως αρνητικών αριθμών, ορίζονται όπως φαίνεται από το ακόλουθο: "Για κάθε ακέραιο ν>1, κάθε θετικός πραγματικός αριθμός α έχει μια μοναδική νιοστή ρίζα. Αν ο ν είναι αρνητικός έχει μια μοναδική αρνητική νιοστή ρίζα. Π.χ. $\sqrt[3]{125}=5$ και $\sqrt[3]{-125}=-5$. "

Στο γερμανικό MATHEMATICS AT A GLANCE (VEB BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT LEIPZIG-1975) στη σελίδα 5I, υπάρχουν οι εξής ορισμοί: "Η τετραγωνική ρίζα ενός μη-αρνητικού αριθμού α ορίζεται σαν τον μη-αρνητικό αριθμό χ του οποίου το τετράγωνο είναι το α: $\chi^2=\alpha$." Συνεπώς $\sqrt[4]{16}=2$ και όχι ± 2"

"Η νιοστή ρίζα ενός μη-αρνητικού αριθμού β είναι η μη-αρνητικός αριθμός α του οποίου η νιοστή δύναμη έχει την τιμή β: $\alpha^\nu=\beta$. Η εξίσωση $\chi^2=4$ έχει 2 λύσεις, τη $\chi=2$ και $\chi=-2$ Η ρίζα $\sqrt[\nu]{\beta}=\alpha$ είναι μοναδικά ορισμένη. Για άρτιο ν οι δύο λύσεις της εξίσωσης $\chi^\nu=\beta$ έχουν διαφορετικό πρόσημο. Η εξίσωση $\chi^3=-8$ έχει τη λύση $\chi=-2$. Αφού στον ορισμό υποθέσαμε ότι το υπόρριζο πρέπει να έιναι αριθμός μη-αρνητικός, μπορούμε να θέσουμε $\chi=-\sqrt[3]{-(-8)}=-\sqrt[3]{8}$. Ακολούθως, σ συμβολισμός $\chi=\sqrt[3]{-8}$ χρησιμοποιείται για τη λύση της $\chi^3=-8$ και έτσι συμφωνούμε σιωπηλά το εξής: Για περιττό ν, η ρίζα ενός αρνητικού αριθμού είναι η αντίθετη της ρίζας της απόλυτης τιμής του. " Από τα παραπάνω, φαίνεται αμέσως ότι οι αρνητικοί αριθμοί δε μπορούν να παίζουν το ρόλο υπόρριζων ποσοτήτων σε καμμία περίπτωση. Στη συνέχεια όμως, στη σελίδα I3I, αναφέρονται τα επόμενα για τη συνάρτηση $F(\chi)=\sqrt[3]{\chi}$:

"Αρχικά, αυτή η συνάρτηση επίσης ορίζεται μόνο για μη-αρνητικούς αριθμούς. Στο πεδίο ορισμού $0\leq \chi<+\infty$, είναι η αντίστροφη της συνάρτησης $Y=\chi^3$ με $Y\geq 0$, απ΄όπου και $\chi\geq 0$. Το διάγραμμά της, μπορεί επίσης να σχεδιαστεί παίρνοντας το συμμετρικό της μισής παραβολής $Y=\chi^3$ με $\chi\ \varepsilon[0,+\infty)$ ως προς την ευθεία $Y=\chi$. Απ΄την άλλη μεριά, η αντίστροφη συνάρτηση της $Y=\chi^3$ με $Y<0$ απ΄όπου και $\chi<0$ περιγράφεται από την εξίσωση:



$Y=-\sqrt[3]{(-\chi)}$ στο πεδίο ορισμού $(-\infty, 0)$ Συνεπώς, δύο εξισώσεις χρειάζονται για να περιγράψουμε την αντίστροφη της $Y=\chi^3$ η οποία πρέπει να υπάρχει γιατί η $Y=\chi^3$ είναι συνάρτηση "ένα με ένα". Αλλά, τα δύο μέρη συχνά συνοψίζονται στην απλή έκφραση $Y=\sqrt[3]{\chi}$, όπου το χ είναι οποιοσδήποτε πραγματικός.

Συνεπώς, όι ρίζες περιττής τάξεως αρνητικών αριθμών δεν ορίζονται ενώ η συνάρτηση $F(\chi)=\sqrt[3]{\chi}$ ορίζεται και για $\chi<0$; Πρέπει, λοιπόν, την ίδια έννοια να τη χωρίζουμε σε δύο περιπτώσεις, και όχι να την αντιμετωπίζουμε με καθολικό τρόπο;;;

Στην έκδοση του 1976 του βιβλίου MATHEMATICS FOR TECHNICAL EDUCATION των DALE EWEN και MICHAEL A.TOPPER (NEW JERSEY-1976), η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού, π.χ. του 36 αποδεικνύεται ότι είναι το +6 κι όχι το ±6, με τον εξής έξυπνο τρόπο:

"Από την αρχή της αντικατάστασης, ξέρουμε ότι:
αν P=Q και P=R, τότε και Q=R. Εφαρμόζοντας αυτή την αρχή στη $\sqrt{36}=6$ και στη $\sqrt{36}=-6$, τότε πρέπει να δεχτούμε ότι 6=-6, πράγμα άτοπο. Από ταπαραπάνω, μπορούμε να ορίσουμε την τετραγωνική ρίζα ενός <u>μη-αρνητικού</u> αριθμού α (γράφοντας $\sqrt{\alpha}$), σαν εκείνο τον μη-αρνητικό αριθμό, ο οποίος αν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του να μας δίνει τον αριθμό α."

Η ρίζα $\sqrt[2k+1]{\alpha}$ δεν παρουσιάζει προβλήματα ότα $\alpha<0$, όπως φαίνεται από την παρακάτω σημείωση του ίδιου βιβλίου:

" Παράδειγμα 8. Απλοποιείστε κάθε μια από τις παρακάτω κυβικές ρίζες:

$\sqrt[3]{-125}=-5$ γιατί $(-5)(-5)(-5)=-125$

$\sqrt[3]{-27}=-3$ " $(-3)(-3)(-3)=-27$ κ.λ.π.

Σημειώστε ότι μια αρνητική ποσότητα κάτω από ριζικό δεν παρουσιάζει πρόβλημα για τις κυβικές ρίζες. "

ΤΕΣΤ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΣΕ ΦΟΙΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ Α.Π.Θ.

Σε 36 φοιτητές του Μαθηματικού τμήματος του Α.Π.Θ. δόθηκε το παρακάτω τεστ κατανόησης:

1. Δώστε έναν ορισμό της $\sqrt[\nu]{\alpha}$
2. (a) Υπολογίστε την $\sqrt{16}$
   (b) Υπολογίστε (αν υπάρχει) την $\sqrt[3]{-8}$
3. Ποιο το πεδίο ορισμού της $f(x)=\sqrt[3]{x}$

Οι ορισμοί που δόθηκαν στην (1) ερώτηση μπορούν να συνοψιστούν στον ακόλουθο:
" Νιοστή ρίζα ενός αριθμού α είναι εκείνος ο αριθμός x που αν υψωθεί στη νιοστή δύναμη, μας δίνει το α".

Βέβαια, θα πρέπει να αναφέρουμε και τις 5 περιπτώσεις που απάντησαν ως εξής:
" Η $\sqrt[\nu]{\alpha}$, (i) όταν $\nu=2\kappa$ (δηλ. ν: άρτιος) τότε ορίζεται όταν $\alpha\geq 0$ (ii) όταν $\nu=2\kappa+1$ (δηλ. ν: περιττός) τότε ορίζεται όταν $\alpha\in\mathbb{R}$, είναι εκείνος ο αριθμός x, ο οποίος αν υψωθεί στη νιοστή δύναμη, μας δίνει το α."

Κατά παράδοξο τρόπο, υπάρχουν 2 φοιτητές που δήλωσαν ότι δε γνωρίζουν τον ορισμό της νιοστής ρίζας του α.

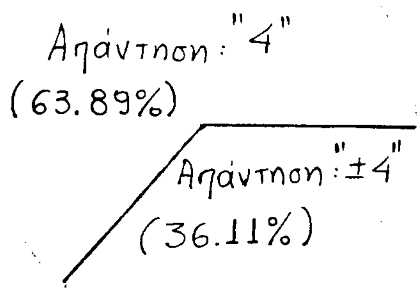
Βέβαια, θα πρέπει να καταλογίσουμε το ελαφρυντικό πιθανών γλωσσικών προβλημάτων.

Οι δύο επόμενες ερωτήσεις μας προκαλούν μεγαλύτερο ενδιαφέρον γι' αυτό, στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε εκτενέστερα μ' αυτές.

2η ερώτηση.

(α) Υπολογίστε την $\sqrt{16}$.

Από τους 36 φοιτητές, οι 23 απάντησαν: "4" και οι υπόλοιποι 13 απάντησαν: "± 4".
Τα αποτελέσματα αυτά, παριστάνονται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα:



Κυκλικό διάγραμμα (1)

Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι η διάσταση απόψεων είναι αρκετά μεγάλη.

Η πραγματική αναλογία, αυτών που δίνουν την απάντηση: "4", υπολογίζεται ως εξής:

$x = 23$	$\hat{p} = 0.6389$	$z_{a/2} = 1.96$
$n = 36$	$\alpha = 0.05$	$z_{a/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.1569$

Συνεπώς, ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης είναι το εξής:
δ.ε: (0.48199 , 0.795789),
δηλαδή, μπορούμε να πούμε, με 95% σιγουριά, ότι η πραγματική αναλογία αυτών που απαντούν: "4" σ' ολόκληρο τον πληθυσμό της Ελλάδας (φοιτητές Μαθηματικού τμήματος) είναι: Από 48,199% μέχρι 79.5789%.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο βρίσκουμε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης, γι' αυτούς που δίνουν την απάντηση: "±4":
δ.ε.: (0.204211 , 0.518),
δηλαδή, μπορούμε να πούμε, με 95% σιγουριά, ότι η πραγματική αναλογία αυτών που απαντούν: "±4" σ' ολόκληρο τον πληθυσμό είναι:

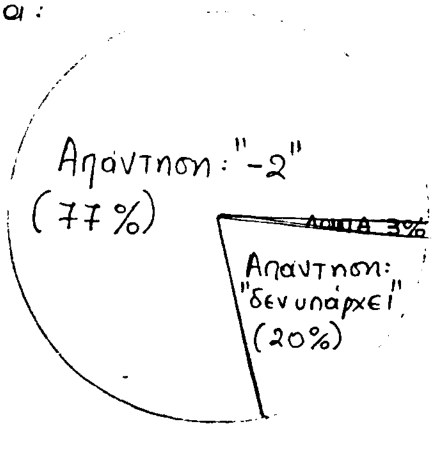
Από 20.4211% μέχρι 51.8%.

Όπως φαίνεται, από τα παραπάνω, καμμία από τις δύο αναλογίες δεν είναι αμελητέα.

(b) Υπολογίστε την $\sqrt[3]{-8}$.

Από τους 36 φοιτητές, οι 28 απάντησαν: "-2", και οι 7 απάντησαν: "δεν υπάρχει" ενώ υπήρχε και μια εντελώς λανθασμένη απάντηση (: 2i)

Τα αποτελέσματα αυτά, παριστάνονται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα:



Κυκλικό διάγραμμα (2)

Παρατήρηση: Η διάσταση απόψεων δεν είναι πολύ μεγάλη αλλά καθόλου αμελητέα.

Ένα διάστημα εμπιστοσύνης είναι το εξής:

δ.ε. (0.6419 , 0.9135),

δηλαδή, μπορούμε να πούμε, με 95% σιγουριά, ότι η πραγματική αναλογία των φοιτητών που απαντούν: "-2" είναι: Από 64.19% μέχρι 91.35%.

Το διάστημα εμπιστοσύνης, γι' αυτούς που δίναν την απάντηση: "δεν υπάρχει" είναι:

δ.ε. (0.06515 , 0.323726)

Δηλαδή, η πραγματική αναλογία των φοιτητών που απαντούν: "δεν υπάρχει" είναι:

Από 6.515% μέχρι 32.3726% .

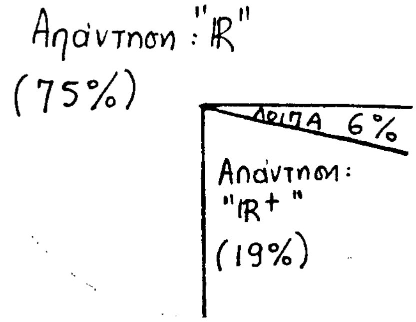
Όπως φαίνεται, από τα παραπάνω διαστήματα εμπιστοσύνης, είναι πιο πιθανό ένας φοιτητής κάποιου Μαθηματικού τμήματος, να δώσει την απάντηση: "-2".

3η ερώτηση

"Ποιο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt[3]{x}$ "

Από τους 36 φοιτητές, οι 27 απάντησαν: "$\mathbb{R}$", οι 7 απάντησαν: "$\mathbb{R}^+$" και οι 2 έδωσαν εντελώς λανθασμένη απάντηση.

Τα αποτελέσματα αυτά, παριστάνονται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα:



Κυκλικό διάγραμμα (3)

Παρατήρηση: Η διάσταση απόψεων δεν είναι επίσης πολύ μεγάλη και καθόλου αμελητέα.

Ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης είναι το εξής:

δ.ε. (0.06515879 , 0.32373)

Συνεπώς, μπορούμε να πούμε με 95% σιγουριά, ότι, η πραγματική αναλογία στον πληθυσμό είναι:

Από 6.515879% μέχρι 32.373%, γι' αυτούς που δίνουν την απάντηση: "$\mathbb{R}^+$", ενώ το 95% διάστημα εμπιστοσύνης, γι' αυτούς που δίνουν την απάντηση: "$\mathbb{R}$" είναι:

δ.ε. (0.608549 , 0.89145)

δηλαδή η πραγματική αναλογία είναι:

Από 60.8549% μέχρι 89.145%.

Και πάλι μπορεί να συμπεράνει κανείς, ότι είναι πιο πιθανό ένας φοιτητής να δώσει την απάντηση: "$\mathbb{R}$".

Οι ερωτήσεις 2(β) & (3), είναι φανερό, ότι συνδέονται στενά μεταξύ τους.

Έτσι θεωρήσαμε αναγκαίο, να υπολογίσουμε το συντελεστή εμπειρικής συσχέτισης των απαντήσεων των φοιτητών στις δύο αυτές ερωτήσεις.

Έστω ότι τις απαντήσεις των ερωτήσεων 2(b) και 3 τις χωρίζουμε ως εξής:

$$2(b):\quad X = \begin{cases} 0 & \text{αν ο φοιτητής έδωσε την απάντηση: "Δεν υπάρχει"} \\ 1 & \text{-//- -//- -//- -//- -//- -//- : "}-2\text{"} \end{cases}$$

$$3:\quad Y = \begin{cases} 0 & \text{αν ο φοιτητής έδωσε την απάντηση: "}\mathbb{R}^+\text{"} \\ 1 & \text{-//- -//- -//- -//- -//- -//- : "}\mathbb{R}\text{"} \end{cases}$$

Στο δείγμα των 36 φοιτητών είχαμε τον εξής συνδυασμό απαντήσεων:

X	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
Y	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1

X	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
Y	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1

Πίνακας (1)

Οι 3 από τους 36 φοιτητές, δεν έδωσαν έναν από τους παραπάνω συνδυασμούς, γι' αυτό υποθέτουμε στη γραμμική παλινδρόμηση ότι το δείγμα μας αποτελείται από τους 33 φοιτητές που έδωσαν τους συνδυασμούς του πίνακα (1).

$$\sum_{i=1}^{33} y_i = n\cdot\alpha + b\sum_{i=1}^{33} x_i \Rightarrow 33\alpha + 26b = 27 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{33} x_i y_i = \alpha\sum_{i=1}^{33} x_i + b\sum_{i=1}^{33} x_i^2 \Rightarrow 26\alpha + 26b = 26 \quad (2)$$

Από το σύστημα των σχέσεων (1) και (2)

βρίσκουμε: $\alpha = \frac{1}{7}$ και $b = \frac{6}{7}$. Άρα $\hat{y} = \frac{1}{7} + \frac{6}{7}x$.

Είναι φανερή η συσχέτιση των απαντήσεων στις ερωτήσεις 2(b) και 3, αλλά αυτό φαίνεται και από την παρακάτω μαθηματική απόδειξη:

$H_0 : b = \emptyset$ (Υποθέτουμε δηλαδή ότι δεν υπάρχει σχέση μεταξύ τους)

Ισχύει: $\frac{b}{S_\beta} > t_{31;0.025}$ γιατί

$\frac{b}{S_\beta} = 12.1$ και $t_{31;0.025} = 1.96$.

Άρα, η υπόθεση H_0 απορρίπτεται με σιγουριά 95%. Συνεπώς, οι απαντήσεις των φοιτητών σ' αυτές τις ερωτήσεις έχουν σχέση.

Πόσο μεγάλη είναι αυτή η σχέση, μας το δείχνει ο συντελεστής εμπειρικής συσχέτισης r:

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} \quad \text{όπου} \quad S_{xy} = \frac{26 - 33 \cdot \frac{26}{33} \cdot \frac{27}{33}}{32} = 0.14772727$$

$$S_x^2 = \frac{26 - 33\,\frac{26^2}{33^2}}{32} = 0.172348484$$

$$S_y^2 = \frac{27 - 33\,\frac{27^2}{33^2}}{32} = 0.1534$$

Συνεπώς: $S_x = 0.415148749$

$S_y = 0.39166312$

Άρα $r = 0.90854$. Άρα έχουμε υψηλή θετική συσχέτιση.

ΤΕΣΤ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΛΥΚΕΙΟΥ.

Σε 245 μαθητές Λυκείου δόθηκε το παρακάτω τεστ:

ΔΙΑΛΕΞΤΕ ΤΗ ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. $\sqrt{16}$
   - ☐ 4
   - ☐ ±4
   - ☐ −4

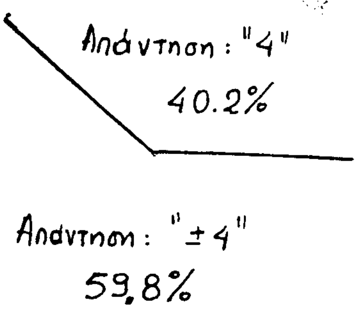
2. $\sqrt[3]{-8}$
   - ☐ 2
   - ☐ ±2
   - ☐ Δεν ορίζεται
   - ☐ −2

3. Ποιο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt[3]{x}$
   - ☐ $\mathbb{R}^+$
   - ☐ $\mathbb{R}$

Οι μαθητές της Α' Λυκείου, που ήταν 112, απάντησαν στις παραπάνω ερωτήσεις ως εξής:

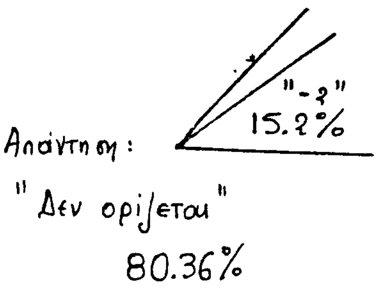
1η ερώτηση: Οι 45 από τους 112 μαθητές, έδωσαν την απάντηση: "4", ενώ οι υπόλοιποι 67 απάντησαν: "±4".

Τα αποτελέσματα αυτά, παριστάνονται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα:

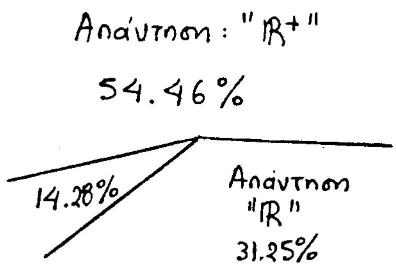


Βάση λοιπόν της εξίσωσης $x^2=16$, και όχι βάση του συμβόλου $\sqrt{16}$, το μεγαλύτερο ποσοστό δίνει τη λανθασμένη απάντηση: "±4" αντί της "4".

2η ερώτηση: Οι 17 από τους 112 μαθητές, δίνουν την απάντηση: "−2" ενώ 90 απ' αυτούς απαντούν "Δεν ορίζεται".



3η ερώτηση: Οι 61 από τους 112 μαθητές, απαντούν "$\mathbb{R}^+$" και οι 35 απαντούν "$\mathbb{R}$"



Τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης είναι:

1η ερώτηση:

Απάντηση: "±4" : (0.507417 , 0.689)
Απάντηση: "4" : (0.311 , 0.4926)

2η ερώτηση

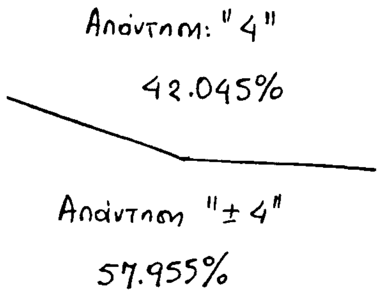
Απάντηση: "-2" : (0.08533 , 0.21824)
Απάντηση: "Δεν ορίζεται" : (0.72999 , 0.87715)

3η ερώτηση

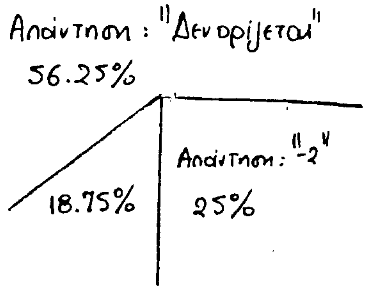
Απάντηση: "$\mathbb{R}^+$" : (0.4524 , 0.63687)
Απάντηση: "$\mathbb{R}$" : (0.2266 , 0.39834)

Οι 88 μαθητές της Β' Λυκείου, που ερωτήθηκαν έδωσαν τα εξής αποτελέσματα:

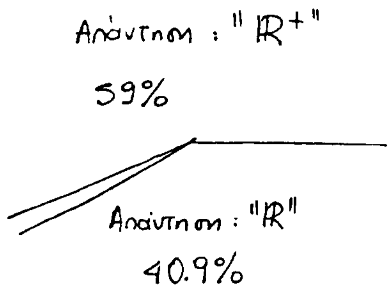
1η ερώτηση:	37	μαθητές	απάντησαν	: "4"
	51	-//-	-//-	: "±4"
2η ερώτηση:	22	-//-	-//-	: "-2"
	63	-//-	-//-	: "Δεν ορίζεται"
3η ερώτηση:	52	-//-	-//-	: "$\mathbb{R}^+$"
	36	-//-	-//-	: "$\mathbb{R}$"



1η ερώτηση



2η ερώτηση



3η ερώτηση

Τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης για τη Β΄ Λυκείου είναι:

1η ερώτηση:

1η ερώτηση:	Απάντηση : "±4"	95% δ.ε.	: (0.4764 , 0.6827)
	-//- : "4"	-//-	: (0.3173 , 0.5236)
2η ερώτηση:	-//- : "-2"	-//-	: (0.1595 , 0.34)
	-//- : "Δεν ορίζεται"	-//-	: (0.3063 , 0.5118)
3η ερώτηση:	-//- : "$\mathbb{R}^+$"	-//-	: (0.48818 , 0.6936)
	-//- : "$\mathbb{R}$"	-//-	: (0.30636 , 0.512)

Τέλος οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου (Α΄ και Δ΄ δέσμη) απάντησαν ως εξής:

1η ερώτηση :	24	από τους 45 μαθητές απάντησαν	: "±4"
	21	-//- -//- -//- -//- -//-	: "4"
2η ερώτηση :	19	-//- -//- -//- -//- -//-	: "-2"
	25	-//- -//- -//- -//- -//-	: "Δεν ορίζεται"
3η ερώτηση :	28	-//- -//- -//- -//- -//-	: "$\mathbb{R}^+$"
	17	-//- -//- -//- -//- -//-	: "$\mathbb{R}$"

Απάντηση : "±4"
53.33%

Απάντηση : "4"
46.67%

1η ερώτηση

Απάντηση : "Δεν ορίζεται"
55.55%

Απάντηση : "-2"
42.22%

2η ερώτηση

Απάντηση : "$\mathbb{R}^+$"
62.23%

Απάντηση : "$\mathbb{R}$"
37.77%

3η ερώτηση

Τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης για τη Γ' Λυκείου είναι:

1η ερώτηση : Απάντηση "±4" : (0.3875, 0.679)
-//- "4" : (0.321 , 0.6125)
2η ερώτηση : -//- "Δεν ορίζεται" : (0.4103, 0.7007)
-//- "−2" : (0.2779, 0.5665)
3η ερώτηση : -//- "$\mathbb{R}^+$" : (0.4806, 0.764)
-//- "$\mathbb{R}$" : (0.236 , 0.5194)

Τέλος, θα ήταν χρήσιμο να εξετάσουμε αν οι απαντήσεις οι οποίες δόθηκαν σε κάθε μια από τις 3 ερωτήσεις, έχουν σχέση με την τάξη στην οποία βρίσκεται ένας μαθητής.

Δοκιμασία X^2 για την 1η ερώτηση.

Απάντηση / Τάξη	4	±4	Σύνολο
Α' Λυκείου	45 (47.086)	67 (64.914)	112
Β' Λυκείου	37 (36.996)	51 (51.004)	88
Γ' Λυκείου	21 (18.918)	24 (26.082)	45
Σύνολο	103	142	245

$X^2 = 0.0924 + 0.067 + 4.325 \cdot 10^{-7} + 3.137 \cdot 10^{-7} + 0.229 + 0.166 \cong 0.554776$

$X^2_{2;0.05} = 5.99147$ Άρα $X^2 < X^2_{2;0.05}$

Συνεπώς, οι απαντήσεις που δίνονται στην 1η ερώτηση είναι ανεξάρτητες από την τάξη στην οποία βρίσκονται οι μαθητές.

Δοκιμασία X^2 για τη 2η ερώτηση

Απάντηση / Τάξη	-2	Δεν ορίζεται	Διάφορες απαντήσεις	Σύνολο
Α' Λυκείου	17(26.514)	90(81.371)	5 (4.114)	112
Β' Λυκείου	22 (20.833)	63(63.935)	3 (3.237)	88
Γ' Λυκείου	19(10.653)	25(32.694)	1 (1.653)	45
Σύνολο	58	178	9	245

$X^2 = 3.4139 + 0.915 + 0.1908 + 0.0654 + 0.01367 + 0.01735 + 6.54 + 1.81 + 0.258 \cong 13.225$

$X^2_{4;0.05} = 9.48773$ Άρα $X^2 > X^2_{4;0.05}$.

Άρα, υπάρχει σχέση ανάμεσα στις απαντήσεις που δίνονται στην 2η ερώτηση και στην τάξη στην οποία βρίσκεται ο μαθητής.

Οι μαθητές της 1ης Λυκείου, πιθανόν επηρεασμένοι από τον ορισμό της νιοστής ρίζας ο οποίος δίνεται στο διδακτικό βιβλίο της Α' Λυκείου, δίνουν, οι περισσότεροι, την απάντηση "Δεν ορίζεται". Το ίδιο συμβαίνει και στους μαθητές της Β' Λυκείου.

Αντίθετα, οι μαθητές της Γ' Λυκείου δίνουν καί τις 2 απαντήσεις χωρίς μεγάλη ποσοστιαία διαφορά.

Δοκιμασία X^2 για την 3η ερώτηση

Απάντηση / Τάξη	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	Διάφορες απαντήσεις (κενό)	Σύνολο
Α' Λυκείου	61(64.457)	35(40.2286)	16(7.314)	112
Β Λυκείου	52(50.645)	36(31.608)	0(5.747)	88
Γ' Λυκείου	28(25.898)	17(16.163)	0(2.9388)	45
Σύνολο	141	88	16	245

$X^2 = 0.1854 + 0.6796 + 10.315 + 0.03625 + 0.6103 + 5.747 + 0.1706 + 0.043 + 2.9388 \Rightarrow$
$\Rightarrow X^2 \cong 20.72665$

$X^2_{4;0.05} = 9.48773$. Άρα $X^2 > X^2_{4;0.05}$

Άρα υπάρχει σχέση ανάμεσα στις απαντήσεις που δίνονται στη 3η ερώτηση και στην τάξη στην οποία βρίσκεται ο μαθητής.

Οι μαθητές της Β' και Γ' Λυκείου, γνωρίζουν πολύ καλά τί είναι το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης και ιδιαίτερα μιας συνάρτησης που περιέχει ριζικό, σε αντίθεση με τους μαθητές της Α' Λυκείου, που διδάχτηκαν τις ρίζες των πραγματικών αριθμών αφού πρώτα είχαν διδαχτεί το κεφάλαιο των συναρτήσεων. Κατά συνέπεια, οι απαντήσεις των δευτέρων, είναι λιγότερο έγκυρες.
Άλλωστε, 16 από τους 112 μαθητές, δεν απάντησαν σ' αυτή την ερώτηση (ποσοστό: 14.3%)

ΑΠΟΨΕΙΣ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Από τις οδηγίες του Κ.Ε.Μ.Ε.:

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
Να διατεθούν μέχρι 12 διδακτικές ώρες.

1) Οι έννοιες που είναι γνωστές από τις προηγούμενες τάξεις (κυρίως των παραγρ. 5.1 - 5.11) να παρουσιαστούν με συντομία.

Σκόπιμο είναι στην αρχή της παραγρ. 5.4 να γίνει μια σύντομη επανάληψη του ορισμού της συνάρτησης (βλ. Μαθηματικά Β΄ Λυκείου § 1.1).

Ειδικότερα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με $f(x) = \sqrt[\nu]{\varphi(x)}$ είναι το $A = \{x \in R: \varphi(x) \geq 0\}$, είτε το ν είναι άρτιος είτε περιττός. (Βλ. Μαθηματικά Α΄ Λυκείου).

Με την ευκαιρία θυμίζουμε ότι το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\ }$ το χρησιμοποιούμε με υπόρριζο μη αρνητικό (π.χ. για την κυβική ρίζα του -2 προτιμούμε τη γραφή $-\sqrt[3]{2}$ αντί του $\sqrt[3]{-2}$. Και τούτο για να μπορούμε να χρησιμοποιούμε τους κανόνες λογισμού των δυνάμεων χωρίς φόβο να κάνουμε λάθος. Αντίθετα αν π.χ. γράφουμε $\sqrt[3]{-1} = (-1)^{1/3}$, επειδή $1/3 = 2/6$ θα έχουμε: $(-1)^{1/3} = (-1)^{2/6}$, δηλαδή $-1 = 1$!

Με βάση τα προηγούμενα, για τη συνάρτηση $\varphi: R \to R$ που σε κάθε $x \in R$ αντιστοιχίζει την κυβική του ρίζα, έχουμε:

$$\varphi^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{αν } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{|x|}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

2) Στην § 5.18 να γίνουν οπωσδήποτε οι ασκήσεις 30 και 31.

Το παραπάνω κείμενο, αναγκάζοντας του καθηγητές Μ.Ε. να διδάξουν το συγκεκριμένο θέμα με έναν καινούργιο τρόπο, έφερε ζωηρές αντιδράσεις.

Έτσι, ενώ πρίν από 3 περίπου χρόνια, όλοι δίδασκαν ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $F(\chi) = \sqrt[2k+1]{\chi}$ είναι όλο το R, το παραπάνω κείμενο τους προτείνει (ουσιαστικά τους αναγκάζει) να διδάσκουν σαν πεδίο ορισμού της συνάρτησης F το R^+. Δημιουργήθηκε λοιπόν, έντονη διχογνωμία για το άν είναι σωστό να διδαχθεί με τον τρόπο που προτείνει το Κ.Ε.Μ.Ε.

Η συλλογιστική: $\sqrt[3]{-1} = (-1)^{1/3} = (-1)^{2/6} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1$ παρανοήθηκε από αρκετούς καθηγητές Μ.Ε., οι οποίοι δεν πρόσεξαν ότι <u>δεν</u> ισχύει: $\sqrt[3]{-1} = (-1)^{1/3}$ διότι το -1 δεν είναι θετικός αριθμός. Κατά συνέπεια, θεώρησαν τη συλλογιστική αυτή σωστή και πείστηκαν ότι η $\sqrt[2k+1]{x}$, $x<0$ δεν υπάρχει.

Συγκεκριμένα, κάποιος καθηγητής μας είπε ότι η $\sqrt[3]{-8}$ δεν ορίζεται, επηρεασμένος φανερά από την απόδειξη του Κ.Ε.Μ.Ε. ενώ αρνείται να δεχτεί ότι η συνάρτηση $F(\chi)=\sqrt[2\kappa+1]{\chi}$ έχει πεδίο ορισμού το R^+!!! Έτσι, αποφάσισε να ακολουθήσει την εξής τακτική: Στην Α΄και Β΄Λυκείου να διδάσκει ότι όλα τα ριζικά πρέπει να έχουν υπόρριζο μεγαλύτερο ή ίσο με το μηδέν, ενώ στη Γ΄Λυκείου ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης F είναι όλο το R!!!

Δύο καθηγητές κάποιου κεντρικού φροντιστηρίου, μας είπαν ότι όλο το πρόβλημα ξεκινά από την εκθετική συνάρτηση χ^α η οποία έχει τα εξής πεδία ορισμού:

Το σύνολο R αν $\alpha \in N$

" " R^* αν $\alpha \in Z^*_-$

" " R^+ αν $\alpha>0$, $\alpha \notin N$

" " R^*_+ αν $\alpha<0$, $\alpha \notin N$

Συνεπώς, $(-1)^{1/3}$ δεν είναι τιμή κάποιας εκθετικής συνάρτησης. Έτσι, υποστηρίζουν ότι :

$$F(\chi)=\begin{cases} \sqrt[3]{\chi} & \text{αν } \chi\geq 0 \\ -\sqrt[3]{\chi} & \text{αν } \chi<0 \end{cases}$$

Στο ίδιο όμως φροντιστήριο, ένας άλλος καθηγητής, μας είπε ότι, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $F(\chi)=\sqrt[3]{\chi}$ είναι όλο το R.

Σε ένα άλλο φροντιστήριο ακούσαμε τα εξής: "Δεν είναι σωστό να μελετώνται στη Γ΄Λυκείου οι συναρτήσεις που περιέχουν ριζικά περιττής τάξεως, στο "μισό" πεδίο ορισμού τους αλλά εφόσον αυτή είναι η άποψη του Κ.Ε.Μ.Ε. είμαστε αναγκασμένοι να συμβιβαστούμε."

Την ίδια άποψη εξέφρασε και κάποιος καθηγητής Μ.Ε.

Τέλος, ένας άλλος καθηγητής Μ.Ε., που οι μαθητές του τον εμπιστεύονται απόλυτα, μας είπε ότι, είναι λάθος να ακολουθήσουμε τις οδηγίες του Κ.Ε.Μ.Ε., γιατί εξετάζοντας για παράδειγμα τη συνάρτηση $F(X)=\sqrt[3]{X}$ με πεδίο ορισμού το R^{+}, χάνονται κάποιες βασικές της ιδιότητες. Συγκεκριμένα, παύει να είναι περιττή συνάρτηση και γενικά η μελέτη της δε μπορεί να είναι ολοκληρωμένη.

Στην ερώτηση:"Γιατί ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών απαντά ότι η $\sqrt{16}$ είναι το ± 4;" όλοι οι καθηγητές συμφωνούν ότι οι μαθητές είναι επηρεασμένοι από τη λύση της εξίσωσής $x^2=16$.

Σ Υ Μ Π Ε Ρ Α Σ Μ Α Τ Α

Είναι φανερό, όπως έχουν επισημάνει και οι περισσότεροι καθηγητές, ότι η σύγχιση που προκαλεί το σύμβολο α οφείλεται στο ότι η εξίσωση $\chi^2=\alpha$ έχει δύο τετραγωνικές ρίζες, μια θετική και μια αρνητική. Για παράδειγμα, η εξίσωση $\chi^2=16$ έχει δύο τετραγωνικές ρίζες, την +4 και την -4. Το σύμβολο όμως, $\sqrt{16}$ έχει μία τιμή θετική, την +4. Η κοινή τους ονομασία είναι αυτή που προκαλεί τη σύγχιση.

Στο βιβλίο "ALGEBRA REVIEW" των CHARLES DENLINGER και ELAINE JACOBSON (ACADEMIC PRESS,INC.) διαβάζουμε:

The positive square root of a is denoted by the symbol $\sqrt{a}$, and the cube root of a number a is denoted by $\sqrt[3]{a}$ Thus

$$\sqrt{25} = 5 \quad \text{and} \quad \sqrt[3]{-27} = -3$$

In general, a positive number a has exactly one positive n-th root when n is even and exactly one real n-th root when n is odd. In each case the root described is denoted by the symbol $\sqrt[n]{a}$, which is called a radical.

(Ελέυθερη μετάφραση: "Η θετική τετραγωνική ρίζα του α, συμβολίζεται με το σύμβολο $\sqrt{\alpha}$, και η κυβική ρίζα ενός αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[3]{\alpha}$. Έτσι

$$\sqrt{25}=5 \quad \text{και} \quad \sqrt[3]{-27}=-3$$

Γενικά, ένας θετικός αριθμός α έχει ακριβώς μία θετική νιοστή ρίζα όταν ο ν είναι άρτιος και ακριβώς μία πραγματική νιοστή ρίζα όταν ο ν είναι περιττός. Σε κάθε περίπτωση η ρίζα που περιγράφεται, συμβολίζεται με το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$,το οποίο καλείται ριζικό.)

Σε κάποιο συνέδριο ο κ. Βαρουχάκης, συγγραφέας διδακτικών βιβλίων, τόνισε ότι για να είναι δυνατή η χρήση των κανόνων λογισμού των δυνάμεων, χωρίς φόβο να προκύψει λάθος, όπως για παράδειγμα στη συλλογιστική που αναφέρεται στις οδηγίες του Κ.Ε.Μ.Ε., πρέπει να ορίζονται και οι συναρτήσεις της μορφής $F(\chi)=\sqrt[2\kappa+1]{\chi}$ μόνο όταν $\chi\geqslant 0$.

Ίσως ακόμη κάποιος αναρωτιέται γιατί η συλλογιστική αυτή είναι λάθος.

Οι κανόνες των ριζικών:

Table 2

LAWS OF RADICALS

For x, y positive.

$$\sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$$

ισχύουν με την προϋπόθεση ότι οι αριθμοί χ και Υ είναι θετικοί. Ας δούμε τί θα συνέβαινε αν ο αριθμός χ δεν ήταν θετικός. Από την πρώτη ιδιότητα του πίνακα 2 θα είχαμε:

$$5 = \sqrt{(-5)^2} = -5$$

Επίσης, στο βιβλίο "ALGEBRA REVIEW" που προαναφέρθηκε, γράφονται τα εξής: 2.3 FRACTIONAL EXPONENTS

If m and n are natural numbers, then for all real numbers $x \geq 0$, we define

Table 3

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}\ , \quad \text{and}$$

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$$

Η πρώτη ιδιότητα του πίνακα 3, δεν ισχύει αν $\chi<0$. Συνεπώς, $(-1)^{1/3} \neq \sqrt[3]{-1}$.Αυτό όμως, δε μπορεί κανείς να το παρατηρήσει αμέσως. Γι΄αυτό ο ορισμός της νιοστής ρίζας του χ συμφωνήθηκε να είναι:

"Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \geq 0$, υπάρχει ένας μοναδικός αριθμός $\chi \geq 0$, ώστε $\chi^{\nu}=\alpha$. Ο μη αρνητικός αριθμός αυτός αριθμός συμβολίζεται $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ". (Ο ορισμός αυτός όμως δεν έχει γραφτεί ακόμη στο βιβλίο της Α΄τάξης του Ενιαίου Πολυκλαδικού Λυκείου)

Η σύμβαση αυτή είναι παρόμοια με την παρακάτω που έγινε πριν από αρκετά χρόνια:

Ο λογάριθμος με βάση α του αριθμού χ ορίστηκε με τις εξής προϋποθέσεις: $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$, $\chi>0$. Ποιος όμως αναρωτήθηκε το γιατί, αφού $\log_{-2}(-8)=3$;

Ε Υ Χ Α Ρ Ι Σ Τ Ο Υ Μ Ε

- τον κ.Καστάνη για την πολύτιμη βοήθειά του στη συλλογή του υλικού μας
- τον κ.Χαλάτση για τις υπεύθυνες συμβουλές του
- το Ίδρυμα Τριανταφυλλίδη για την παραχώρηση των διδακτικών βιβλίων
- τους μαθηματικούς που εξέφρασαν τη γνώμη τους
- τον καθηγητή Μ.Ε. κ.Παπαθανασίου για τη βοήθειά του στη συλλογή των απαντήσεων των μαθητών, και
- τους μαθητές και φοιτητές που απάντησαν στο ερωτηματολόγιό μας.