

Γεωμετρία

Α' Λυκείου

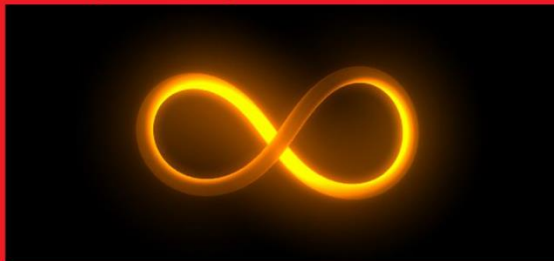
Τράπεζα

lisari team



Θεμάτων

Εκφωνήσεις-Λύσεις



η καλύτερη ομάδα λόγω team_ής

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς
των συνεργατών του δικτυακού τόπου

<http://lisari.blogspot.gr>

Έκδοση: 26 – 01 – 2015 (συνεχής ανανέωση)

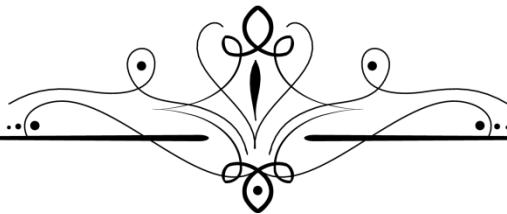
Το βιβλίο διατίθεται **αποκλειστικά**
από το μαθηματικό blog

<http://lisari.blogspot.gr>

Περιεχόμενα – Β Θέματα

Σελίδες

• Πρόλογος:	4
• Η ομάδα εργασιών	6
• Κεφάλαιο 3ο: Τρίγωνα	7
• Κεφάλαιο 4ο: Παράλληλες ευθείες	59
• Κεφάλαιο 5ο: Παραλληλόγραμμα – Τραπεζίες	87
• Κεφάλαιο 6ο: Εγγεγραμμένα σχήματα	180



Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο δίνονται όλες οι ασκήσεις της **Τράπεζας Θεμάτων** που αφορούν στην **Γεωμετρία της Α' Λυκείου** μαζί με τις λύσεις τους. Η παρουσίαση των λύσεων είναι κατά το δυνατόν αναλυτική έτσι, ώστε το αρχείο να μπορεί να διαβαστεί και να μελετηθεί εύκολα από τους μαθητές. Σε αρκετές περιπτώσεις οι λύσεις συνοδεύονται με αναφορές σε παρόμοιες ασκήσεις του σχολικού βιβλίου ή της τράπεζας θεμάτων καθώς και με κάποια στοιχεία θεωρίας ή ακόμα και μεθοδολογίας.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε από μια **διαδικτυακή** (και όχι μόνο) **ομάδα μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος. Η ομάδα συγκροτήθηκε από τους μαθηματικούς που ανταποκρίθηκαν στο κάλεσμα που απεύθυνε μέσα από το blog <http://lisari.blogspot.gr> ο ακούραστος **Μάκης Χατζόπουλος**. Εργάστηκε με μεράκι, κάτω από πίεση χρόνου, για να προσφέρει στην εκπαιδευτική κοινότητα, μαθητές και καθηγητές, το συγκεκριμένο υλικό.

Επιθυμία όλων μας είναι να συμβάλλουμε, έστω και ελάχιστα, στην **βελτίωση της διδασκαλίας** των μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, μέσα από την παροχή υποστηρικτικού υλικού στην ελληνική εκπαιδευτική κοινότητα.

Μετά την αρχική συγγραφή των λύσεων έγιναν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις για την όσο το δυνατό **ποιοτικότερη παρουσίαση**. Ζητούμε συγγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες οι οποίες ενδεχομένως θα έχουν διαλάβει της προσοχής μας, κάτι αναπόδραστο στην εκπόνηση μιας εργασίας τέτοιας έκτασης σε τόσο στενά περιθώρια χρόνου. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου το υλικό θα βελτιωθεί. Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

Η ομάδα του lisari

30 – 11 – 2014

lisari team

Αντωνόπουλος Νίκος (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου Κατεύθυνση - Άργος)
Αυγερινός Βασίλης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου ΔΙΑΤΑΞΗ - Ν. Σμύρνη και Νίκαια)
Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο ΒΕΛΑΩΡΑΣ - Λιβαδειά Βοιωτίας)
Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο Ευθύνη - Ρέθυμνο)
Γιαννόπουλος Μιχάλης (Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)
Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο Αστρολάβος - Άρτα)
Δούδης Δημήτρης (3^ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)
Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια Πουκαμισάς Γλυφάδας)
Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο Ώθηση - Αργυρούπολη)
Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο Παπαπαναγιώτου – Παπαπαύλου - Σέρρες)
Κανάβης Χρήστος (Διδακτορικό στο ΕΜΠ – 2ο ΣΔΕ φυλακών Κορυδαλλού)
Καρδαμίτσης Σπύρος (Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων)
Κοπάδης Θανάσης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίων 19+ - Πολύγωνο)
Κουλούρης Αντρέας (3^ο Λύκειο Γαλατσίου)
Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο Στόχος - Περιστερί)
Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο Ρηγάκης - Κοζάνη)
Μαρούγκας Χρήστος (3^ο ΓΕΛ Κηφισιάς)
Νάννος Μιχάλης (1^ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)
Νικολόπουλος Θανάσης (Λύκειο Κατασταρίου, Ζάκυνθος)
Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο Φάσμα - Αργίνιο)
Παντούλας Περικλής (Φροντιστήρια Γούλα-Δημολένη - Ιωάννινα)
Παπαδομανωλάκη Μαρία (Ιδιοκτήτρια Πρότυπου Κέντρου Μάθησης ΔΙΑΚΡΙΣΙΣ - Ρέθυμνο)
Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός Ρόμβος)
Πορίχης Λευτέρης (Γυμνάσιο Λιθακιάς – Ζάκυνθος)
Ράπτης Γιώργος (6^ο ΓΕΛ Βόλου)
Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο Μπαχαράκης - Θεσσαλονίκη)
Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1^ο Λύκειο Χαλκίδας)
Σπλήνης Νίκος (Φροντιστήριο ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ - Ηράκλειο Κρήτης)
Σπυριδάκης Αντώνης (Γυμνάσιο Βιάννου - Λασιθί)
Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)
Σταυρόπουλος Σταύρος (Γραμματέας Ε.Μ.Ε Κορινθίας - Γυμνάσιο Α.Τ. Λέχαιου Κορινθίας)
Τηλέγραφος Κώστας (Φροντιστήριο Θεμέλιο - Αλεξανδρούπολη)
Τρύφων Παύλος (1^ο Εσπερινό ΕΠΑΛ Περιστερίου)
Φιλίππιδης Χαράλαμπος (Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί)
Χαραλάμπους Σταύρος (Μουσικό Σχολείο Λαμίας)
Χατζόπουλος Μάκης (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων)

Τράπεζα Θεμάτων Γεωμετρία Α' τάξης

20 Δεκεμβρίου 2014

Λύτες

Έλεγχος

Συντονιστής

Εξώφυλλο

Επιμελητής

Γιάννης Βελαώρας

Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης

Δημήτρης Δούδης

Βασίλης Κακαβάς

Γιάννης Κάκτανος

Σπύρος Καρδαμίτσης

Ανδρέας Κουλούρης

Χρήστος Κουσιέρης

Θόδωρος Παγώνης

Χρήστος Σίσινας

Κώστας Τηλέγραφος

Πάυλος Τρύφων

Σταύρος Χαραλάμπους

Μάκης Χατζόπουλος

Μιχάλης Νάννος

Χρήστος Μαρούγκας

Ανδρέας
Κουλούρης

Θανάσης

Νικολόπουλος

Μιχάλης Νάννος

Πρόλογος

Ανδρέας Κουλούρης

Μάκης

Χατζόπουλος

lisari team

η καλύτερη ομάδα λόγω team_ής!

Γεωμετρία Α' Λυκείου

Κεφάλαιο 3ο : Τρίγωνα



ΑΣΚΗΣΗ (2_2814)

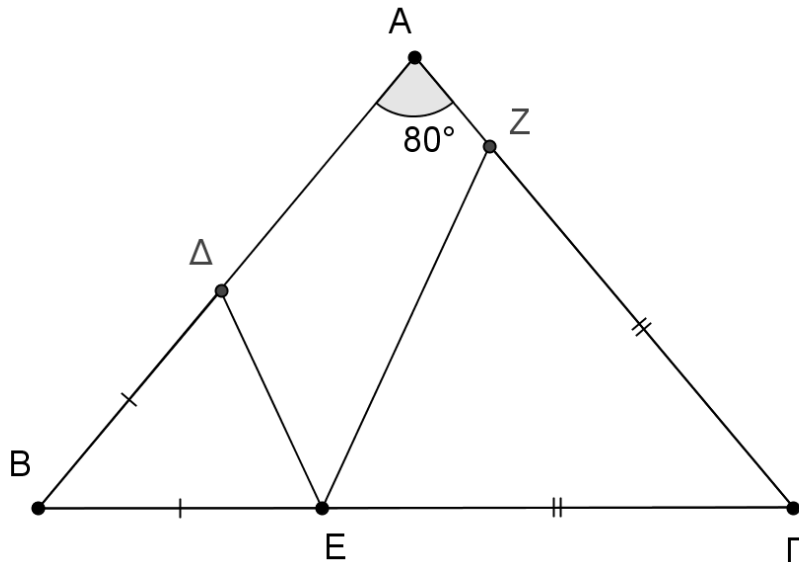
Σε ισοσκελές τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ ($AB=AG$) είναι $\hat{A} = 80^\circ$. Παίρνουμε τυχαίο σημείο E στην πλευρά $B\Gamma$ και κατόπιν τα σημεία Δ και Z στις πλευρές AB και AG αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = BE$ και $\Gamma E = \Gamma Z$.

α Να υπολογιστούν οι γωνίες των τριγώνων $B\hat{\Delta}E$ και $\Gamma\hat{Z}E$

(Μονάδες 15)

β Να υπολογιστεί η γωνία $\Delta\hat{E}Z$.

(Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

α) Στο ισοσκελές τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ είναι $AB=AG$ άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ συνεπώς :

$$\hat{A} + 2\hat{B} = 180^\circ \Rightarrow 80^\circ + 2\hat{B} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 50^\circ \text{ και } \hat{\Gamma} = 50^\circ$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $B\hat{\Delta}E$ είναι $B\Delta = BE$ άρα $B\hat{\Delta}E = B\hat{E}\Delta$ συνεπώς :

$$\hat{B} + 2B\hat{\Delta}E = 180^\circ \Rightarrow 50^\circ + 2B\hat{\Delta}E = 180^\circ \Rightarrow B\hat{\Delta}E = 65^\circ \text{ και } B\hat{E}\Delta = 65^\circ$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $\Gamma\hat{Z}E$ είναι $\Gamma E = \Gamma Z$ άρα $\Gamma\hat{Z}E = \Gamma\hat{E}Z$ συνεπώς :

$$\hat{\Gamma} + 2\Gamma\hat{Z}E = 180^\circ \Rightarrow 50^\circ + 2\Gamma\hat{Z}E = 180^\circ \Rightarrow \Gamma\hat{Z}E = 65^\circ \text{ και } \Gamma\hat{E}Z = 65^\circ$$

β) Έχουμε,

$$B\hat{E}\Delta + \Delta\hat{E}Z + \Gamma\hat{E}Z = 180^\circ \Rightarrow 65^\circ + \Delta\hat{E}Z + 65^\circ = 180^\circ \Rightarrow \Delta\hat{E}Z = 50^\circ$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_2816)

Από εξωτερικό σημείο Σ κύκλου (K, ρ) φέρνουμε τις τέμνουσες του ΣAB και $\Sigma \Gamma \Delta$ ώστε $\Sigma B = \Sigma \Delta$. Τα $K\Lambda$ και KM είναι τα αποστήματα των χορδών AB και $\Gamma \Delta$ του κύκλου αντίστοιχα.

α Να αποδείξετε ότι :

i) Τα τρίγωνα $K\hat{B}\Sigma$ και $K\hat{\Delta}\Sigma$ είναι ίσα.

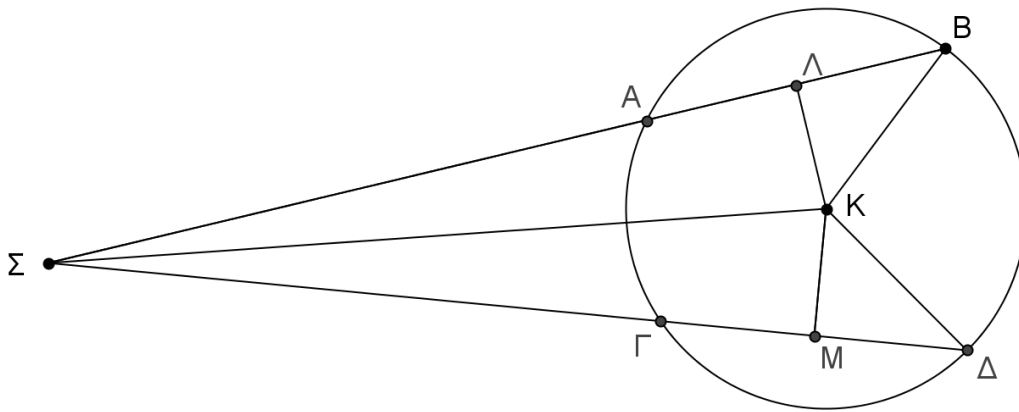
(Μονάδες 10)

ii) $K\Lambda = KM$.

(Μονάδες 10)

β Να αιτιολογήσετε γιατί οι χορδές AB και $\Gamma \Delta$ είναι ίσες.

(Μονάδες 5)

**ΛΥΣΗ**

α) i) Τα τρίγωνα $K\hat{B}\Sigma$ και $K\hat{\Delta}\Sigma$ είναι ίσα γιατί ΣK (κοινή) , $\Sigma B = \Sigma \Delta$ (υπόθεση) και $BK = DK = \rho$. Άρα $K\hat{\Sigma}B = K\hat{\Sigma}\Delta$ (1)

ii) Τα τρίγωνα $K\hat{\Lambda}\Sigma$ και $K\hat{M}\Sigma$ είναι ίσα γιατί $K\hat{\Lambda}\Sigma = K\hat{M}\Sigma = 90^\circ$, ΣK (κοινή) και $K\hat{\Sigma}B = K\hat{\Sigma}\Delta$ (1). Άρα $K\Lambda = KM$ (2).

β) Για τα αποστήματα $K\Lambda$ και KM , των χορδών AB και $\Gamma \Delta$ αντίστοιχα, ισχύει $K\Lambda = KM$ (2) , άρα $AB = \Gamma \Delta$.

ΑΣΚΗΣΗ (2_2819)

Δίνεται κύκλος (O, ρ) , Ax η εφαπτομένη σε σημείο A του κύκλου και επιπλέον

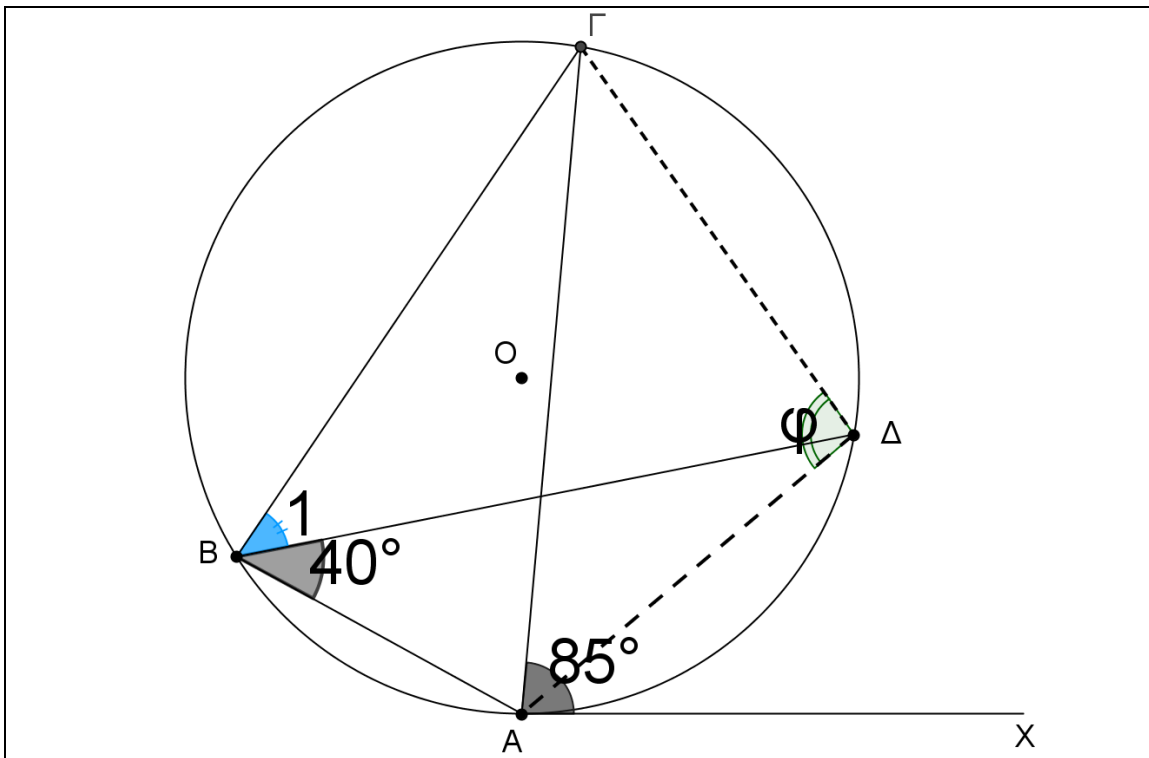
$\Gamma \hat{A}x = 85^\circ$ και $\Delta \hat{B}A = 40^\circ$.

α Να αποδείξετε ότι $\Gamma \hat{B}\Delta = 45^\circ$.

(Μονάδες 10)

β Να υπολογιστεί η γωνία $\Gamma \hat{\Delta}A$.

(Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α) Η γωνία $\hat{\Gamma B A}$, είναι η γωνία που σχηματίζεται από την χορδή ΑΓ και την εφαπτομένη Αx άρα θα είναι ίση με οποιαδήποτε εγγεγραμμένη στον κύκλο (Ο,ρ), γωνία, που βαίνει στο αντίστοιχο τόξο ΑΓ, της χορδής ΑΓ.
Άρα

$$\hat{\Gamma B A} = \hat{\Gamma A x} \Rightarrow \hat{\Gamma B A} = 85^\circ \text{ αφού } \hat{\Gamma A x} = 85^\circ.$$

Τελικά

$$\hat{\Gamma B \Delta} = \hat{\Gamma B A} - \hat{\Delta B A} \Rightarrow \hat{\Gamma B \Delta} = 85^\circ - 40^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma B \Delta} = 45^\circ \text{ αφού } \hat{\Delta B A} = 40^\circ$$

β) Είναι

$$\hat{\Gamma B A} = 85^\circ \text{ άρα } \hat{\Gamma \Delta A} = 2 \cdot \hat{\Gamma B A} \Rightarrow \hat{\Gamma \Delta A} = 2 \cdot 85^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma \Delta A} = 170^\circ$$

Συνεπώς

$$\hat{\Gamma B A} = 360^\circ - \hat{\Gamma \Delta A} \Rightarrow \hat{\Gamma B A} = 360^\circ - 170^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma B A} = 190^\circ$$

Τελικά

$$\hat{\Gamma \Delta A} = \frac{1}{2} \hat{\Gamma B A} \Rightarrow \hat{\Gamma \Delta A} = \frac{1}{2} \cdot 190^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma \Delta A} = 95^\circ$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_2824)

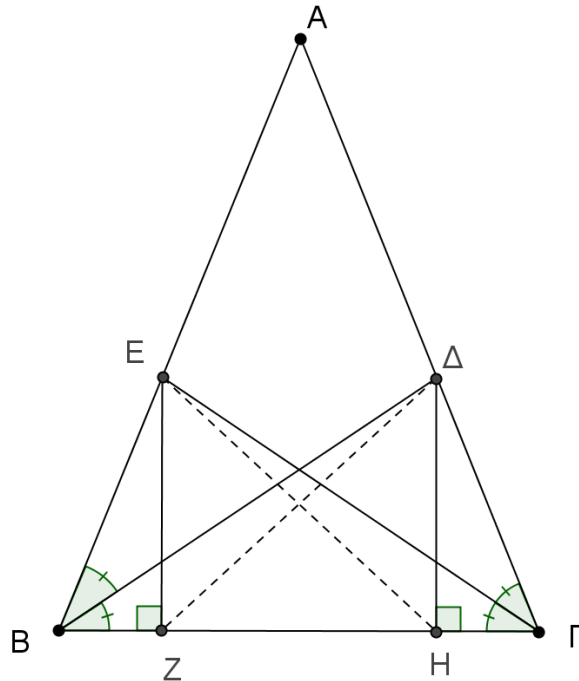
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\hat{A B \Gamma}$ ($AB=AG$) και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Αν ισχύει ότι $EH \perp B\Gamma$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$ να αποδείξετε ότι :

α) $\hat{B \Gamma \Delta} = \hat{\Gamma B E}$.

(Μονάδες 13)

β) $EH = \Delta Z$.

(Μονάδες 12)

**ΛΥΣΗ**

α) Είναι

$$\hat{\Delta B \Gamma} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \hat{E \Gamma B} \quad (1)$$

Τα τρίγωνα $B \hat{\Gamma} \Delta$ και $\Gamma \hat{B} E$ είναι ίσα γιατί $B \Gamma$ (κοινή), $\hat{\Delta B \Gamma} = \hat{E \Gamma B}$ (1), $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (γιατί $A \hat{B} \Gamma$ ισοσκελές με $AB = AG$).

Άρα

$$BE = \Gamma \Delta \quad (2).$$

β) Τα τρίγωνα $B \hat{E} H$ και $\Gamma \hat{\Delta} Z$ είναι ίσα γιατί

$$\hat{E H B} = \hat{\Delta Z \Gamma} = 90^\circ, BE = \Gamma \Delta \quad (2), \hat{B} = \hat{\Gamma} \quad (\text{γιατί } A \hat{B} \Gamma \text{ ισοσκελές με } AB = AG).$$

Άρα

$$EH = \Delta Z.$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_2837)

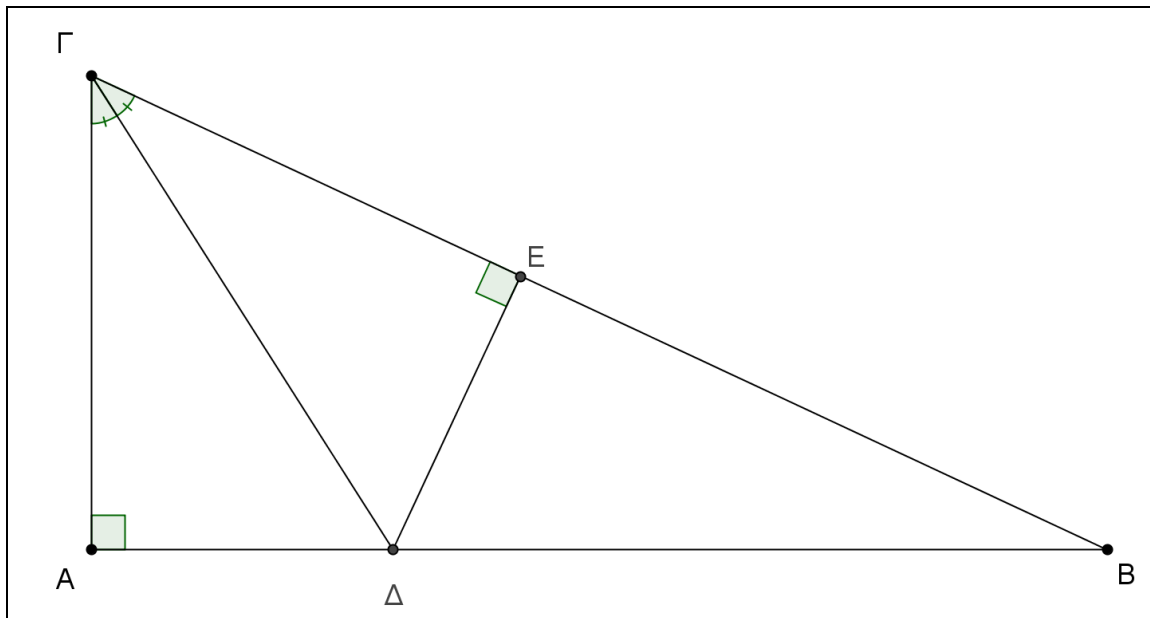
Σε ορθογώνιο τρίγωνο $A \hat{B} \Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), η διχοτόμος τη γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ . Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά $B \Gamma$ την κάθετο ΔE , η οποία τέμνει τη $B \Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) $A \Delta = \Delta E$

(Μονάδες 13)

β) $A \Delta < \Delta B$

(Μονάδες 12)

**ΛΥΣΗ**

α) Το Γ είναι σημείο της διχοτόμου ΓΔ, της γωνίας $\hat{\Gamma}$, άρα θα ισαπέχει από τις πλευρές της ΓΑ και ΓΒ δηλαδή $ΑΔ = ΔΕ$ (1).

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΒ, η ΔΕ είναι κάθετη πλευρά και η ΔΒ η υποτείνουσα άρα $ΔΕ < ΔΒ$ (2).

$$(1), (2) \Rightarrow ΑΔ < ΔΒ$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_2839)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90^\circ$). Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Β}$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ.

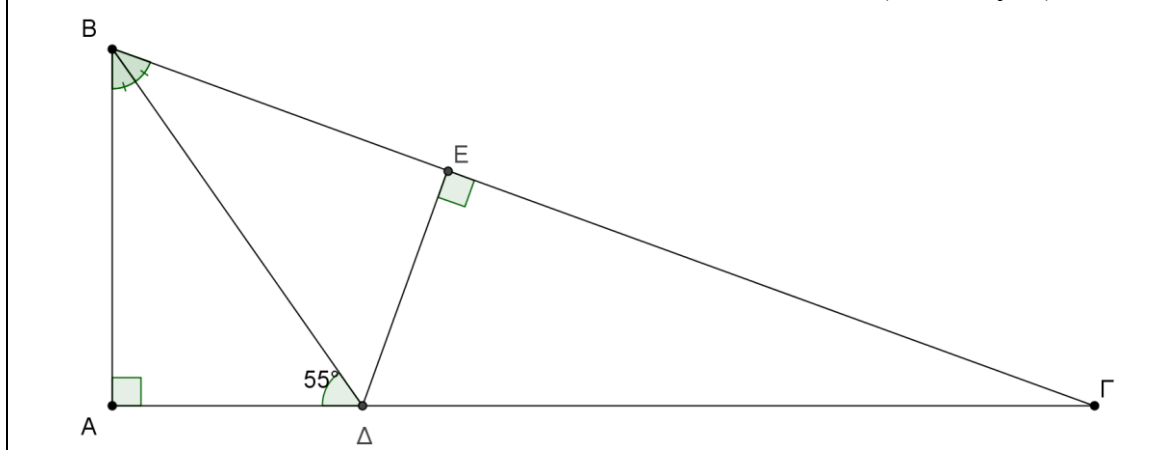
Να αποδείξετε ότι:

α) $ΒΕ = ΑΒ$

(Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον $\hat{ΒΔΑ} = 55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΓΔΕ.

(Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

[lisari – team](http://lisari-team.com)

«Β Θέματα»

α) Το Δ είναι σημείο της διχοτόμου ΒΔ, της γωνίας $\hat{B}$, άρα θα ισαπέχει από τις πλευρές της ΒΑ και ΒΕ αντίστοιχα δηλαδή ΔΑ=ΔΕ (1).

Τα τρίγωνα Β Δ Δ και Β Ε Δ είναι ίσα γιατί

$$\hat{A} = \hat{E} \Delta = 90^\circ,$$

ΒΔ (κοινή),

$$\Delta A = \Delta E \text{ (1)}$$

άρα ΑΒ=ΒΕ.

β) Έχουμε, $\hat{B} \Delta A = 55^\circ$ άρα στο τρίγωνο Α Δ Δ θα είναι :

$$\hat{\Delta} B A = 90^\circ - \hat{B} \Delta A = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ.$$

Επίσης

$$\hat{\Delta} B \Gamma = \hat{\Delta} B A = 35^\circ \Rightarrow \hat{B} = 70^\circ$$

άρα στο τρίγωνο Α Δ Γ θα είναι :

$$\hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$$

Τέλος στο τρίγωνο Γ Ε Δ θα είναι

$$\hat{\Gamma} \Delta E = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_2845)

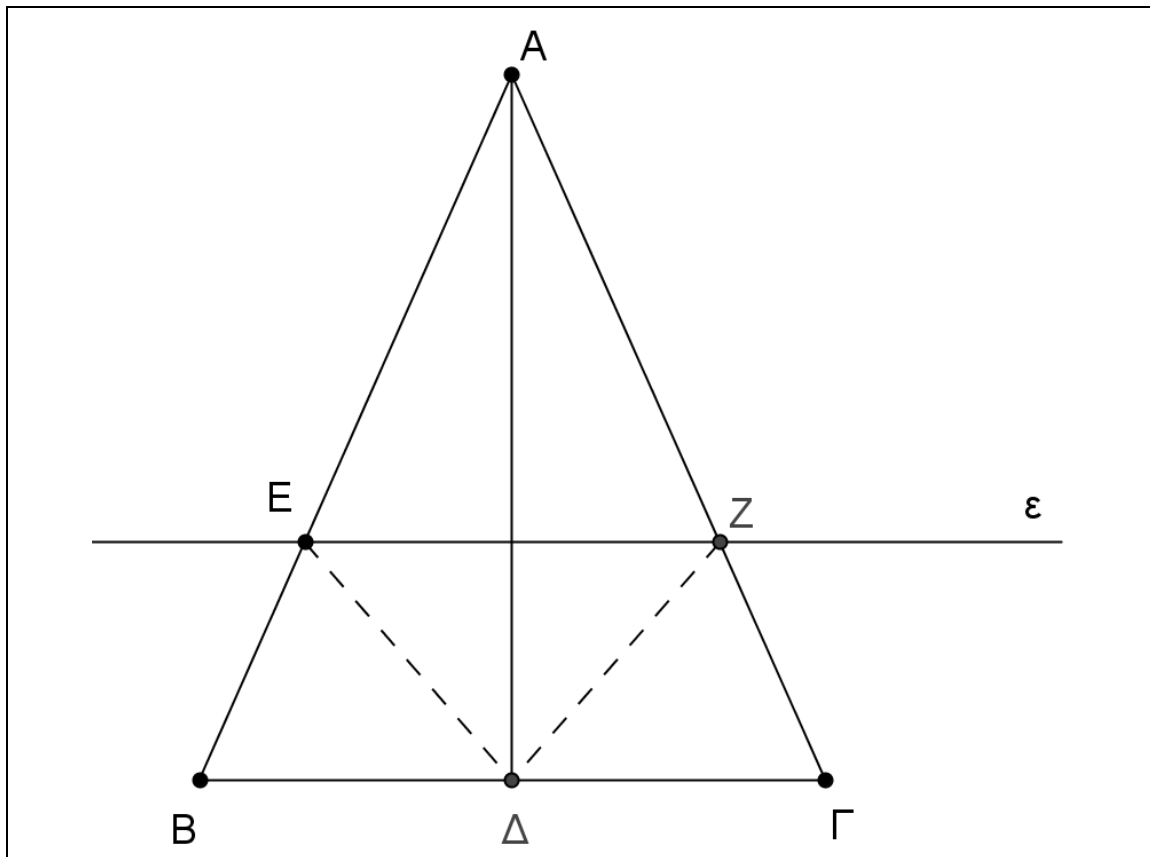
Σε ισοσκελές τρίγωνο Α Δ Γ (ΑΒ=ΑΓ) φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς την ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο Α Ε Ζ είναι ισοσκελές

(Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα Α Ε Δ και Α Ζ Δ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)

**ΛΥΣΗ**

α) Το τρίγωνο $\hat{A}B\hat{\Gamma}$ είναι ισοσκελές ($AB=AG$) άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (1)

Η AB είναι τέμνουσα των παραλλήλων EZ και BΓ άρα $\hat{B} = \hat{A\hat{E}Z}$ (2) , ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

Η AG είναι τέμνουσα των παραλλήλων EZ και BΓ άρα $\hat{\Gamma} = \hat{A\hat{Z}E}$ (3) , ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

Άρα (1),(2),(3) $\Rightarrow \hat{A\hat{E}Z} = \hat{A\hat{Z}E}$ δηλαδή το τρίγωνο $\hat{A\hat{E}Z}$ είναι ισοσκελές με $AE=AZ$.

β) Τα τρίγωνα $\hat{A\hat{E}\Delta}$ και $\hat{A\hat{Z}\Delta}$ είναι ίσα γιατί $A\Delta$ (κοινή) , $\hat{E\hat{A}\Delta} = \hat{Z\hat{A}\Delta}$ (υπόθεση) και $AE = AZ$ (α ερώτημα).

ΑΣΚΗΣΗ (2_2846)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\hat{A}B\hat{\Gamma}$ ($AB=AG$) και τα ύψη του BΔ και ΓΕ.

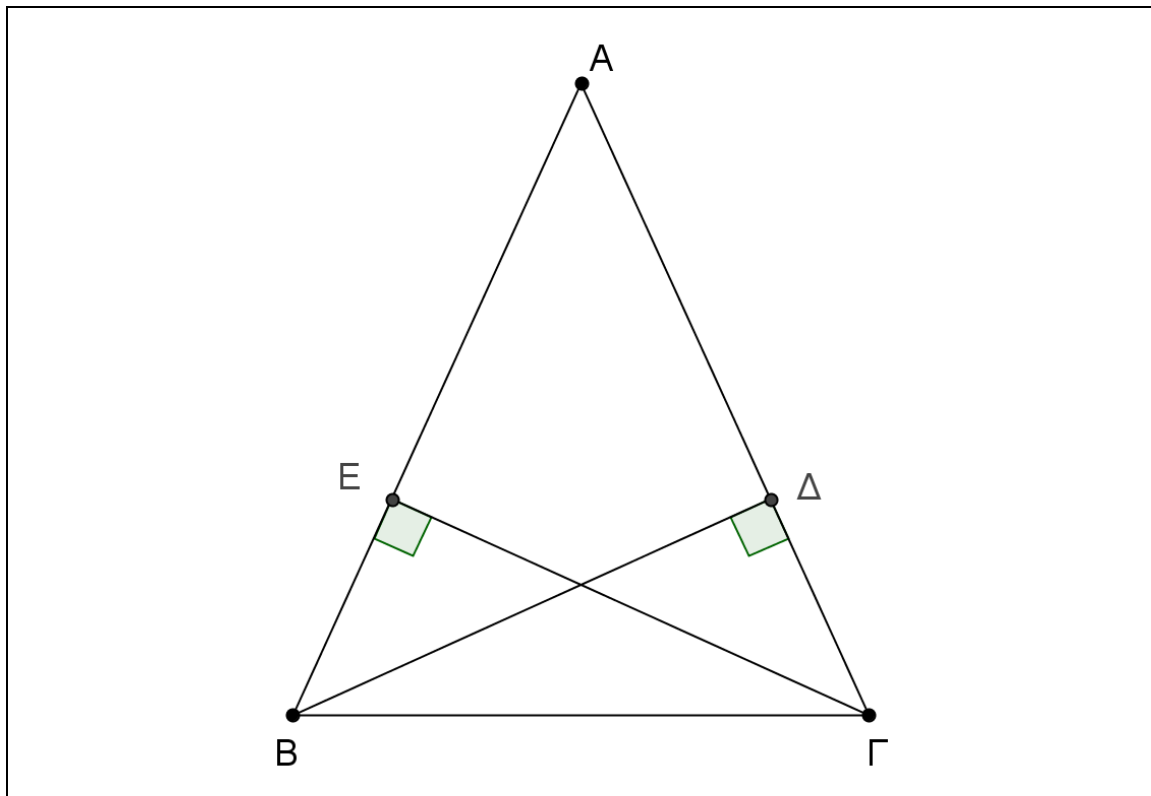
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\hat{B\hat{\Delta}\Gamma}$ και $\hat{\Gamma\hat{E}B}$ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)

β) $A\Delta=AE$.

(Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

α) Τα τρίγωνα $\triangle B\Delta\Gamma$ και $\triangle \Gamma\epsilon B$ είναι ίσα γιατί

$$\angle \Delta B \Gamma = \angle \epsilon \Gamma B = 90^\circ,$$

$B\Gamma$ κοινή και

$$\angle \Gamma = \angle B \text{ (υπόθεση)}.$$

β) Είναι $AB = A\Gamma$ (υπόθεση) (1) και $BE = \Gamma\Delta$ (α ερώτημα) (2).

Άρα :

$$AE = AB - BE \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} AE = A\Gamma - \Gamma\Delta \Rightarrow AE = A\Delta$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_2847)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $\triangle A\hat{B}\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και το μέσο M της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε τις αποστάσεις MK και $M\Lambda$ του σημείου M από τις ίσες πλευρές του τριγώνου

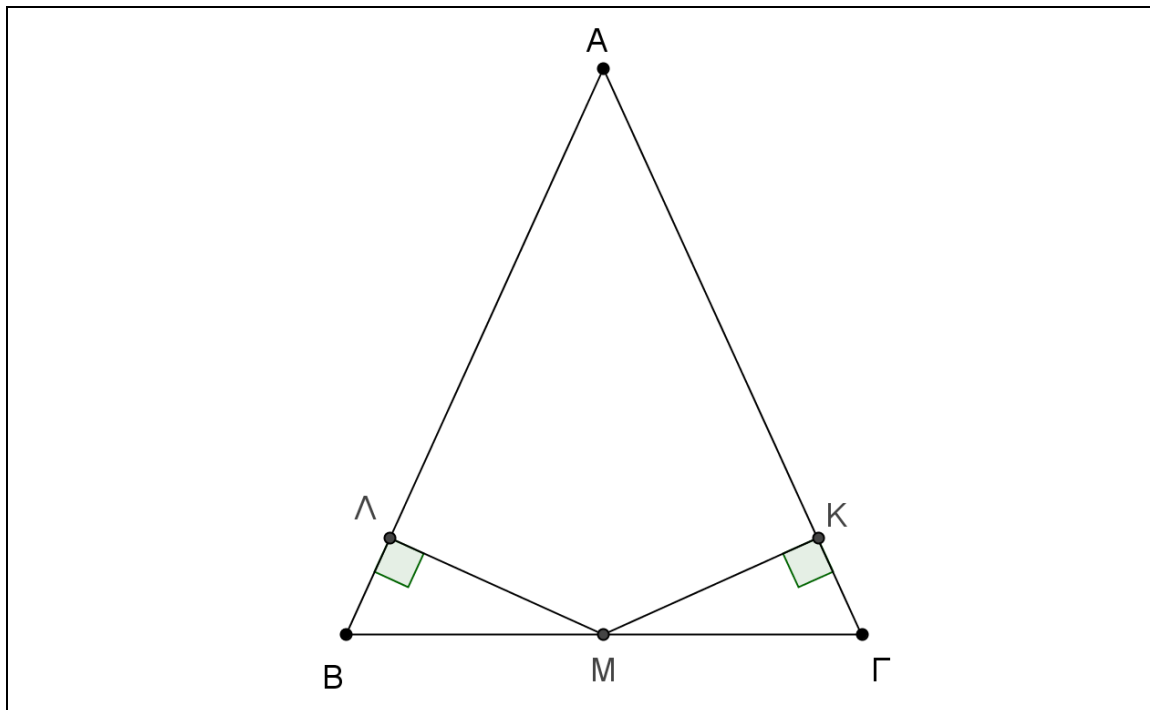
$\triangle A\hat{B}\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $MK=M\Lambda$.

(Μονάδες 13)

β) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle K\hat{M}\Lambda$.

(Μονάδες 12)

**ΛΥΣΗ**

α) Τα τρίγωνα $\triangle MB\Lambda$ και $\triangle MK\Gamma$ είναι ίσα γιατί

$$\angle MB\Lambda = \angle MK\Gamma,$$

$BM = \Gamma M$ (υπόθεση) και

$$\angle B = \angle \Gamma \text{ (υπόθεση)}$$

άρα $MB = M\Lambda$.

β) Η AM είναι η διάμεσος προς την βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ άρα είναι και ύψος δηλαδή $\angle AMB = \angle AMG = 90^\circ$ (1).

Επίσης,

$$\angle MB\Lambda = \angle MK\Gamma \text{ (α ερώτημα) (2).}$$

Άρα,

$$\angle AM\Lambda = \angle AMB - \angle MB\Lambda \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} \angle AM\Lambda = \angle AMG - \angle MK\Gamma \Rightarrow \angle AM\Lambda = \angle AMK$$

Δηλαδή η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle K\Lambda M$.

ΑΣΚΗΣΗ (2_2848)

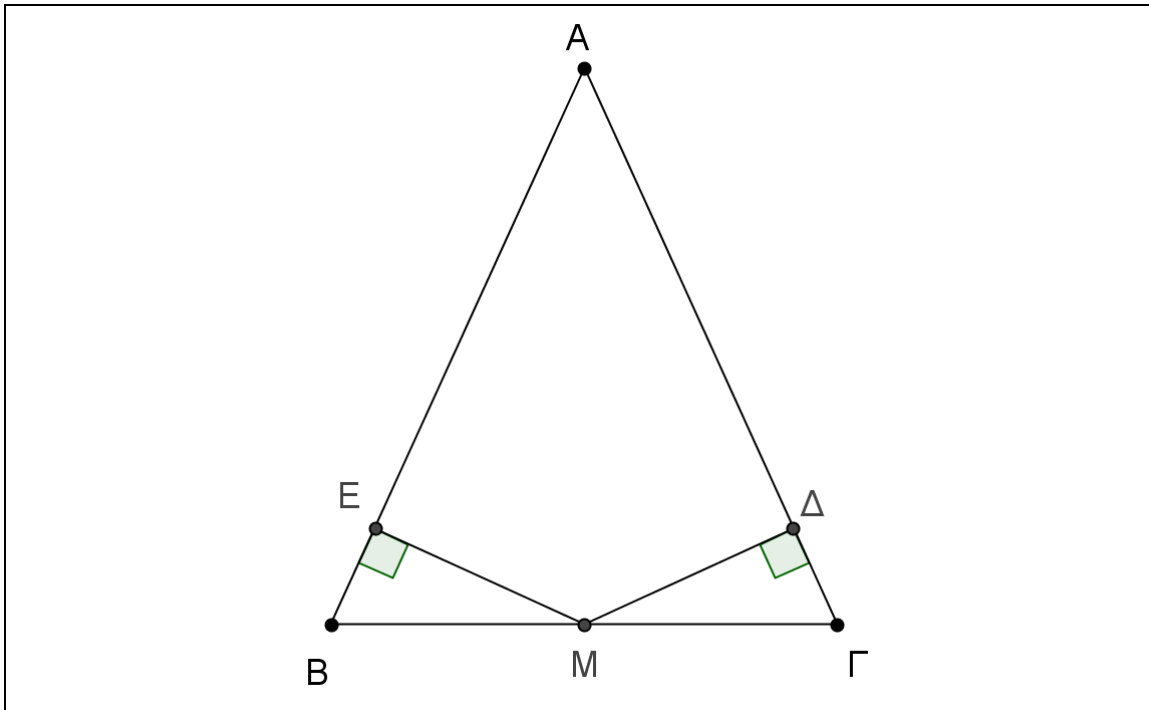
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AB = AG$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και AG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) $M\Delta = ME$.

(Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο $\triangle A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

α) Τα τρίγωνα $\triangle MBE$ και $\triangle M\Delta\Gamma$ είναι ίσα γιατί

$$\angle MBE = \angle M\Delta\Gamma = 90^\circ,$$

$MB = M\Gamma$ (υπόθεση) και

$$\angle B = \angle \Gamma \text{ (υπόθεση)}$$

άρα $ME = MD$.

β) Είναι $AB = A\Gamma$ (υπόθεση) (1) και $B\Delta = \Gamma E$ (α ερώτημα) (2).

Άρα,

$$A\Delta = AB - B\Delta \xrightarrow{(1),(2)} A\Delta = A\Gamma - \Gamma E \Rightarrow A\Delta = AE \Rightarrow \text{το τρίγωνο } \triangle A\Delta E \text{ είναι ισοσκελές.}$$

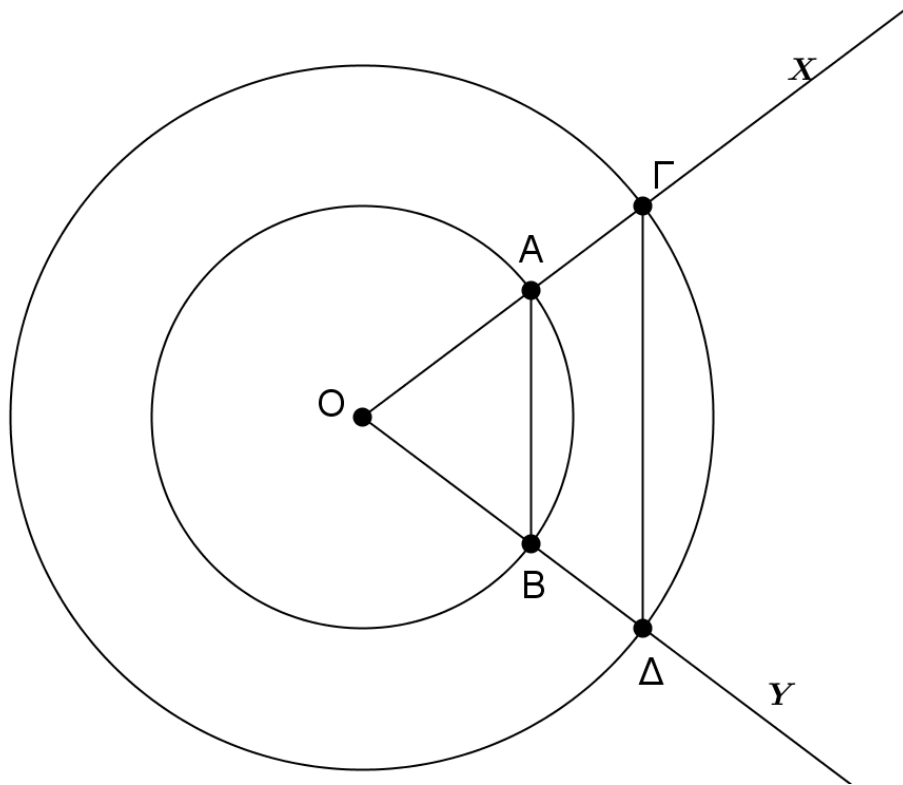
ΑΣΚΗΣΗ (2_2853)

Ένας μαθητής της Α' λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες.

Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία $\angle XO\Psi$. Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή O της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές OX και $O\Psi$ της γωνίας στα σημεία A, B αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ, Δ . Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

Μονάδες 25

ΛΥΣΗ



Έστω οι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$.

Στο τρίγωνο $O\hat{A}B$ είναι $(OA) = (OB) = \rho_1$ άρα $O\hat{B}A = O\hat{A}B$ και

$$2O\hat{A}B + O\hat{O} = 180^\circ \Rightarrow O\hat{A}B = \frac{180^\circ - O\hat{O}}{2} \quad (1)$$

Στο τρίγωνο $O\hat{\Gamma}\Delta$ είναι $(O\Gamma) = (O\Delta) = \rho_2$ άρα $O\hat{\Delta}\Gamma = O\hat{\Gamma}\Delta$ και

$$2O\hat{\Gamma}\Delta + O\hat{O} = 180^\circ \Rightarrow O\hat{\Gamma}\Delta = \frac{180^\circ - O\hat{O}}{2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow O\hat{A}B = O\hat{\Gamma}\Delta.$$

Όμως η $O\Gamma$ είναι τέμνουσα των AB και $\Gamma\Delta$ και οι ίσες γωνίες $O\hat{A}B, O\hat{\Gamma}\Delta$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά άρα $AB \parallel \Gamma\Delta$.

ΑΣΚΗΣΗ (2_2854)

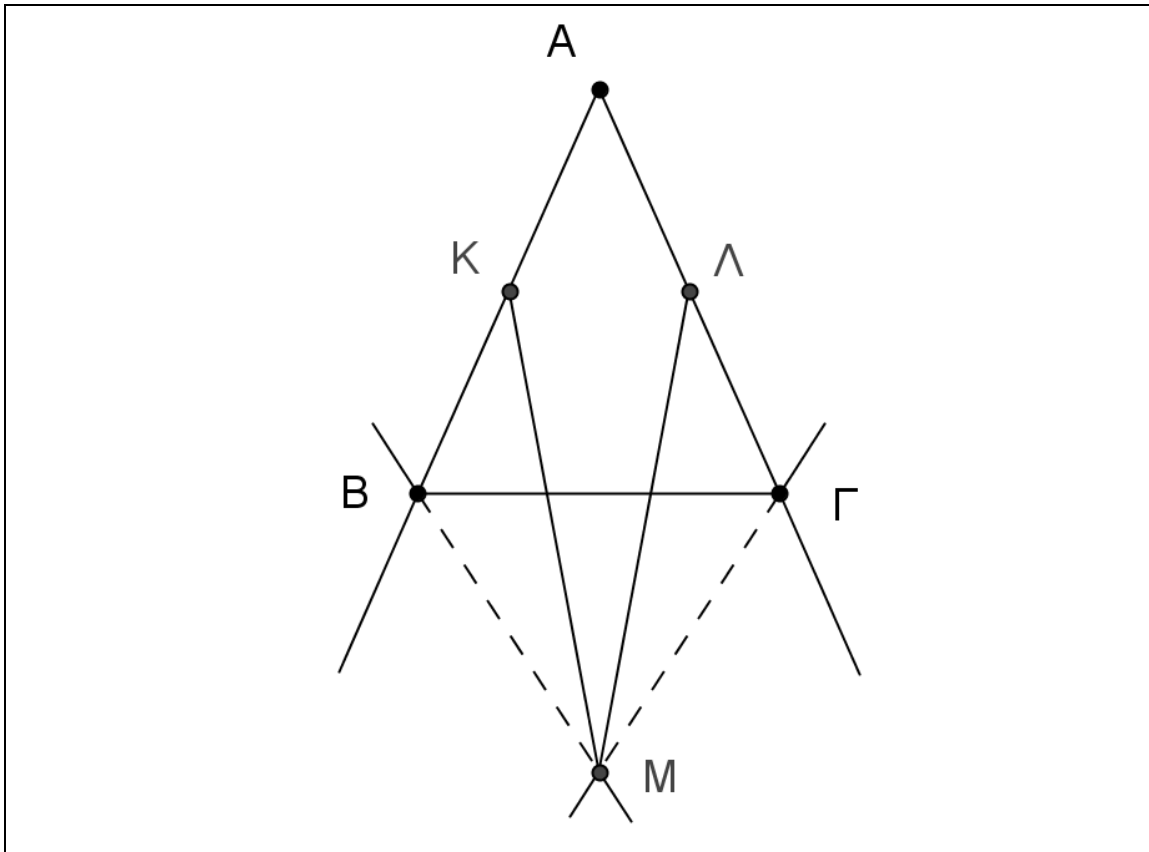
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο M και K, Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $B\hat{M}\Gamma$ είναι ισοσκελές με $MB = M\Gamma$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $MK = M\Lambda$.

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Από υπόθεση

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{B}_{εξ} = \hat{\Gamma}_{εξ} \Rightarrow \frac{\hat{B}_{εξ}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}_{εξ}}{2} \Rightarrow \hat{M\hat{B}\hat{\Gamma}} = \hat{M\hat{\Gamma}\hat{B}}.$$

Άρα το τρίγωνο $\hat{B\hat{M}\hat{\Gamma}}$ είναι ισοσκελές με $MB = M\Gamma$.

β) Από υπόθεση

$$AB = A\Gamma \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} \Rightarrow KB = \Lambda\Gamma \quad (1)$$

Επίσης, επειδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (2) και $\hat{M\hat{B}\hat{\Gamma}} = \hat{M\hat{\Gamma}\hat{B}}$ (3) θα είναι :

$$\hat{K\hat{B}\hat{M}} = \hat{B} + \hat{M\hat{B}\hat{\Gamma}} \stackrel{(2),(3)}{\Rightarrow} \hat{K\hat{B}\hat{M}} = \hat{\Gamma} + \hat{M\hat{\Gamma}\hat{B}} \Rightarrow \hat{K\hat{B}\hat{M}} = \hat{\Lambda\hat{\Gamma}\hat{M}} \quad (4)$$

Άρα τα τρίγωνα $\hat{K\hat{B}\hat{M}}$ και $\hat{\Lambda\hat{\Gamma}\hat{M}}$ είναι ίσα γιατί

$KB = \Lambda\Gamma$ (1), $\hat{K\hat{B}\hat{M}} = \hat{\Lambda\hat{\Gamma}\hat{M}}$ (4) και $MB = M\Gamma$ (α ερώτημα) συνεπώς

$$MK = M\Lambda.$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_2855)

Δίνεται τρίγωνο $\hat{A\hat{B}\hat{\Gamma}}$ στο οποίο η εξωτερική γωνία $\hat{A}$ είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας $\hat{B}$.

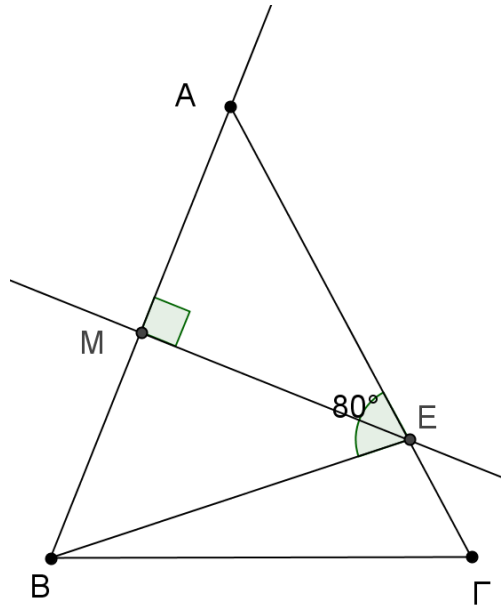
α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\hat{A\hat{B}\hat{\Gamma}}$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Η μεσοκάθετη της πλευράς AB τέμνει την πλευρά AG στο εσωτερικό της σημείο Δ .

Αν η γωνία $\hat{A}\hat{\Delta}B$ είναι ίση με 80° , τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$.

(Μονάδες 15)

**ΛΥΣΗ**

α) Από την υπόθεση έχουμε ότι $\hat{A}_{εξ} = 2\hat{B}$ (1) και από την θεωρία $\hat{A}_{εξ} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$ (2).

$$(1), (2) \Rightarrow 2\hat{B} = \hat{B} + \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}$$

Άρα το τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ είναι ισοσκελές με $AB = AG$.

β) Στο τρίγωνο $\hat{A}\hat{\Delta}B$, η MB είναι μεσοκάθετος της AB , άρα είναι και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\hat{\Delta}B$ δηλαδή

$$\hat{A}\hat{\Delta}M = \frac{\hat{A}\hat{\Delta}B}{2} = \frac{80^\circ}{2} \Rightarrow \hat{A}\hat{\Delta}M = 40^\circ \quad (1).$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{A}\hat{\Delta}M$ είναι

$$\hat{A} = 90^\circ - \hat{A}\hat{\Delta}M \stackrel{(1)}{=} 90^\circ - 40^\circ \Rightarrow \hat{A} = 50^\circ \quad (2).$$

Τέλος στο τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ είναι

$$2\hat{B} + \hat{A} = 180^\circ \stackrel{(2)}{\Rightarrow} 2\hat{B} + 50^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 65^\circ \text{ και } \hat{\Gamma} = \hat{B} = 65^\circ.$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_2860)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

α) Το τρίγωνο $B\hat{I}\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 8

β) Οι γωνίες $\hat{A}\hat{I}\Gamma$ και $\hat{A}\hat{I}B$ είναι ίσες.

Μονάδες 10

γ) Η ευθεία ΑΙ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗα) Η ΒΙ διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ άρα ισχύει:

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2} \quad \textcircled{1}$$

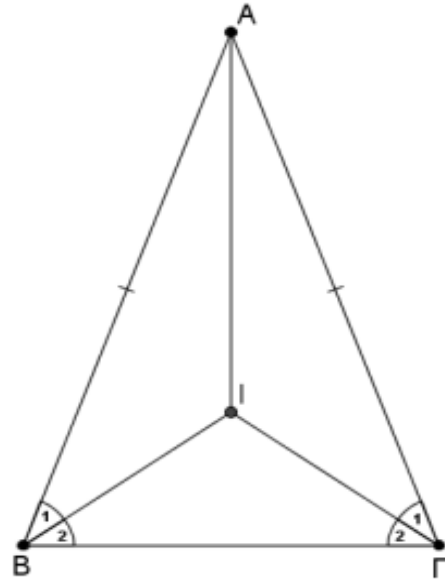
Η ΓΙ διχοτόμος της γωνίας $\hat{G}$ άρα ισχύει:

$$\hat{G}_1 = \hat{G}_2 = \frac{\hat{G}}{2} \quad \textcircled{2}$$

Αλλά, το τρίγωνο ΑΒΓ ισοσκελές, άρα $\hat{B} = \hat{G}$.Οπότε από $\textcircled{1}$ και $\textcircled{2}$ είναι: $\hat{B}_2 = \hat{G}_2$,

(ή αλλιώς, ως μισά ίσων γωνιών)

Άρα το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές.

β) Συγκρίνω: $\triangle AIB - \triangle AIG$

1. $AB = AG$ (υπόθεση)
2. $\hat{B}_1 = \hat{G}_1$ (ως μισά ίσων γωνιών)
3. $BI = GI$ (το τρίγωνο ΒΙΓ ισοσκελές)

Άρα από 1^ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π – Γ – Π) είναι $\triangle AIB = \triangle AIG$, άρα και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα και $AIG = AIB$.

γ) Ισχύει ότι $AB = AG$ (υπόθεση), άρα το Α ισαπέχει από τα Β, Γ, οπότε ανήκει στην μεσοκάθετο του ΒΓ.

Ισχύει ότι $BI = GI$ (από α) ερώτημα), άρα το Ι ισαπέχει από τα Β, Γ, οπότε ανήκει στην μεσοκάθετο του ΒΓ.

Άρα, ΑΙ μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.

ΑΣΚΗΣΗ (2_3417)

Έστω δύο ισοσκελή τρίγωνα $\triangle A\hat{B}\Gamma$ ($AB = AG$) και $\triangle A'\hat{B}'\Gamma'$ ($A'B' = A'G'$).

α) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε τα τρίγωνα $\triangle A\hat{B}\Gamma$ και $\triangle A'\hat{B}'\Gamma'$ είναι ίσα.

Μονάδες 13

β) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $AG = A'G'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, τότε τα τρίγωνα $\triangle A\hat{B}\Gamma$ και $\triangle A'\hat{B}'\Gamma'$ είναι ίσα.

Μονάδες 12

ΔΥΣΗ

α) Επειδή τα τρίγωνα είναι ισοσκελή
και

$$AB = A'B' \text{ προκύπτει ότι}$$

$$AB = AG = A'B' = A'T'.$$

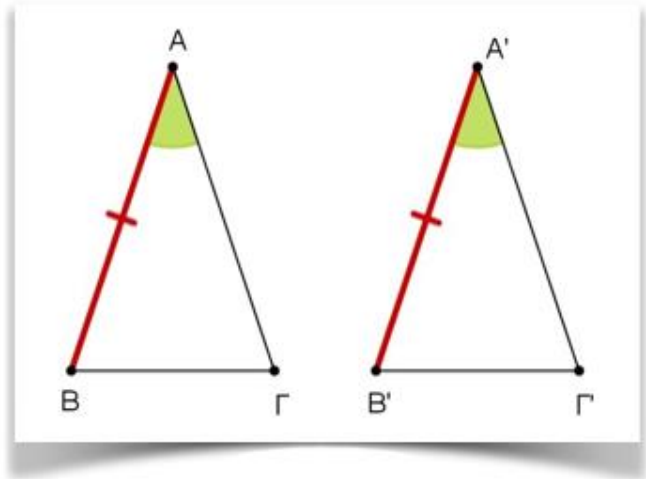
Τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$, $\triangle A'B'\Gamma'$ έχουν:

$$1. AB = A'B',$$

$$2. AG = A'T',$$

$$3. \hat{A} = \hat{A'} \text{ (από υπόθεση), οπότε}$$

$$\triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma' \text{ (κριτήριο ΠΓΠ).}$$



β) Επειδή τα τρίγωνα είναι ισοσκελή
και

$$AG = A'T' \text{ προκύπτει ότι}$$

$$AB = AG = A'B' = A'T'.$$

Επίσης, οι γωνίες των βάσεων τους
θα είναι ανά δύο ίσες και επειδή

$$\hat{B} = \hat{B'} \text{ προκύπτει ότι}$$

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{B'} = \hat{\Gamma'}.$$

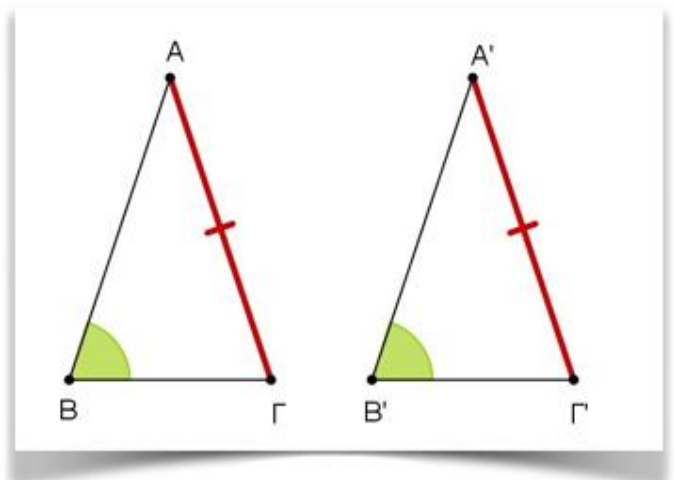
Τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$, $\triangle A'B'\Gamma'$ έχουν:

$$1. AB = A'B',$$

$$2. AG = A'T',$$

$$3. \hat{A} = \hat{A'}$$

(διότι



$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{\Gamma}) = 180^\circ - (\hat{B'} + \hat{\Gamma'}) = \hat{A'},$$

οπότε $\triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$ (κριτήριο ΠΓΠ).

ΑΣΚΗΣΗ (2_3420)

Θεωρούμε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και τα ύψη του BD και GE που αντιστοιχούν στις πλευρές του AG και AB αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = AG$, τότε τα ύψη BD και GE είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) Αν τα ύψη BD και GE είναι ίσα, τότε το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AG = AB$.

Μονάδες 13

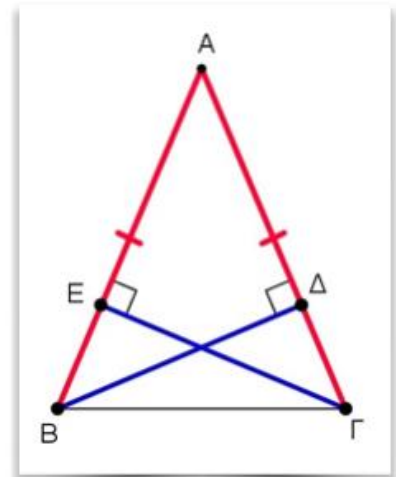
ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα $\triangle BE\Gamma$ και $\triangle B\Delta\Gamma$:

1. είναι ορθογώνια,
2. έχουν την $B\Gamma$ κοινή πλευρά,
3. έχουν $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, ως γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου.

Άρα $\triangle BE\Gamma = \triangle B\Delta\Gamma$.

Όμως, σε ίσα τρίγωνα, απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές, έτσι $B\Delta = \Gamma E$.



β) Τα τρίγωνα $\triangle BE\Gamma$ και $\triangle B\Delta\Gamma$:

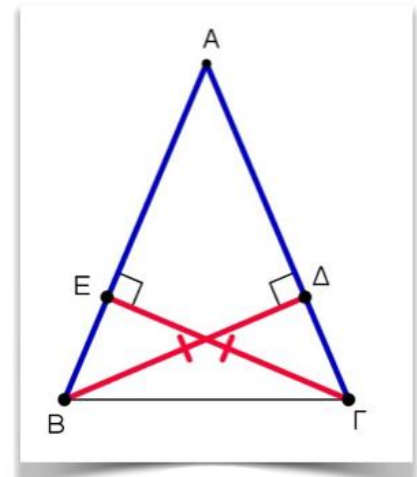
1. είναι ορθογώνια,
2. έχουν $B\Delta = \Gamma E$ (από υπόθεση)
3. έχουν την $B\Gamma$ κοινή πλευρά.

Άρα $\triangle BE\Gamma = \triangle B\Delta\Gamma$.

Όμως, σε ίσα τρίγωνα, απέναντι από

ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες, έτσι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Τώρα το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ έχει $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, άρα είναι ισοσκελές με $AB = \Gamma A$.

**ΑΣΚΗΣΗ (2_3421)**

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά ίσο τμήμα $M\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\triangle ABM$ και $\triangle \Gamma M\Delta$ είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) Τα σημεία A και Δ ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα $\triangle ABM$, $\triangle \Gamma M\Delta$ έχουν:

1. $AM = M\Delta$ (υπόθεση)
2. $BM = M\Gamma$ (υπόθεση)
3. $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (ως κατακορυφήν γωνίες).

Άρα από το κριτήριο ΠΓΠ προκύπτει ότι

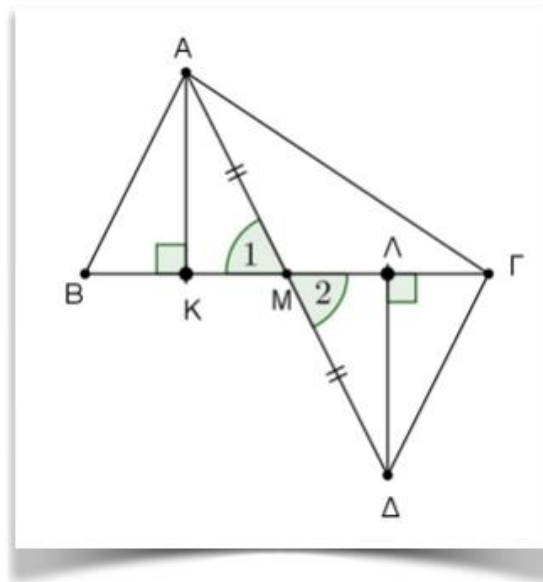
$\triangle ABM = \triangle \Gamma M\Delta$

β) Φέρνουμε $AK \perp BG$ και $DL \perp BG$.

Τα τρίγωνα $\triangle AKM, \triangle LDM$ έχουν:

1. είναι ορθογώνια,
2. $AM = MD$ (υπόθεση)
3. $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (ως κατακορυφήν γωνίες).

Άρα $\triangle AKM = \triangle LDM$ και επειδή σε ίσα τρίγωνα, απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές, προκύπτει ότι $AK = DL$.



ΑΣΚΗΣΗ (2_3423)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABG ($A = 90^\circ$) και BD η διχοτόμος της γωνίας B . Από το D φέρουμε $DE \perp BG$, και έστω Z το σημείο στο οποίο η ευθεία ED τέμνει την προέκταση της BA (προς το A).

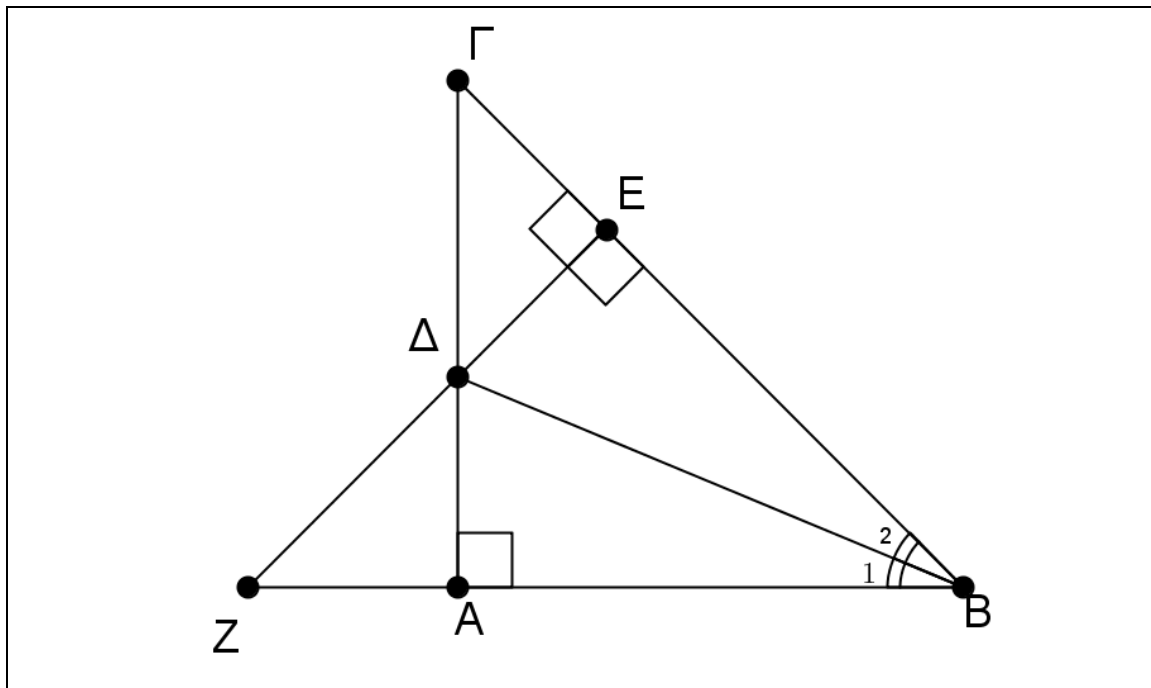
Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = BE$

Μονάδες 13

β) Τα τρίγωνα ABG και ZEB είναι ίσα.

Μονάδες 12

**ΛΥΣΗ**

α) Έχουμε $\triangle ADB = \triangle DEB$ γιατί,

- $\angle B_1 = \angle B_2$ (ΒΔ διχοτόμος)
- $BD = BD$ (κοινή πλευρά)
- $\angle A = \angle E = 90^\circ$

άρα $AB = BE$.

β) Έχουμε $\triangle ABG = \triangle ZEB$ γιατί,

- $\angle A = \angle E = 90^\circ$
- $AB = BE$ (από το προηγούμενο ερώτημα)
- $\angle B = \angle B$ (κοινή γωνία)

είναι ορθογώνια τρίγωνα με οξεία γωνία και μια ομόλογη πλευρά ίσα μία προς μία.

ΑΣΚΗΣΗ (2_3425)

Στο ακόλουθο σχήμα, η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και το Ε είναι σημείο στην προέκταση της ΑΔ, ώστε $DE = AD$.

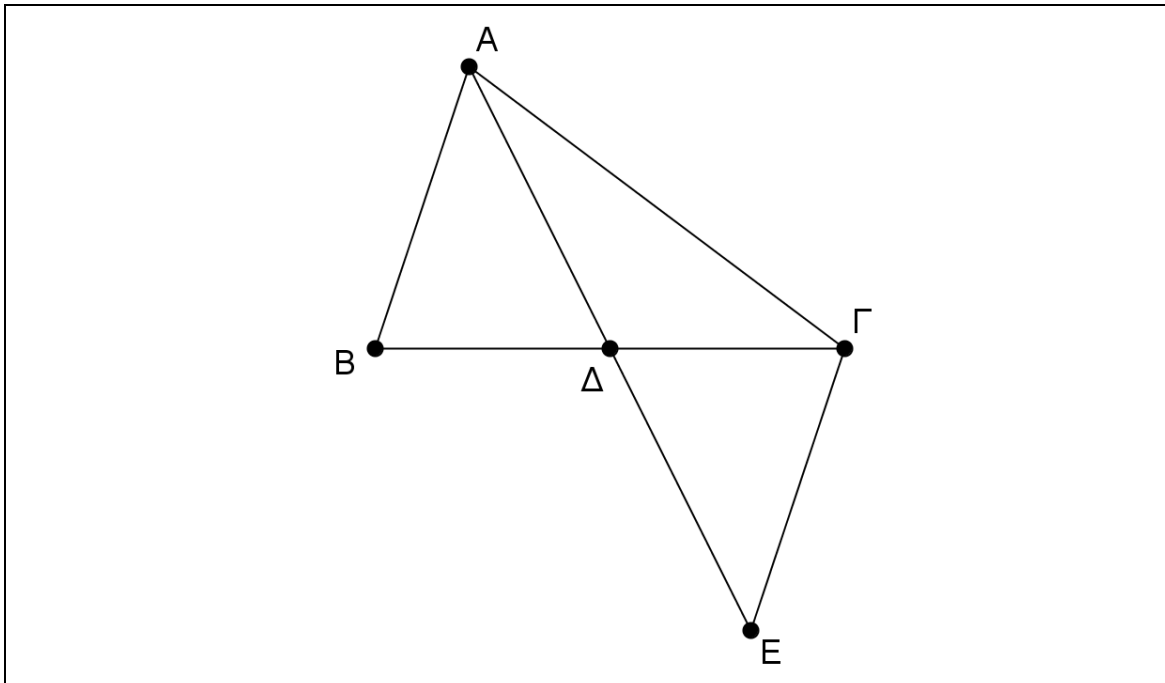
Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = GE$

Μονάδες 12

β) $AD < \frac{AB + AG}{2}$

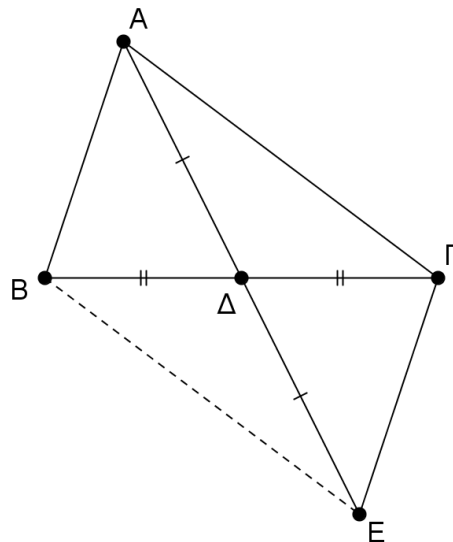
Μονάδες 13

**ΛΥΣΗ**

α) Το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παρ/μο αφού οι διαγώνιοι διχοτομούνται, άρα $AB = ΓΕ$.

β) Στο τρίγωνο $A\Delta E$ έχουμε από τριγωνική ανισότητα:

$$2A\Delta = AE < A\Gamma + ΓΕ = A\Gamma + AB \Rightarrow A\Delta < \frac{AB + A\Gamma}{2}$$

**ΑΣΚΗΣΗ (2_3426)**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας του Γ , η οποία τέμνει την πλευρά AB στο Δ . Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$.

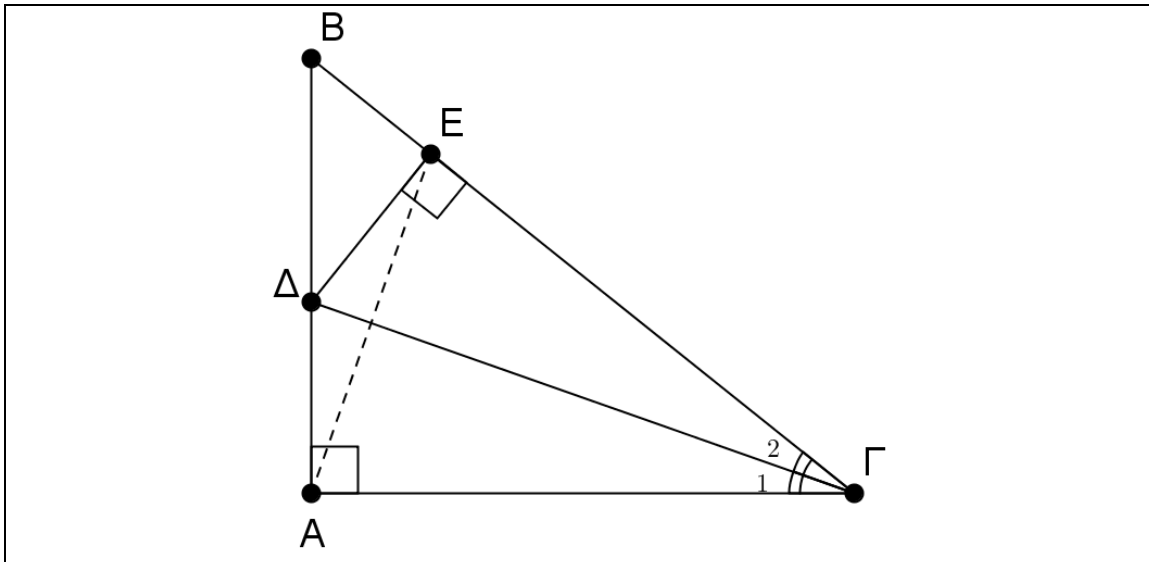
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta ΓΕ$ είναι ίσα.

Μονάδες 13

β) Η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AE .

Μονάδες 12

**ΛΥΣΗ**

α) Έχουμε $\hat{\Delta\Gamma\Delta} = \hat{\Delta\Gamma\epsilon}$, γιατί

- $\angle A = \angle \epsilon = 90^\circ$
- $\angle 1 = \angle 2$ (ΓΔ διχοτόμος)
- $\Delta\Gamma = \Delta\Gamma$ (κοινή πλευρά)

β) Επειδή $\Delta\Gamma = \Gamma\epsilon$ το $\triangle \Gamma\Delta\epsilon$ είναι ισοσκελές, άρα η διχοτόμος ΓΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ.

ΑΣΚΗΣΗ (2_4974)

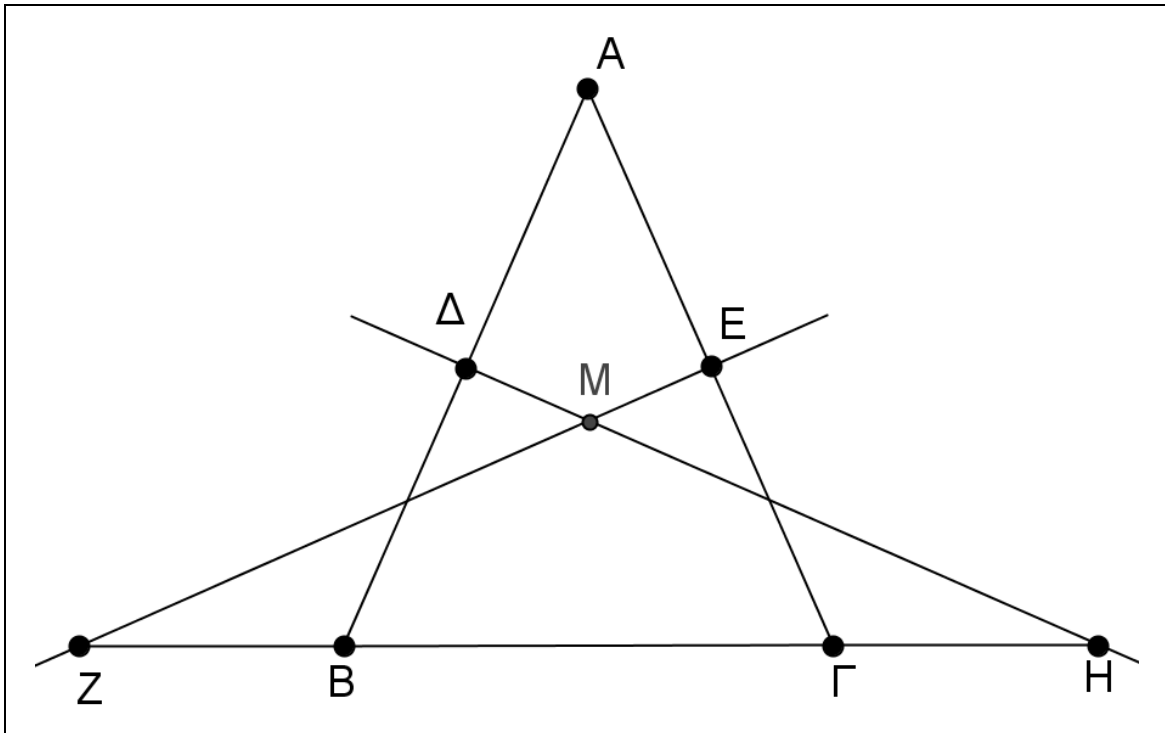
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Οι μεσοκάθετες ευθείες των ίσων πλευρών του τέμνονται στο Μ και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση ΒΓ στα Ζ και Η.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ.

Μονάδες 15

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΖΗ είναι ισοσκελές.

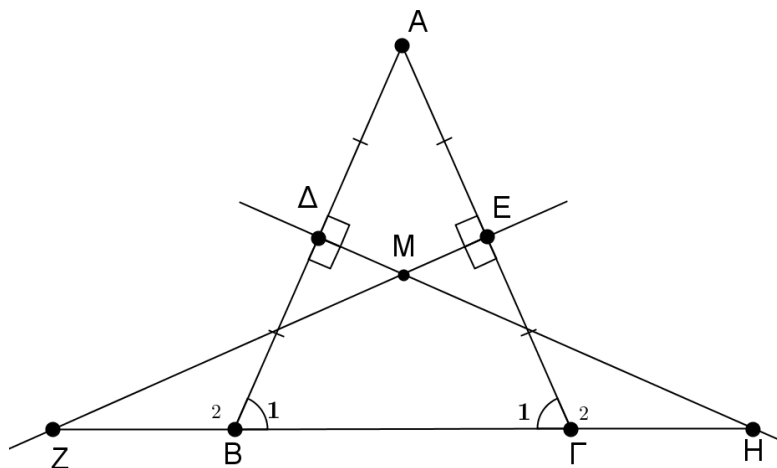
Μονάδες 10

**ΛΥΣΗ**

α) Έχουμε $\triangle ABH = \triangle EZG$, γιατί

- $\angle \Delta = \angle E = 90^\circ$
- $\angle ABH = \angle EZG$ (οι γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ)
- $AB = EZ$ (ως μισά των ίσων πλευρών AB, AG)

β) Από το προηγούμενη σύγκριση τριγώνων έχουμε, $H = Z$ άρα το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές.

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5017)**

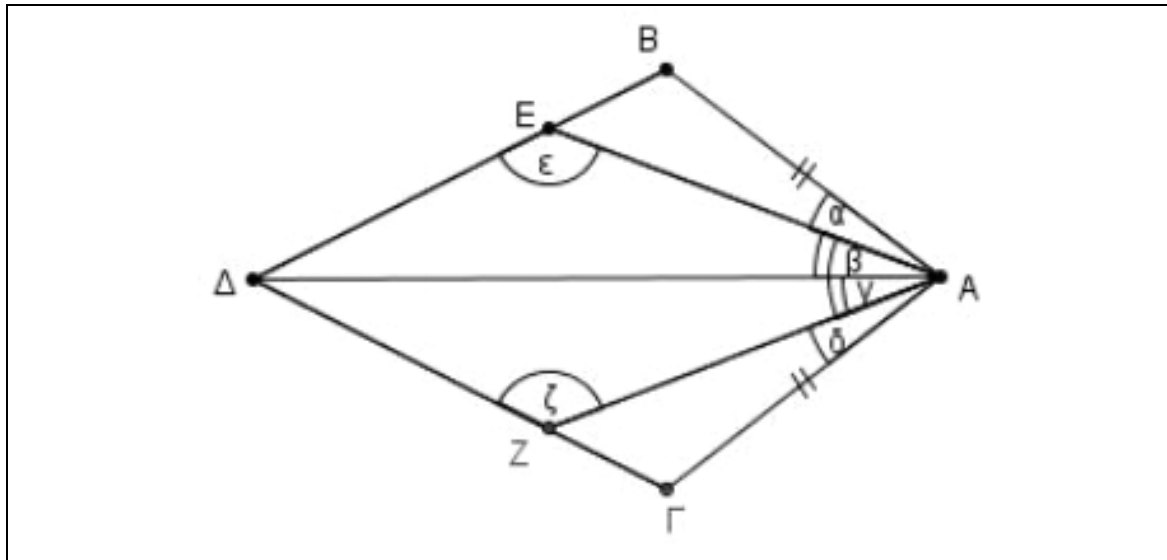
Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma$ και $AB = AG$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABΔ και AGΔ είναι ίσα

Μονάδες 12

β) Οι γωνίες ε και ζ είναι ίσες

Μονάδες 13

**Λύση**

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΖ

1) ΑΔ κοινή

2) ΑΒ=ΑΓ (από δεδομένα)

3) ΒΑΔ = ΓΑΔ (ως άθροισμα ίσων γωνιών)

Από Π-Γ-Π τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΖ είναι ίσα

β) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΖ είναι ίσα έχουμε ότι ΖΓΑ = ΕΒΑ

Η γωνία ζ είναι εξωτερική της ΓΖΑ στο τρίγωνο ΑΓΖ οπότε $\zeta = \text{ΖΓΑ} + \delta$

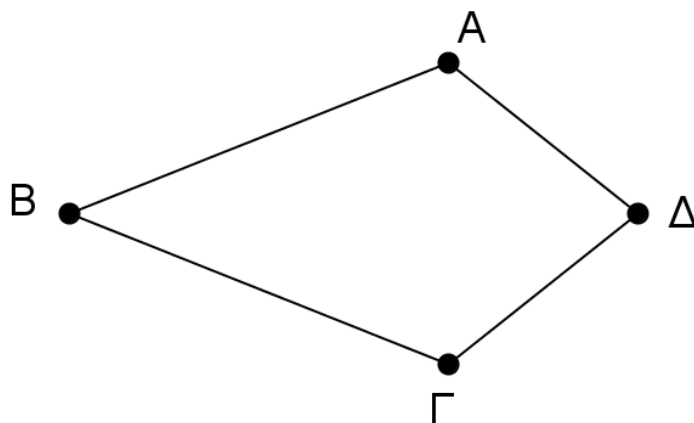
Η γωνία ε είναι εξωτερική της ΑΕΒ στο τρίγωνο ΑΕΒ οπότε $\varepsilon = \text{ΑΒΕ} + \alpha$

Έτσι λοιπόν είναι

$$\varepsilon = \text{ΑΒΕ} + \alpha \stackrel{\substack{\text{ΑΒΕ}=\text{ΖΓΑ} \\ \alpha=\delta}}{=} \text{ΖΓΑ} + \delta = \zeta$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5029)

Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.



Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{BA\Gamma} = \hat{B\Gamma A}$

(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

β) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Από την υπόθεση είναι $BA = BG$ άρα το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές οπότε οι προσκείμενες στη βάση του γωνίες θα είναι ίσες άρα

$$\hat{BAG} = \hat{BGA}$$

β) Επειδή

$$\hat{A} = \hat{G} \text{ και } \hat{BAG} = \hat{BGA}$$

θα είναι και

$$\hat{DAG} = \hat{DGA}$$

ως διαφορά ίσων γωνιών.

Άρα το τρίγωνο ADG είναι ισοσκελές με $AD = DG$.

γ) Από τα προηγούμενά να ερωτήματα έχουμε ότι $BA = BG$ και $AD = DG$ δηλαδή τα σημεία B και D ισαπέχουν από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος AG , άρα το BD είναι η μεσοκάθετος του AG

ΑΣΚΗΣΗ (2_5035)

Αν για το ισοσκελές τρίγωνο ABG ($AB = AG$) του σχήματος ισχύουν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$ να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

α) Τα τρίγωνα AEB και AEG είναι ίσα.

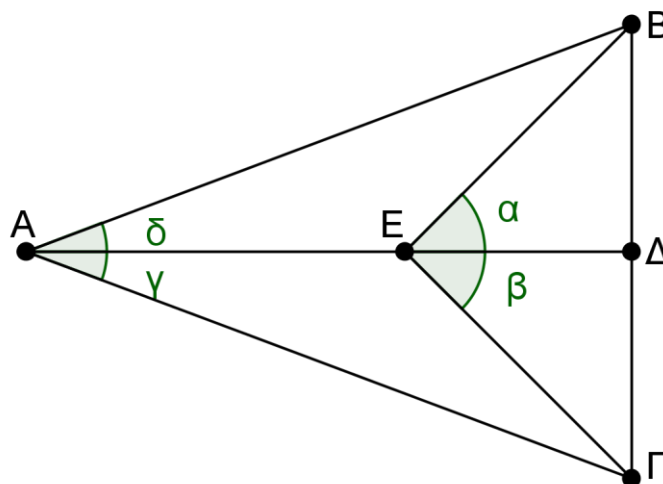
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο GEB είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία AD είναι μεσοκάθετος του τμήματος BG .

(Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ τα οποία έχουν:

i) κοινή πλευρά την ΑΕ

ii) $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ από την υπόθεση

iii) $AB = AG$ από την υπόθεση

Άρα τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα (Π – Γ – Π)

β) Αφού τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα θα έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα άρα και $EB = EG$ δηλαδή το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές.

γ) Αφού τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα θα έχουν και $AB = AG$. Όμως είναι και $EB = EG$ δηλαδή τα σημεία Α και Ε ισαπέχουν από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ άρα ανήκουν στην μεσοκάθετο του ΒΓ. Οπότε και η ΑΔ είναι η μεσοκάθετος του ΒΓ.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5048)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε $KB = KG$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα.

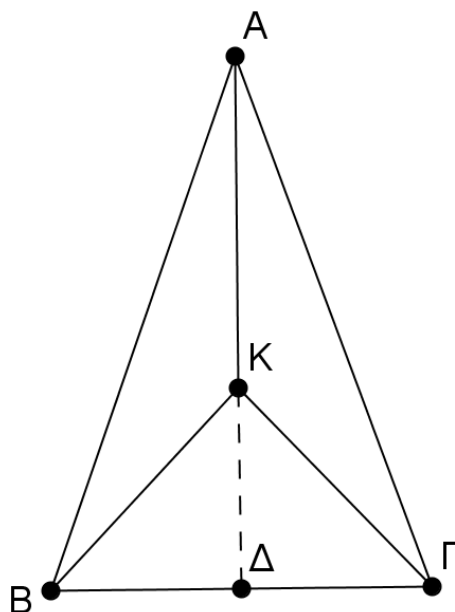
(Μονάδες 12)

β) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{BAG}$

(Μονάδες 6)

γ) Η προέκταση της ΑΚ διχοτομεί τη γωνία $\hat{BKG}$ του τριγώνου ΒΚΓ.

(Μονάδες 7)

**ΛΥΣΗ**

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ τα οποία έχουν:

i) $AB = AG$ από υπόθεση

ii) $KB = K\Gamma$ από υπόθεση

iii) AK κοινή πλευρά

Οπότε τα τρίγωνα BAK και KAG είναι ίσα αφού έχουν τρεις πλευρές ίσες ($\Pi - \Pi - \Pi$)

β) Επειδή τα τρίγωνα BAK και KAG είναι ίσα θα έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα

δηλαδή θα είναι και $\hat{BAK} = \hat{GAK}$, άρα η AK είναι διχοτόμος της γωνίας BAG

γ) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές η AK θα είναι και διάμεσος δηλαδή θα περνά από το μέσο της $B\Gamma$, έστω Δ . Τότε στο ισοσκελές τρίγωνο $KB\Gamma$ το $K\Delta$ είναι διάμεσος άρα θα είναι και διχοτόμος της γωνίας $BK\Gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5053)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και προς τα δυο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $B_{εξ} = \Gamma_{εξ}$

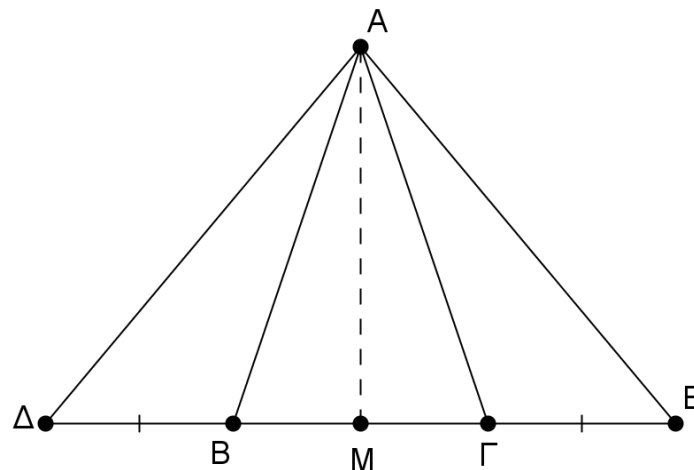
(Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

γ) Η διάμεσος AM του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι και διάμεσος του τριγώνου $A\Delta E$.

(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ οπότε θα είναι και $B_{εξ} = \Gamma_{εξ}$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ τα οποία έχουν

i) $AB = A\Gamma$ από υπόθεση

ii) $B\Delta = \Gamma E$ από υπόθεση

iii) $B_{εξ} = \Gamma_{εξ}$ από το α) ερώτημα

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα αφού έχουν δυο πλευρές και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες.

γ) Είναι:

$MB = MG$ γιατί AM διάμεσος του $AB\Gamma$

$BD = GE$ από υπόθεση

Προσθέτοντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη έχουμε

$$MB + BD = MG + GE \Rightarrow MD = ME$$

Άρα η AM είναι διάμεσος και του τριγώνου ADE

ΑΣΚΗΣΗ (2_5075)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$) και σημείο M εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε $MB = MG$. Να αποδείξετε ότι:

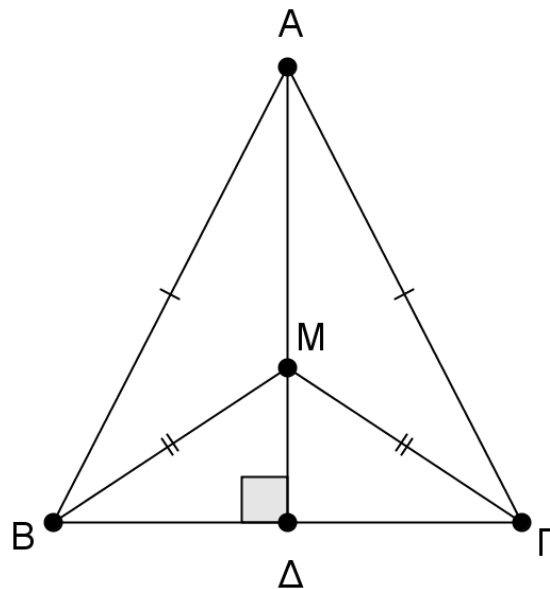
α) Τα τρίγωνα AMB και $AM\Gamma$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Η ευθεία AM διχοτομεί τη γωνία $\widehat{BM\Gamma}$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ



α) Συγκρίνουμε τρίγωνα AMB και $AM\Gamma$ τα οποία έχουν:

i) $AB = AG$ από υπόθεση

ii) $MB = MG$ από υπόθεση

iii) AM κοινή πλευρά

Άρα τα τρίγωνα AMB και $AM\Gamma$ έχουν δυο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία ίσες, άρα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα AMB και $AM\Gamma$ είναι ίσα θα έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα άρα θα είναι και $\widehat{BAM} = \widehat{MAG}$ δηλαδή η AM είναι διχοτόμος της γωνίας A , άρα η AD θα είναι διάμεσος και ύψος. Στο ισοσκελές τρίγωνο $BM\Gamma$ η MD είναι διάμεσος άρα θα είναι και διχοτόμος. Οπότε η ευθεία AM διχοτομεί τη γωνία $\widehat{BM\Gamma}$.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5127)

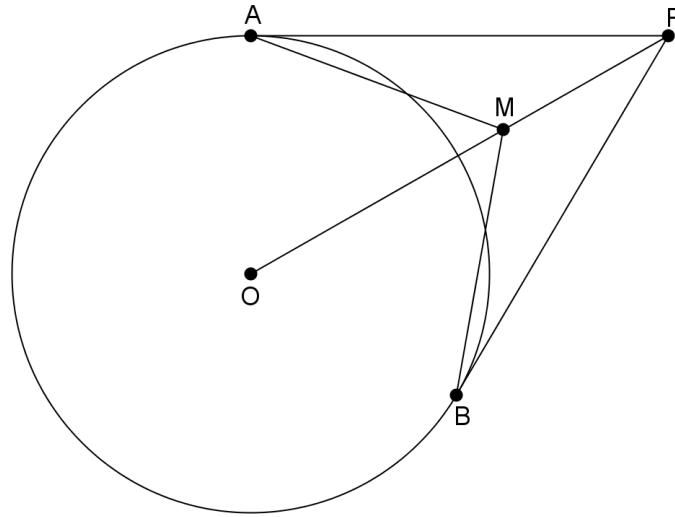
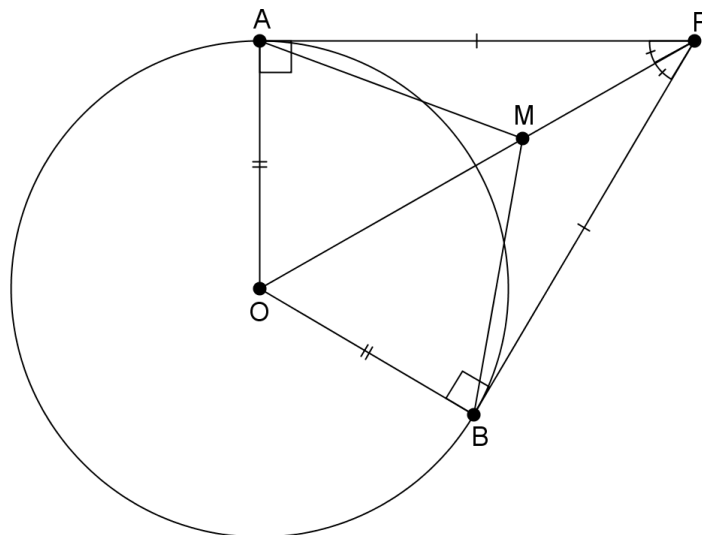
Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP , να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) οι γωνίες $\hat{MAO}$ και $\hat{MBO}$ είναι ίσες.

Μονάδες 13

**ΛΥΣΗ**

α) Συγκρίνω τα τρίγωνα PAM και PMB τα οποία έχουν :

$PM = PM$ (κοινή πλευρά)

$PA = PB$ (ως εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που άγονται από σημείο εκτός αυτού)

$\hat{MPA} = \hat{MPB}$ (η διάκεντρος OP διχοτομεί την γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων)

Τα τρίγωνα έχουν δυο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία ίσες μια προς μια, άρα θα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα.

Δηλαδή θα έχω

[lisari – team](#)

«Β Θέματα»

$$MA = MB, \hat{M\hat{A}P} = \hat{M\hat{B}P} \text{ (1) και } \hat{A\hat{M}P} = \hat{B\hat{M}P}$$

β) Φέρνω τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ οι οποίες είναι κάθετες στα εφαπτόμενα τμήματα στα σημεία επαφής.

Οπότε :

$$\hat{O\hat{A}P} = \hat{O\hat{B}P} = 90^\circ \Rightarrow \hat{M\hat{A}O} + \hat{M\hat{A}P} = \hat{M\hat{B}O} + \hat{M\hat{B}P} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \hat{M\hat{A}O} = \hat{M\hat{B}O}$$

Β Τρόπος:

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΜΑΟ και ΜΒΟ τα οποία έχουν :

ΜΟ = ΜΟ (κοινή πλευρά)

ΜΑ = ΜΒ (από α) ερώτημα)

ΟΑ = ΟΒ (ως ακτίνες κύκλου)

Τα τρίγωνα έχουν τρεις πλευρές μια προς μια ίσες , άρα θα είναι ίσα , οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα .

Δηλαδή θα έχω $\hat{M\hat{A}O} = \hat{M\hat{B}O}$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5136)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και στις ίσες πλευρές ΑΒ , ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $AD = \frac{1}{3} AB$ και $AE = \frac{1}{3} AG$. Αν Μ το μέσο της ΒΓ , να αποδείξετε ότι :

α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα .

Μονάδες 5

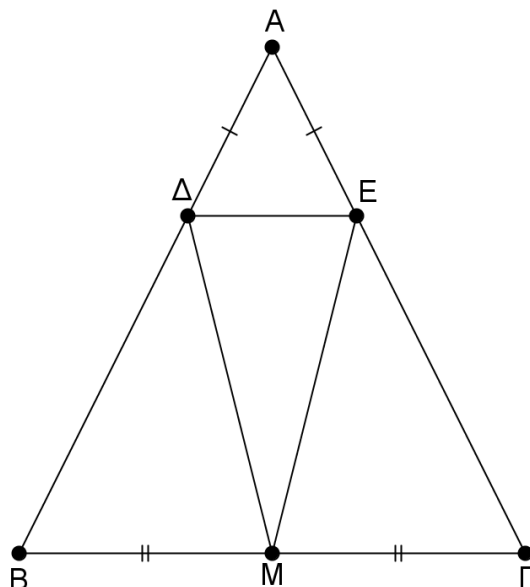
β) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα .

Μονάδες 10

γ) το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές .

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ



α) Επειδή $AB = AG$ θα είναι

$$AD = \frac{1}{3} AB = \frac{1}{3} AB = AE$$

Οπότε,

$$AB = AG \Rightarrow \cancel{AD} + DB = \cancel{AE} + EG \Rightarrow DB = EG.$$

β) Συγκρίνω τα τρίγωνα $BM\Delta$ και $ME\Gamma$ τα οποία έχουν :

$DB = EG$ (από α) ερώτημα)

$BM = MG$ (αφού M μέσο της $B\Gamma$)

$\hat{B} = \hat{G}$ (ως γωνίες βάσης ισοσκελούς τριγώνου)

Τα τρίγωνα έχουν δυο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία ίσες μια προς μια, άρα θα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα.

Δηλαδή

$$MD = ME, \hat{B\Delta M} = \hat{G\Gamma E} \text{ και } \hat{B\Delta M} = \hat{G\Gamma E}$$

γ) Από β) ερώτημα έχω ότι $MD = ME$, άρα το τρίγωνο DEM είναι ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5139)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο KBG ($KA = KB$) και $K\Gamma$ διχοτόμος της γωνίας K . Στην προέκταση της BA (προς το A) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της AB (προς το B) παίρνουμε σημείο M , έτσι ώστε $A\Lambda = BM$. Να αποδείξετε ότι :

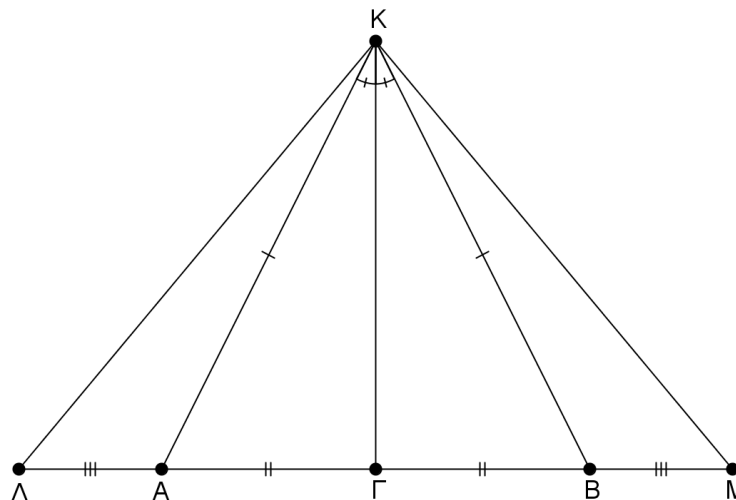
α) το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισοσκελές

Μονάδες 12

β) η $K\Gamma$ είναι διάμεσος του τριγώνου $K\Lambda M$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ



α) Συγκρίνω τα τρίγωνα $K\Lambda\Lambda$ και KBM τα οποία έχουν :

$KA = KB$ (από υπόθεση)

$A\Lambda = BM$ (από υπόθεση)

$\hat{\Lambda AK} = \hat{MBK}$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών A, B του ισοσκελούς τριγώνου)

Τα τρίγωνα έχουν δυο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία ίσες μια προς μια, άρα θα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα. Δηλαδή θα έχω $ΚΛ = ΚΜ$, $\hat{ΑΚΛ} = \hat{ΒΚΜ}$ και $\hat{Λ} = \hat{Μ}$

β) Η ΚΓ είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο ΚΒΓ οπότε θα είναι ύψος και διάμεσος, επομένως $ΚΓ \perp ΑΒ$.

Το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές αφού από β) ερώτημα έχω ότι $ΚΛ = ΚΜ$ και επιπλέον $ΚΓ \perp ΛΜ$, οπότε η ΚΓ είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΚΛΜ, άρα θα είναι διχοτόμος και διάμεσος.

Β' τρόπος

Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΓΛ και ΚΓΜ τα οποία έχουν:

$ΚΓ = ΚΓ$ (κοινή πλευρά).

$ΚΛ = ΚΜ$ (από β) ερώτημα), άρα είναι ίσα, οπότε και $ΛΓ \perp ΓΜ$ άρα Γ μέσο της ΛΜ, οπότε ΚΓ διάμεσος του ΚΛΜ.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5144)

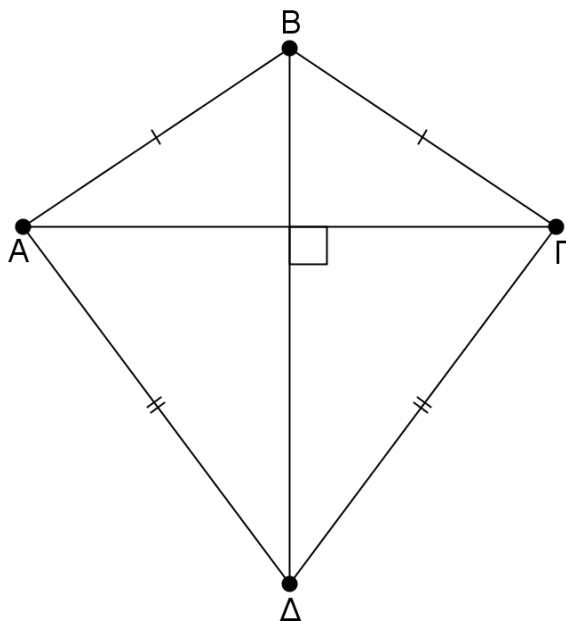
Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $ΒΑ = ΒΓ$ και $ΔΑ = ΔΓ$. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετραπλεύρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι:

α) Η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών Β και Δ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Μονάδες 12

β) Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.

Μονάδες 13



ΛΥΣΗ

α) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ τα οποία έχουν:

$ΒΑ = ΒΓ$ (από υπόθεση)

$ΔΑ = ΔΓ$ (από υπόθεση)

$ΒΔ = ΒΔ$ (κοινή πλευρά)

Τα τρίγωνα έχουν τρεις πλευρές ίσες μια προς μια, άρα θα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα.

Δηλαδή θα έχω $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}\hat{B}\hat{\Delta}$ (1), $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{B}$ (2) και $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$

Από την σχέση (1) έχω ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β και από την σχέση (2) έχω ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.

β) Τα σημεία Β και Δ ισαπέχουν από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ, οπότε βρίσκονται πάνω στην μεσοκάθετο του ΑΓ. Επομένως η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5157)

Δίνεται γωνία xOy και η διχοτόμος της Οδ. Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Οx και Οy αντίστοιχα, τέτοια ώστε $OA = OB$. Να αποδείξετε ότι :

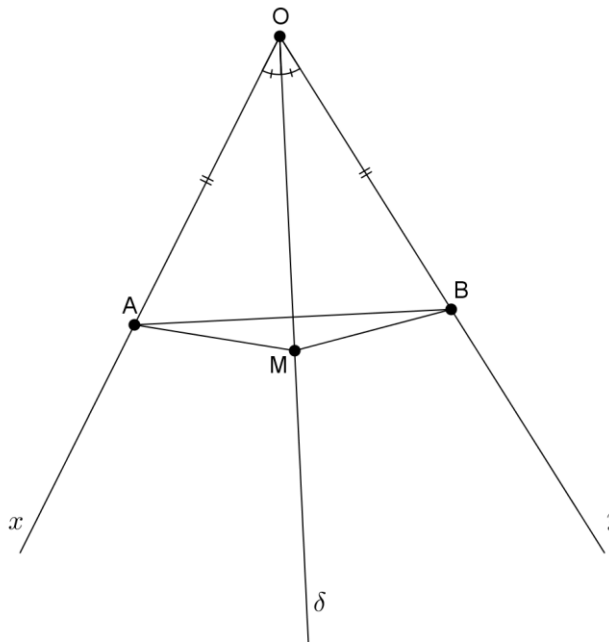
α) $MA = MB$.

Μονάδες 15

β) Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας AMB.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ



α) Φέρνουμε τις MA, MB και συγκρίνουμε τα τρίγωνα OMA και OMB τα οποία έχουν :

$OM = OM$ (κοινή πλευρά)

$OA = OB$ (από υπόθεση)

$\hat{A}\hat{O}\hat{M} = \hat{B}\hat{O}\hat{M}$ (διότι Οδ διχοτόμος της γωνίας xOy)

Τα τρίγωνα έχουν δυο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία ίσες μια προς μια, άρα θα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα. Δηλαδή θα

έχω $AM = MB$, $\hat{O}\hat{M}\hat{A} = \hat{O}\hat{M}\hat{B}$ και $\hat{O}\hat{A}\hat{M} = \hat{O}\hat{B}\hat{M}$

β) Από α) ερώτημα έχω ότι $\hat{OMA} = \hat{OMB}$, επομένως η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας AMB

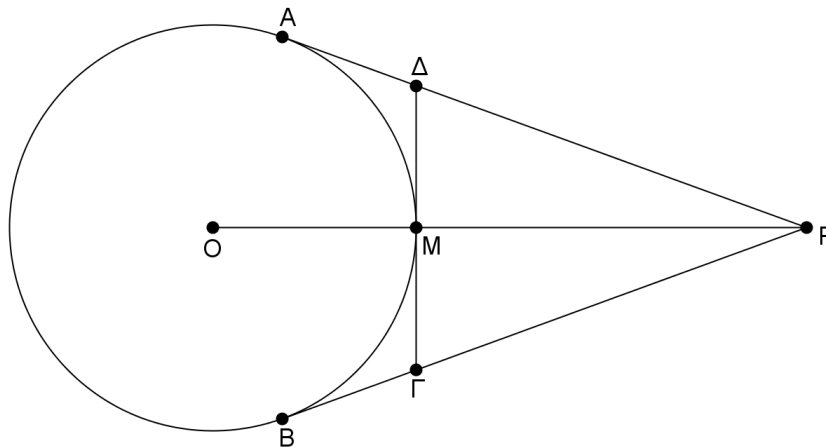
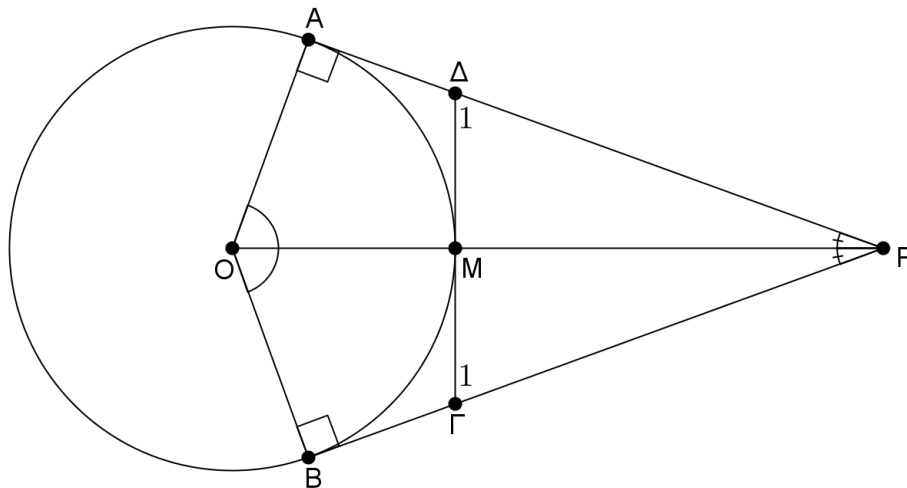
ΑΣΚΗΣΗ (2_5567)

Δίνεται κύκλος κέντρου Ο, και από ένα σημείο Ρ εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Το τμήμα ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ και η εφαπτομένη του κύκλου στο Μ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 13

β) Αν η γωνία ΑΡΒ είναι 40° να υπολογίσετε την γωνία ΑΟΒ.

Μονάδες 12**ΛΥΣΗ**

α) Η ΟΜ είναι ακτίνα στο σημείο επαφής της εφαπτομένης ΓΔ, οπότε $PO \perp \Gamma\Delta$

Η ΡΟ είναι διακεντρική ευθεία, άρα $\hat{APO} = \hat{OPB}$ (1).

Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα ΡΜΔ και ΡΜΓ τα οποία έχουν :

$PM = PM$ (κοινή πλευρά)

$\hat{APO} = \hat{OPB}$ (λόγω της (1))

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια οξεία γωνία ίση και από μια κάθετη πλευρά ίσες, άρα θα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα.

Δηλαδή θα έχω :

$$PA = PG, \quad PM = MG \quad \text{και} \quad \hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1.$$

Επειδή $PA = PG$, το τρίγωνο PAG είναι ισοσκελές.

β) Από άθροισμα γωνιών στο τετράπλευρο $PAOB$ έχω

$$\hat{APB} + \hat{PBO} + \hat{AOB} + \hat{OAP} = 360^\circ \Rightarrow 40^\circ + 90^\circ + \hat{AOB} + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \hat{AOB} = 140^\circ$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5573)

Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες A, B είναι ορθές και επιπλέον $AD = BG$ και $AG = BE$.

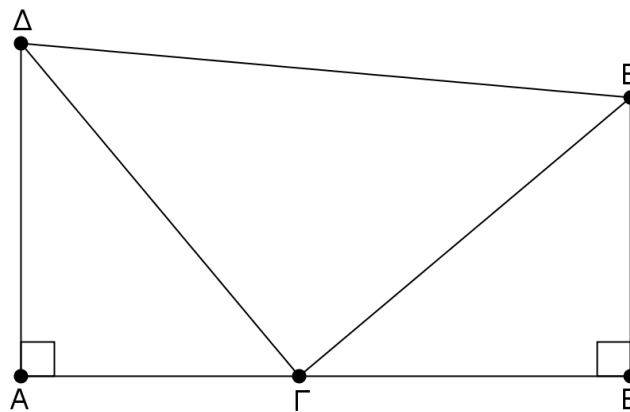
Να αποδείξετε ότι :

α) Να τρίγωνα AGD και BGE είναι ίσα.

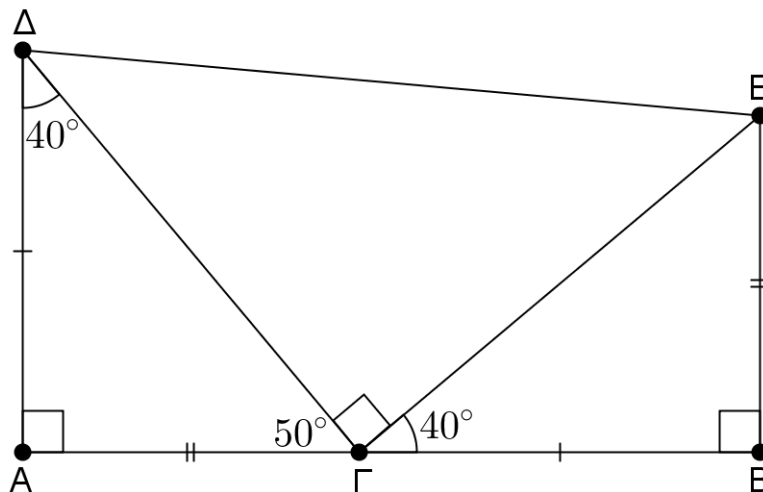
Μονάδες 13

β) Αν η γωνία $\hat{EGB} = 40^\circ$ τότε το τρίγωνο DGE είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Μονάδες 12



ΛΥΣΗ



α) Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα AGD και BGE τα οποία έχουν:

[lisari – team](#)

«Β Θέματα»

$AD = BG$ (από υπόθεση)

$AG = BE$ (από υπόθεση)

Τα τρίγωνα έχουν τις δυο κάθετες πλευρές τους ίσες μια προς μια, άρα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα. Δηλαδή θα έχω

$$\Gamma\Delta = \Gamma E, \hat{A}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}\hat{E}B \text{ και } \hat{A}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{E}\hat{\Gamma}B$$

β) Είναι $\hat{E}\hat{\Gamma}B = \hat{A}\hat{\Delta}\Gamma = 40^\circ$ (από α) ερώτημα).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές, άρα

$$\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma + \hat{A}\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ \Rightarrow 40^\circ + \hat{A}\hat{\Gamma}\Delta + 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow \hat{A}\hat{\Gamma}\Delta = 50^\circ,$$

άρα

$$\hat{A}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}\hat{E}B = 50^\circ$$

Η γωνία $A\Gamma B$ είναι ευθεία οπότε :

$$\hat{A}\hat{\Gamma}B = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}\hat{\Gamma}\Delta + \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E + \hat{E}\hat{\Gamma}B = 180^\circ \Rightarrow 50^\circ + \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E = 90^\circ$$

Επίσης από α ερώτημα έχω ότι $\Gamma\Delta = \Gamma E$.

Επομένως το τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5580)

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία A . Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B , η ΔE είναι κάθετη στη $B\Gamma$ και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας B . Να αποδείξετε ότι:

α) $AD = \Delta E$

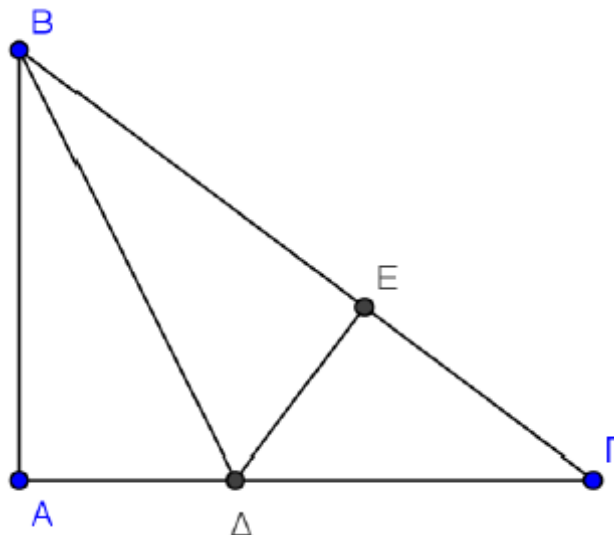
Μονάδες 8

β) $AD < \Delta\Gamma$

Μονάδες 9

γ) $A\Gamma < AB$

Μονάδες 8



Λύση

α) Το Δ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας B , άρα θα ισαπέχει από τις πλευρές της, άρα $\Delta A = \Delta E$.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι: $\Delta E < \Delta \Gamma$.

Όμως στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta E \Gamma$, η $\Delta \Gamma$ είναι η υποτείνουσα, άρα είναι μεγαλύτερη από την κάθετη πλευρά ΔE .

γ) Από τα δεδομένα έχουμε, $B < \Gamma$, άρα και οι απέναντι πλευρές του έχουν την ίδια διάταξη δηλαδή, $\beta < \gamma$ οπότε $A\Gamma < AB$.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5582)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) θεωρούμε τα σημεία E και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε $A\Delta = AE$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \Gamma\Delta$.

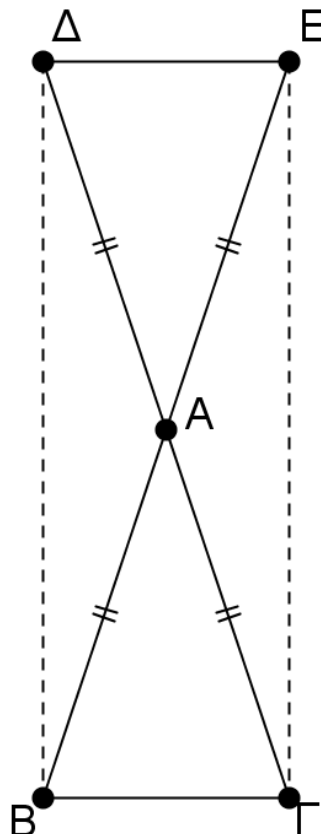
Μονάδες 6

β) $B\Delta = \Gamma E$.

Μονάδες 10

γ) $\Delta B\Gamma = E\Gamma B$.

Μονάδες 9

Λύση

α) Έχουμε,

$$\left. \begin{array}{l} AB = AG \text{ από την υπόθεση} \\ AE = AD \text{ από την υπόθεση} \end{array} \right\} \Rightarrow AB + AE = AG + AD \Rightarrow BE = GD$$

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle ADB$, $\triangle AEG$

$AD = AE$ (υπόθεση)

$\angle DAB = \angle EAG$ (κατακορυφήν γωνίες)

$AB = AG$ (πλευρές ισοσκελούς τριγώνου)

άρα από το Κριτήριο Π – Γ – Π, έχουμε $BD = EG$.

γ) Από την ισότητα των τριγώνων του ερωτήματος (β) έχουμε $\angle BDA = \angle EGA$ (1) αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές AD και AE αντίστοιχα. Επίσης έχουμε

$$\angle ABG = \angle AGB \quad (2)$$

ως γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ABG . Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\angle BDA + \angle B = \angle EGA + \angle G \Rightarrow \angle BDG = \angle EGB,$$

που είναι και το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5591)

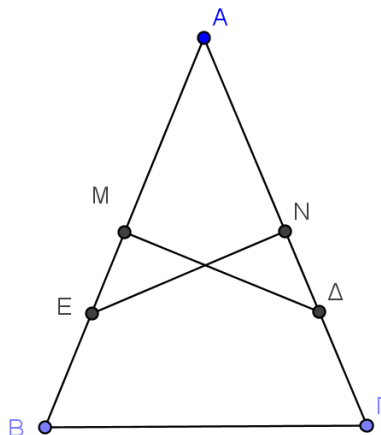
Δίνεται τρίγωνο ABG και MD , NE οι μεσοκάθετοι των πλευρών του AB , AG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $MD = NE$ τότε το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές.

Μονάδες 12

β) Αν $AB = AG$ τότε $MD = NE$

Μονάδες 13



Λύση

α) Συγκρίνοντας τα τρίγωνα AMD και ANE έχουμε:

- είναι ορθογώνια ($\Delta M \perp AB$ και $EN \perp AG$, αφού οι MD , NE είναι μεσοκάθετοι των πλευρών AB , AG αντίστοιχα)
- $MD = NE$ (από την υπόθεση) και
- Έχουν τη γωνία A κοινή,

άρα και $\angle ADM = \angle AEN$.

Τα τρίγωνα AMD και ANE είναι ίσα και συνεπώς έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα.

Οπότε ισχύει και $AM = AN$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\angle ADM$ και $\angle AEN$ αντίστοιχα.

Τέλος, επειδή τα σημεία M και N είναι τα μέσα των AB και AG αντίστοιχα, έχουμε:

$$AM = AN \Rightarrow 2AM = 2AN \Rightarrow AB = AG,$$

που σημαίνει ότι το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές.

β) Συγκρίνοντας τα τρίγωνα AMD και ANE έχουμε:

- είναι ορθογώνια ($\Delta M \perp AB$ και $EN \perp AG$, αφού οι MD , NE είναι μεσοκάθετοι των πλευρών AB , AG αντίστοιχα)
- $AM = AN$ (ως μισά των ίσων πλευρών AB και AG αντίστοιχα) και
- Έχουν τη γωνία A κοινή.

Τα ορθογώνια τρίγωνα AMD και ANE είναι ίσα και συνεπώς έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα.

Οπότε $MD = NE$, αφού αυτές οι πλευρές βρίσκονται απέναντι από την κοινή γωνία A .

ΑΣΚΗΣΗ (2_5595)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABG με $AB = AG$. Στην προέκταση της BG (προς το G) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της GB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $G\Delta = BE$. Από το Δ φέρουμε ΔH κάθετη στην ευθεία AG και από το E φέρουμε EZ κάθετη στην ευθεία AB .

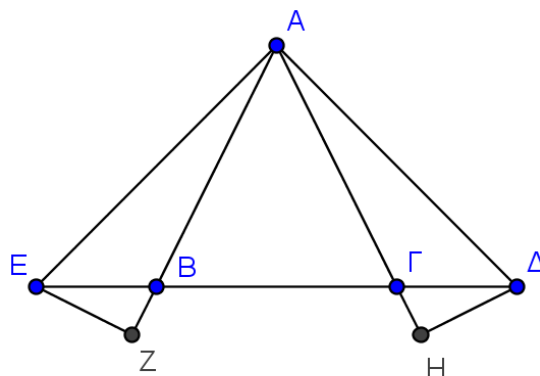
Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = AE$.

Μονάδες 12

β) $EZ = \Delta H$.

Μονάδες 13



Λύση

α) Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ABE και $AG\Delta$ έχουμε:

- $AB = AG$ (αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές)
- $EB = G\Delta$ (από την υπόθεση) και
- $\angle ABE = \angle AG\Delta$ (ως εξωτερικές και άρα παραπληρωματικές των ίσων γωνιών B και Γ αντίστοιχα του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$)

Από το κριτήριο $\Pi-\Gamma-\Pi$ τα τρίγωνα ABE και $AG\Delta$ είναι ίσα και συνεπώς έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα. Οπότε και οι τρίτες πλευρές τους είναι ίσες. Δηλαδή $AE = A\Delta$.

β) Συγκρίνοντας τα τρίγωνα EBZ και $G\Delta H$ έχουμε:

- είναι ορθογώνια (αφού $EZ \perp AB$ και $\Delta H \perp AG$ από την υπόθεση)
- $EB = G\Delta$ (από την υπόθεση) και
- $\angle EBZ = \angle G\Delta H$ (ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών B και Γ αντίστοιχα του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$)

Τα ορθογώνια τρίγωνα EBZ και $G\Delta H$ έχουν ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία και συνεπώς είναι ίσα. Οπότε έχουν και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα.

Άρα και $EZ = \Delta H$, αφού αυτές οι πλευρές βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες EBZ και $\Delta G\Delta H$ αντίστοιχα.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5597)

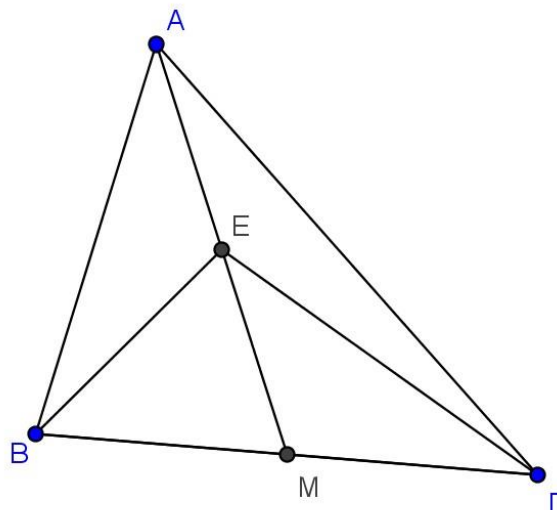
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου του AM . Αν $B\Gamma = 2BE$ να αποδείξετε ότι:

α) $\angle AEB = \angle EM\Gamma$.

Μονάδες 12

β) $AB = E\Gamma$.

Μονάδες 13

**Λύση**

α) Το τρίγωνο BEM είναι ισοσκελές αφού $BE = \frac{BG}{2} = BM$ (το M είναι μέσο της BG)

Στο ισοσκελές τρίγωνο BEM είναι $BEM = BME$. Η γωνία AEB είναι παραπληρωματική της BEM και η γωνία EMΓ είναι παραπληρωματική της γωνίας BME. Άρα ισχύει $AEB = EMΓ$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

β) Συγκρίνοντας τα τρίγωνα AEB και ΓEM έχουμε:

- $AE = EM$ (αφού το E είναι το μέσο της AM)
- $BE = MG$ (αφού $BE = \frac{BG}{2} = MG$) και
- $AEB = EMΓ$ (από το πρώτο ερώτημα)

Από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα AEB και ΓEM είναι ίσα και συνεπώς και οι τρίτες πλευρές τους είναι ίσες. Δηλαδή $AB = EG$.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5603)

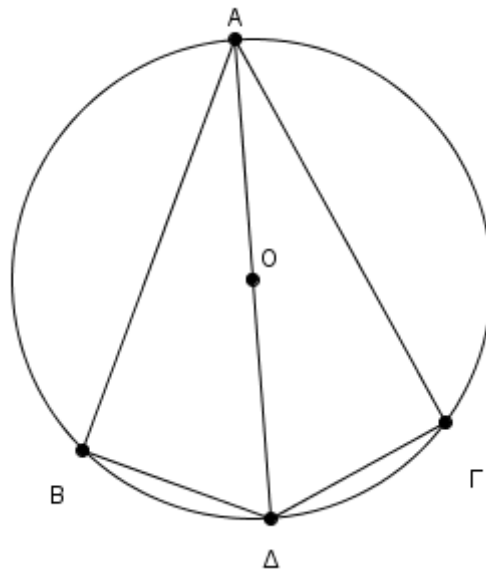
Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ. Αν η διάμετρος AD είναι διχοτόμος της γωνίας BAG, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τόξα BD και ΔΓ είναι ίσα.

Μονάδες 10

β) Τα τρίγωνα ABD και AGΔ είναι ίσα.

Μονάδες 15



Λύση

α) Η AD είναι διχοτόμος της γωνίας BAG και άρα $BAD = GAD$. Όμως εγγεγραμμένες γωνίες οι οποίες είναι ίσες βαίνουν σε ίσα τόξα.

Οπότε

$$BD = \Delta \Gamma.$$

β) Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ABD και AGΔ έχουμε:

- είναι ορθογώνια (οι γωνίες $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ημικύκλιο, είναι ορθές)
 - η $A\Delta$ είναι κοινή πλευρά και
 - $B\Delta = \Delta\Gamma$ (αφού σε ίσα τόξα αντιστοιχούν και ίσες χορδές)
- Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ έχουν κοινή υποτείνουσα και ίση μία κάθετη πλευρά και συνεπώς είναι ίσα.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5607)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τις διαμέσους του BK και $\Gamma\Lambda$, οι οποίοι τέμνονται στο σημείο Θ .

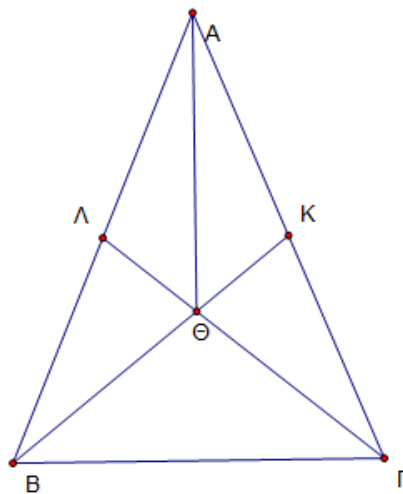
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι διάμεσοι BK και $\Gamma\Lambda$ είναι ίσες.

Μονάδες 12

β) Τα τρίγωνα $AB\Theta$ και $A\Gamma\Theta$ είναι ίσα

Μονάδες 13

**Λύση**

α) Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ABK και $A\Gamma\Lambda$ έχουμε:

- $AB = A\Gamma$ (αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές)
- $AK = A\Lambda$ (ως μισά ίσων πλευρών, αφού οι BK και $\Gamma\Lambda$ είναι διάμεσοι) και
- η γωνία A είναι κοινή στα δύο τρίγωνα.

Από το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$, τα τρίγωνα ABK και $A\Gamma\Lambda$ είναι ίσα και άρα έχουν και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα.

Δηλαδή ισχύει και $BK = \Gamma\Lambda$.

β) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και το σημείο Θ είναι το βαρύκεντρό του, αφού εκεί τέμνονται οι διάμεσοι BK και $\Gamma\Lambda$. Οπότε η $A\Theta$ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση $B\Gamma$, άρα είναι και διχοτόμος της γωνίας A .

Συγκρίνοντας τώρα τα τρίγωνα $AB\Theta$ και $A\Gamma\Theta$ έχουμε:

- η $A\Theta$ είναι κοινή πλευρά
- $AB = AG$ (αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές) και
- $BA\Theta = \Gamma A\Theta$ (αφού η $A\Theta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A)

Από το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ τα τρίγωνα $AB\Theta$ και $AG\Theta$ είναι ίσα.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5613)

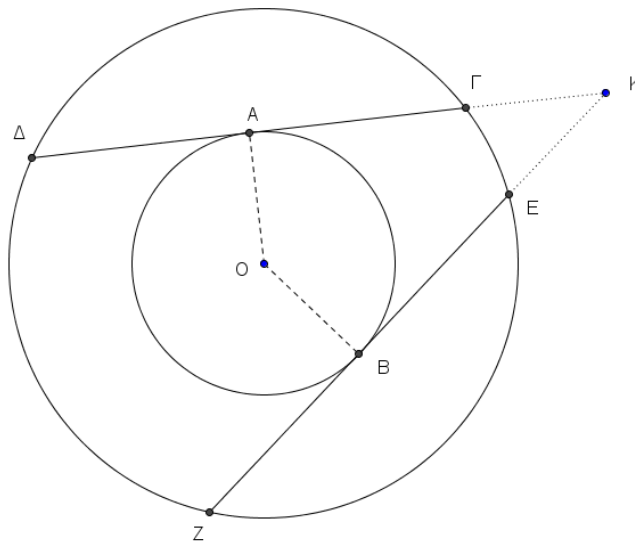
Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και ZE του κύκλου (O, R) εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$.

Μονάδες 12

β) Αν οι $\Delta\Gamma$ και ZE προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $KE\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 13



Λύση

α) Τα OA και OB είναι ακτίνες του κύκλου (O, ρ) άρα $OA = OB$ (1)

Η ευθεία $K\Delta$ είναι εφαπτομένη του κύκλου (O, ρ) στο A ενώ η ευθεία KZ είναι εφαπτομένη του ίδιου κύκλου στο σημείο του B επομένως $OA \perp \Delta\Gamma$ και $OB \perp ZE$ («η ακτίνα ενός κύκλου είναι κάθετη στην εφαπτομένη του στο σημείο επαφής»)

Τα ευθύγραμμα τμήματα $\Gamma\Delta$ και EZ είναι χορδές του κύκλου (O, R) και τα OA, OB είναι αποστήματα στις χορδές αυτές αντίστοιχα .

Εφόσον τα αποστήματα OA, OB είναι ίσα (1) άρα και οι αντίστοιχες χορδές $\Delta\Gamma, EZ$ είναι ίσες άρα $\boxed{\Delta\Gamma = EZ}$

β) Τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς τον κύκλο είναι ίσα.

Άρα $\boxed{KA = KB}$

Α μέσο της χορδής ΓΔ άρα $GA = AD$
 Β μέσο της χορδής ΕΖ άρα $EZ = BZ$ } $\Leftrightarrow GA = EB$ (μιά των ίσων χορδών ΓΔ, ΕΖ) Έχο
 υμε,

$\left. \begin{array}{l} KG = KA - AG \\ KE = KB - EB \end{array} \right\} \Leftrightarrow \boxed{KG = KE}$ (διαφορές ίσων τμημάτων), άρα ΚΓΕ ισοσκελές!

ΑΣΚΗΣΗ (2_5619)

Δίνεται γωνία xAy και η διχοτόμος της Αδ, από τυχαίο σημείο Β της Αy φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την Αδ στο Δ και την Αx στο Γ.

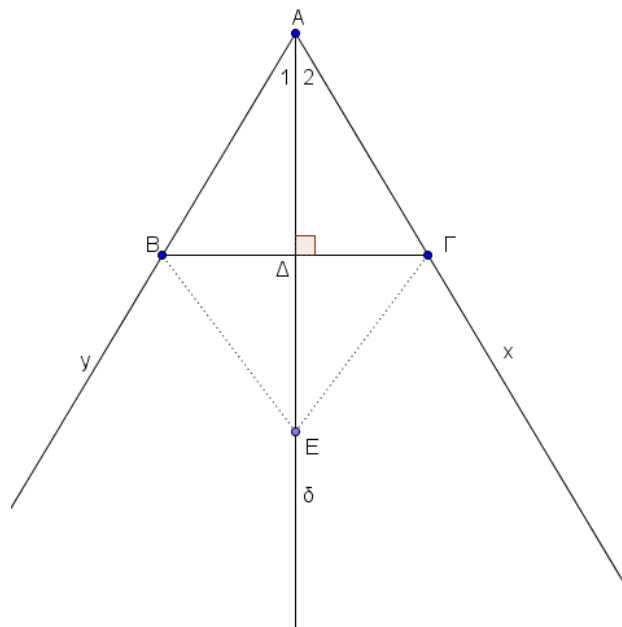
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) Το τυχαίο σημείο Ε της Αδ ισαπέχει από τα Β και Γ.

Μονάδες 13



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα διότι έχουν:

(1° στοιχείο) $\angle ADB = \angle ADG = 90^\circ$

(2° στοιχείο) $AD = AD$ (κοινή πλευρά)

(3° στοιχείο) $\angle A_1 = \angle A_2$ (ΑΔ διχοτόμος).

Άρα από κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα είναι ίσα άρα

$$AB = AG$$

β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές επομένως ΑΔ διάμεσος, διχοτόμος και ύψος της βάσης του ΒΓ. Επομένως η ημιευθεία Αδ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ.

Ως γνωστό κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος, άρα

$$EB = EF$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5628)

Δίνονται τα τμήματα $AG = BD$ που τέμνονται στο σημείο O έτσι ώστε $OA = OB$, και τα σημεία H και Z στα τμήματα AG και BD αντίστοιχα, έτσι ώστε $OH = OZ$.

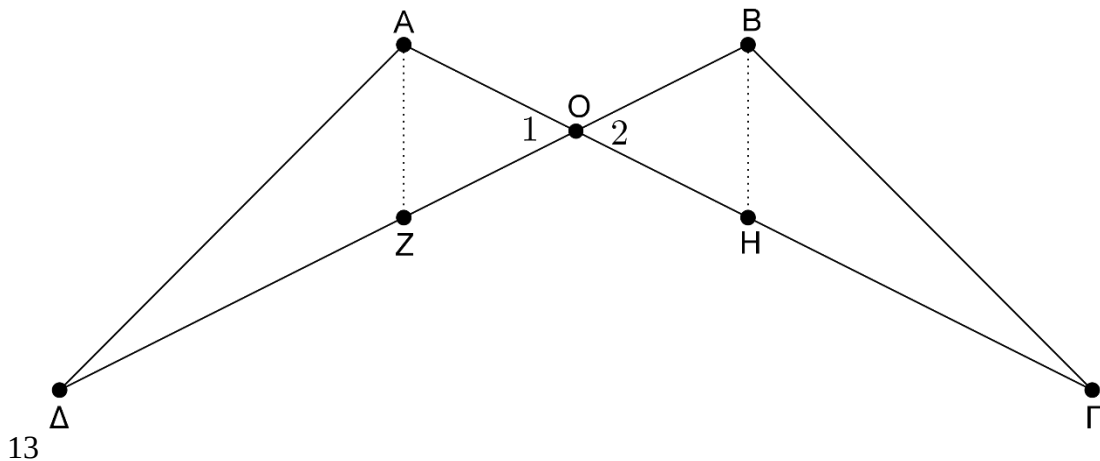
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες $\angle ADO$ και $\angle BGO$ είναι ίσες.

Μονάδες 12

β) $AZ = BH$

Μονάδες



Λύση

α) Συγκρίνω τα τρίγωνα $\triangle AOD$ και $\triangle BOG$ έχουμε:

(1° στοιχείο) : $\angle AOD = \angle BOG$ (κατακορυφήν)

(2° στοιχείο) : $OA = OB$ (υπόθεση)

(3° στοιχείο) : $OD = OG$

(διαφορές των ίσων ευθύγραμμων τμημάτων $AG=BD$ και $OA=OB$)

Αναλυτικά έχουμε,

$$\begin{cases} AG = BD \\ OA = OB \end{cases} \Rightarrow AG - OA = BD - OB \Rightarrow OG = OD$$

Άρα από κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ τα τρίγωνα είναι ίσα άρα: $\triangle ADO = \triangle BGO$

β) Από την προηγούμενη σύγκριση συμπεραίνουμε: $\triangle ADO = \triangle BGO$

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\triangle AZD$ και $\triangle BHG$

(1° στοιχείο) $\angle ADO = \angle BGO$ (συμπέρασμα του (α) ερωτήματος)

(2° στοιχείο) $AD = BG$ (συμπέρασμα από την σύγκριση των τριγώνων)

(3° στοιχείο) $ZD = HG$ (διαφορές των ίσων ευθυγράμμων τμημάτων $OD=OG$ και $OZ=OH$)

Αναλυτικά

[lisari – team](#)

«Β Θέματα»

$$\begin{cases} \text{ΟΔ} = \text{ΟΓ} \\ \text{ΟΖ} = \text{ΟΗ} \end{cases} \Rightarrow \text{ΟΔ} - \text{ΟΖ} = \text{ΟΓ} - \text{ΟΗ} \Rightarrow \text{ΖΔ} = \text{ΗΓ}$$

Άρα από κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα επομένως θα έχουν κατά υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα δηλαδή $\text{AZ} = \text{BH}$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5630)

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $\text{AB} = \text{AG}$. Από τα μέσα K και Λ των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα KE και ΛΖ στην πλευρά BG .

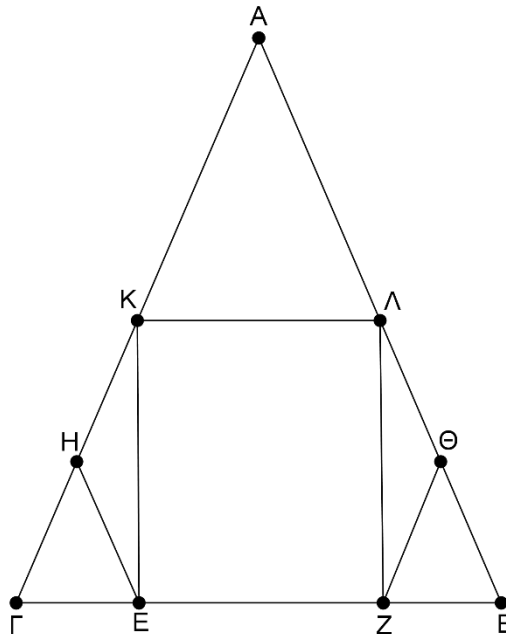
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα KEΓ και ΛΖB είναι ίσα.

Μονάδες 15

β) $\text{EH} = \text{ZΘ}$, όπου H , Θ τα μέσα των τμημάτων ΚΓ , ΛB αντίστοιχα.

Μονάδες 10

**Λύση**

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα KEΓ και ΛΖB έχουν:

(1° στοιχείο) $\text{ΚΓ} = \text{ΛB}$ (μισά των ίσων πλευρών AB , AG του ABΓ)

(2° στοιχείο) $\text{B} = \text{Γ}$ (προσκειμένες γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου).

Δηλαδή έχουν τις υποτείνουσες ίσες και μια οξεία γωνία του ενός ίση με μια οξεία γωνία του άλλου.

Άρα τα τρίγωνα KEΓ και ΛΖB είναι ίσα.

β) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΓHE και ZΘB τα οποία έχουν

(1° στοιχείο) $\text{ΓE} = \text{ZB}$ (στοιχείο που προκύπτει από την ισότητα των τριγώνων ΓKE και ZΛB)

(2° στοιχείο) $\text{B} = \text{Γ}$ (γωνίες προσκειμένες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου)

(3° στοιχείο) $\text{ΓH} = \text{BΘ}$ (μισά των ίσων ευθυγράμμων τμημάτων ΓK και BΛ)

Άρα από κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα άρα και $\text{EH} = \text{BΘ}$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5633)

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ σε σημείο N του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη του, και εκατέρωθεν του N θεωρούμε σημεία A και B , τέτοια ώστε $NA = NB$. Οι OA και OB τέμνουν το κύκλο στα K και Λ αντίστοιχα.

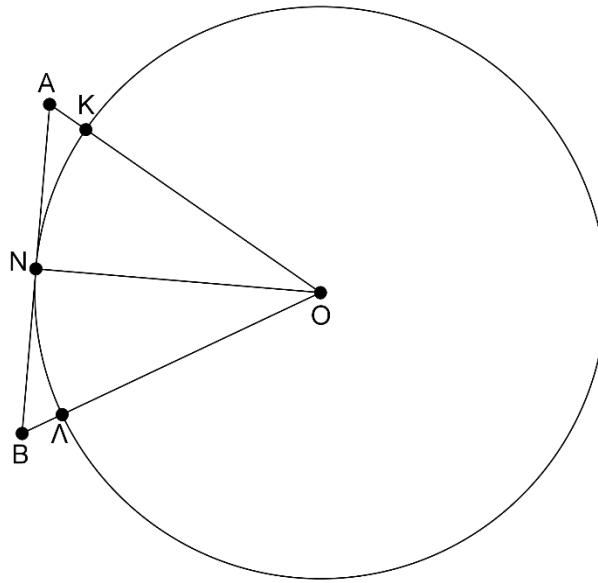
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές.

Μονάδες 13

β) Το σημείο N είναι μέσο του τόξου $K\Lambda$.

Μονάδες 12

**Λύση**

α) Ισχύει $ON \perp AB$

διότι η ακτίνα ON είναι κάθετη στην εφαπτομένη (AB) στο σημείο επαφής (N)

Συγκρίνω τα τρίγωνα ONB και ONA .

(1° στοιχείο): $ONB = ONA = 90^\circ$

(2° στοιχείο): $NB = NA$ (υπόθεση)

(3° στοιχείο): $ON = ON$ (κοινή πλευρά)

Άρα από κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ τα τρίγωνα είναι ίσα άρα $OB = OA$ δηλαδή OAB ισοσκελές!

β) Αν δύο επίκεντρες γωνίες του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες τότε και τα αντίστοιχα τόξα είναι ίσα όπως επίσης και οι αντίστοιχες χορδές, επομένως

$$O_1 = O_2 \Leftrightarrow N\Lambda = NK \Leftrightarrow N \text{ μέσο } K\Lambda.$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5634)

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε διάμετρο AB και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν AE κάθετο στην OG και $\Gamma\Delta$ κάθετο στην AO

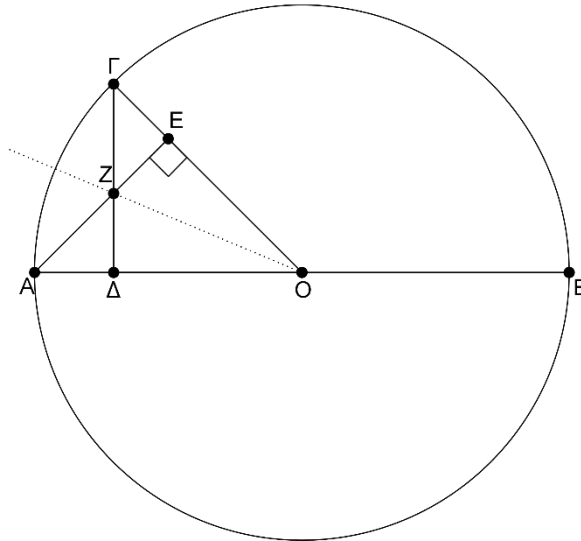
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔOE είναι ισοσκελές.

Μονάδες 13

β) Η OZ διχοτομεί τη γωνία $AO\Gamma$ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου $ΑΓ$.

Μονάδες 12

**Λύση**

α) Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα OEA και $OD\Gamma$.

(1^ο στοιχείο) $OA=O\Gamma$ (ακτίνες κύκλου)

(2^ο στοιχείο) $\angle OEA = \angle O\Gamma\Delta$ (κοινή γωνία)

Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία άρα είναι ίσα οπότε $OD=OE$ άρα το τρίγωνο ODE είναι ισοσκελές.

β) Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα $OZ\Delta$ και OZE τα οποία έχουν

(1^ο στοιχείο) $OZ=OZ$ (κοινή πλευρά)

(2^ο στοιχείο) $OD=OE$ (από το ερώτημα (α))

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία επομένως είναι ίσα

άρα και $Z\Delta=ZE$ και $\angle ZO\Delta = \angle ZOZ$ άρα η OZ διχοτομεί τη γωνία $AO\Gamma$

Εφόσον $\angle ZO\Delta = \angle ZOZ$ (επίκεντρες γωνίες του κύκλου) άρα και τα αντίστοιχα τόξα του θα είναι ίσα δηλαδή η OZ προεκτεινόμενη θα διχοτομεί το τόξο $ΑΓ$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5647)

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . από σημείο A εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και AG . Τα σημεία E και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα.

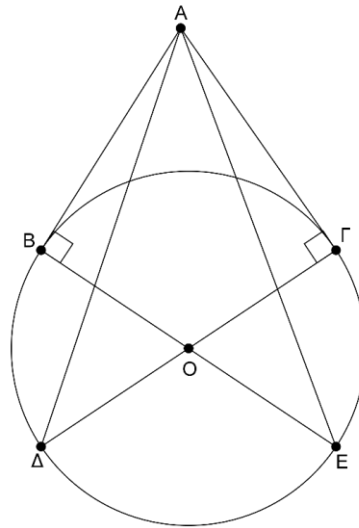
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABE και $AG\Delta$ είναι ίσα.

Μονάδες 13

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και AGE είναι ίσα.

Μονάδες 12

**Λύση**

α) Τα τρίγωνα ABE και $AG\Delta$ έχουν:

(1° στοιχείο) $B = \Gamma = 90^\circ$

(2° στοιχείο) $AB = AG$

(3° στοιχείο) $BE = \Gamma\Delta = 2\rho$

Άρα από κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ τα τρίγωνα είναι ίσα επομένως $AE = A\Delta$.

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και AGE έχουν:

(1° στοιχείο) $AB = AG$

(2° στοιχείο) $A\Delta = AE$ προηγούμενη σύγκριση.

(3° στοιχείο) $B\Delta = \Gamma E$ (χορδές ίσων επίκεντρων γωνιών O_1, O_2 του ίδιου κύκλου),

$O_1 = O_2$ κατακορυφήν

ΑΣΚΗΣΗ (2_5733)

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το χάρτη μιας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Ax και Ay παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία B και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια.

Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

α) Ισαπέχει από τα δύο πλατάνια.

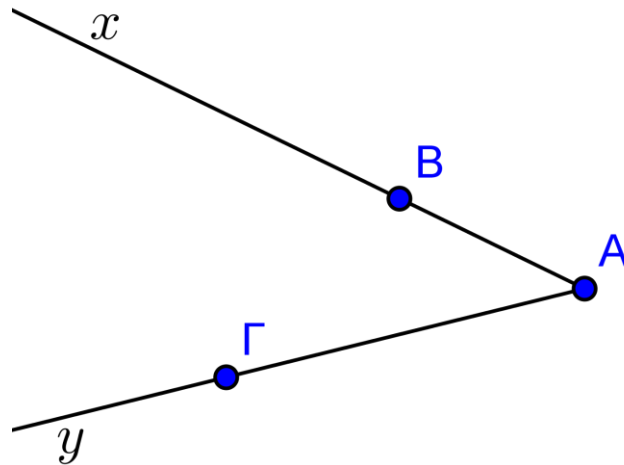
Μονάδες 9

β) Ισαπέχει από τα δύο ποτάμια.

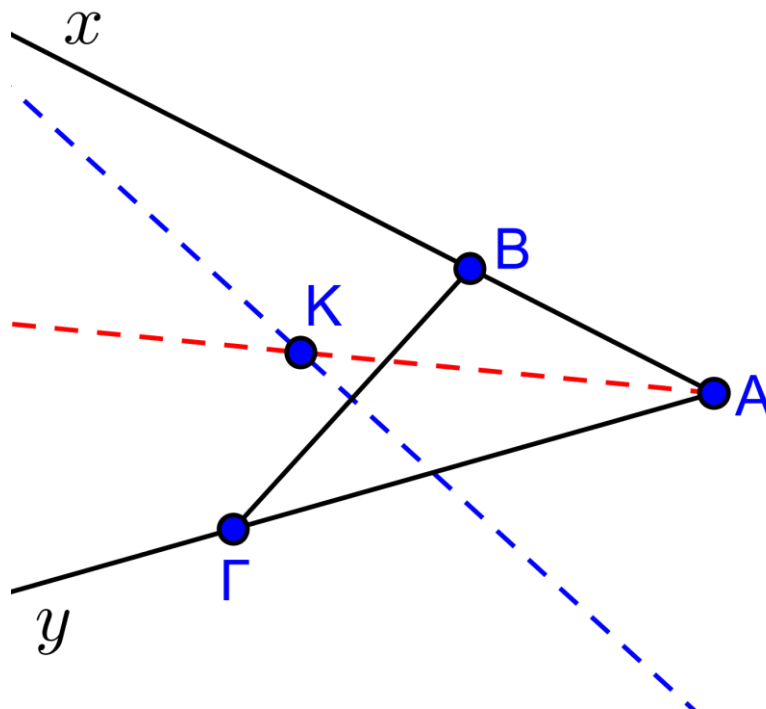
Μονάδες 9

γ) Ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια.

Μονάδες 7



Λύση



α) Τα πλατάνια θεωρούνται ως σημεία του επιπέδου, άρα αναζητώ το σύνολο των σημείων που ισαπέχει από τα B, Γ. Αυτά βρίσκονται στη μεσοκάθετη ευθεία του ευθύγραμμου τμήματος BΓ (μπλε διακεκομμένη γραμμή)

β) Τα ποτάμια θεωρούνται ως δύο ημιευθείες με κοινή αρχή, άρα αναζητώ το σύνολο των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από τις ημιευθείες Ax, Ay. Αυτά βρίσκονται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας xAy (κόκκινη διακεκομμένη γραμμή)

γ) Για να ικανοποιούνται και οι δύο προηγούμενες προτάσεις αρκεί να βρίσκεται στον κοινό τους τόπο δηλαδή στο σημείο τομής της μεσοκαθέτου και της διχοτόμου, όπως

φαίνεται και από το σχήμα ,στο σημείο Κ (το σημείο τομής της **μπλε** και τη **κόκκινης** γραμμής)

ΑΣΚΗΣΗ (2_6592)

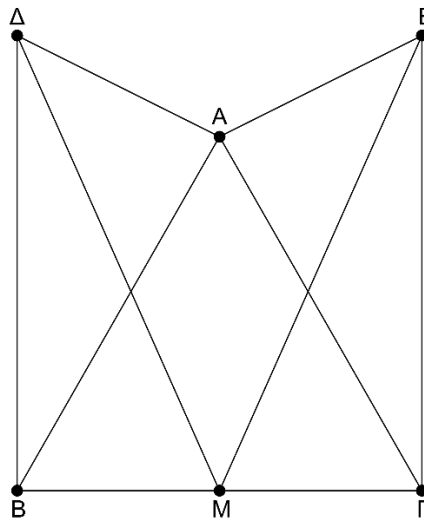
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στα σημεία B και Γ της $B\Gamma$ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της $B\Gamma$, τα τμήματα $BD \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$ τέτοια ώστε $BD = \Gamma E$. Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα BDM και ΓEM είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) $AD = AE$.

Μονάδες 13

**Λύση**

α) Τα τρίγωνα MBD και $M\Gamma E$ έχουν

(1° στοιχείο) $MBD = M\Gamma E = 90^\circ$ -εφόσον τα ευθύγραμμα τμήματα $BD, \Gamma E$ είναι κάθετα στη $B\Gamma$.

(2° στοιχείο) $BM = M\Gamma$ -εφόσον M μέσο της $B\Gamma$

(3° στοιχείο) $BD = \Gamma E$ (υπόθεση)

Άρα από κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Συγκρίνω τα τρίγωνα ABD και EAG

(1° στοιχείο) $AB = A\Gamma$ ($AB\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο με βάση $B\Gamma$)

(2° στοιχείο) $\angle B = \angle \Gamma$ (στοιχείο που προκύπτει από την προηγούμενη σύγκριση).

(3° στοιχείο) $\angle DAB = \angle AEG$ συμπληρωματικές των ίσων γωνιών B, Γ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ (2_6886)

[είναι από το κεφάλαιο 2ο]

Έστω κύκλος κέντρου O και διαμέτρου $B\Gamma$. Θεωρούμε τα σημεία A και Δ του κύκλου εκατέρωθεν της $B\Gamma$, τέτοια ώστε το τόξο $B\Delta$ να είναι διπλάσιο του τόξου $\Delta\Gamma$. Να υπολογίσετε :

α) το μέτρο x του τόξου $\Gamma\Delta$,

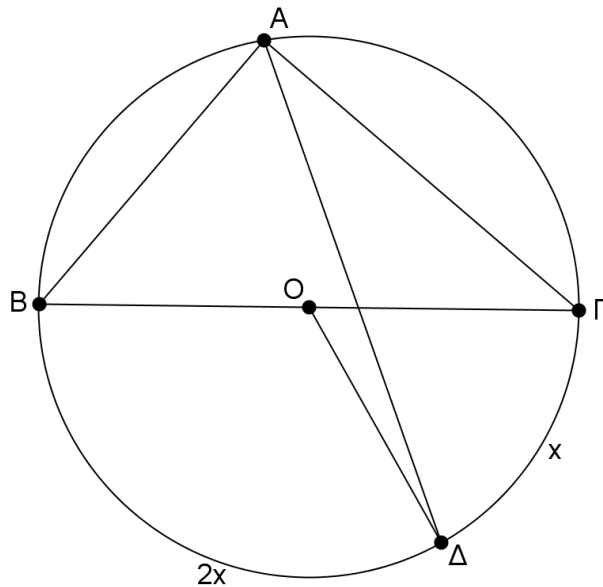
Μονάδες 8

β) τη γωνία ΒΟΔ ,

Μονάδες 9

γ) τη γωνία ΒΑΔ .

Μονάδες 8



ΛΥΣΗ

α) Επειδή το τόξο ΒΓ είναι 180° , τότε θα ισχύει :

$$\text{ΒΔ} + \text{ΔΓ} = 180^\circ \Rightarrow 2x + x = 180^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$$

Άρα το τόξο ΔΓ είναι 60° .

β) Η ΒΟΔ είναι επίκεντρη και βαίνει στο ΒΔ , οπότε :

$$\text{ΒΟΔ} = 2x = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$$

γ) Η γωνία ΒΑΔ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο ΒΔ , όπου βαίνει και η αντίστοιχη επίκεντρη ΒΟΔ .

Οπότε,

$$\text{ΒΑΔ} = \frac{\text{ΒΟΔ}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_7453)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\hat{\text{Α}} = 90^\circ$ και η διχοτόμος του ΒΔ . Από το Δ φέρουμε $\text{ΔΕ} \perp \text{ΒΓ}$ που τέμνει την προέκταση της ΑΒ (προς το Α) στο Ζ .

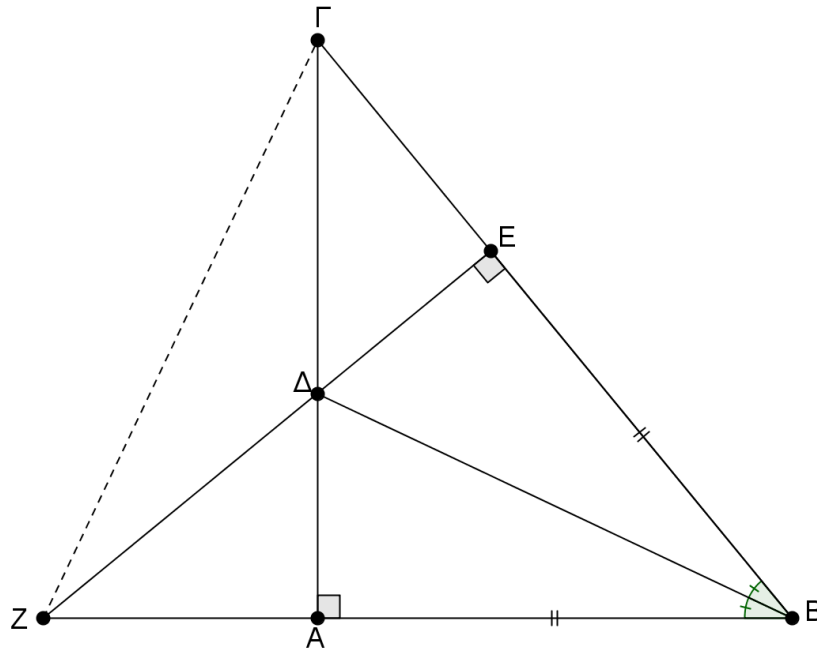
Να αποδείξετε ότι :

α) $\text{ΒΕ} = \text{ΑΒ}$,

(Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Συγκρίνω τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Delta E$, οπότε,

$$\left. \begin{array}{l} B\Delta = \text{κοινή πλευρά} \\ \hat{A}B\Delta = \hat{E}B\Delta \\ \hat{A} = \hat{E} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}B\Delta = \hat{E}B\Delta$$

και συνεπώς $BE = AB$.

β) Επειδή $\hat{A}B\Delta = \hat{E}B\Delta$, τότε $A\Delta = \Delta E$ (1).

Άρα συγκρίνοντας τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta Z$ και $\Delta\Gamma E$ έχουμε :

$$\left. \begin{array}{l} A\Delta = \Delta E \text{ (1)} \\ \hat{A}\Delta Z = \hat{E}\Delta\Gamma \text{ (κατακορ.)} \\ \hat{A}\Delta Z = \hat{E}\Delta\Gamma = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}\Delta Z = \hat{E}\Delta\Gamma \Rightarrow AZ = \Gamma E$$

Κατά συνέπεια θα ισχύει :

$$BZ = AB + AZ \Rightarrow BZ = BE + \Gamma E \Rightarrow BZ = B\Gamma \Rightarrow \hat{B}\Gamma Z = \text{ισοσκελές}.$$

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

Κεφάλαιο 4ο : Παράλληλες ευθείες



ΑΣΚΗΣΗ (2_2825)

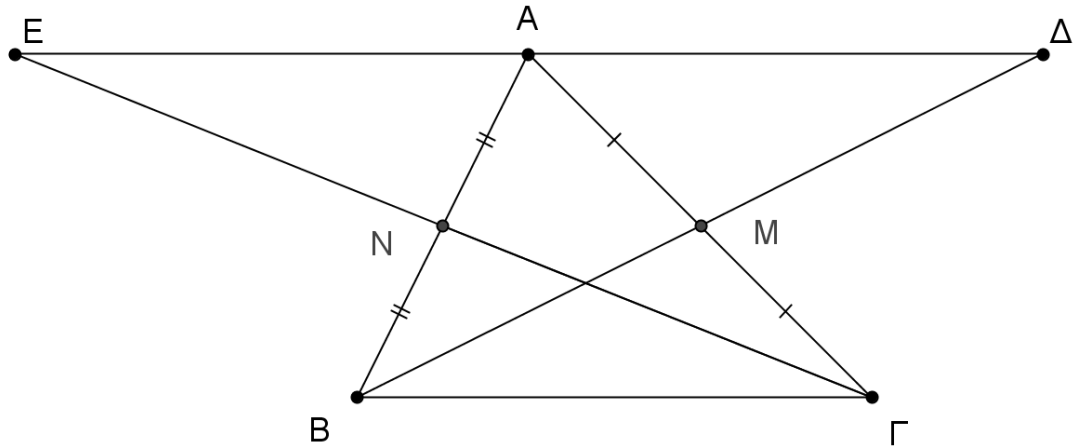
Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$, στο οποίο φέρνουμε τις διαμέσους του BM και ΓN . Προεκτείνουμε την BM προς το M κατά τμήμα $M\Delta = BM$ και την ΓN προς το N κατά τμήμα $NE = \Gamma N$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta \parallel B\Gamma$ και $AE \parallel B\Gamma$.

(Μονάδες 13)

β) Είναι τα σημεία E, A και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

**Λύση**

α) Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιες του $A\Gamma$ και $B\Delta$ διχοτομούνται αφού $BM = M\Delta$ (υπόθεση) και $AM = \Gamma M$ (υπόθεση) άρα $A\Delta \parallel B\Gamma$ (1). Το τετράπλευρο $A\Gamma BE$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιες του AB και ΓE διχοτομούνται αφού $\Gamma N = NE$ (υπόθεση) και $AN = BN$ (υπόθεση) άρα $AE \parallel B\Gamma$ (2).

β) Έστω ότι τα σημεία E, A και Δ δεν είναι συνευθειακά. Τότε, λόγω των (1), (2), θα έχουμε δύο παράλληλες ($A\Delta$ και AE), από το σημείο A , προς την ευθεία $B\Gamma$, που είναι άτοπο. Άρα τα σημεία E, A και Δ είναι συνευθειακά.

ΑΣΚΗΣΗ (2_2857)

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Φέρουμε, εκτός του τριγώνου ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$.

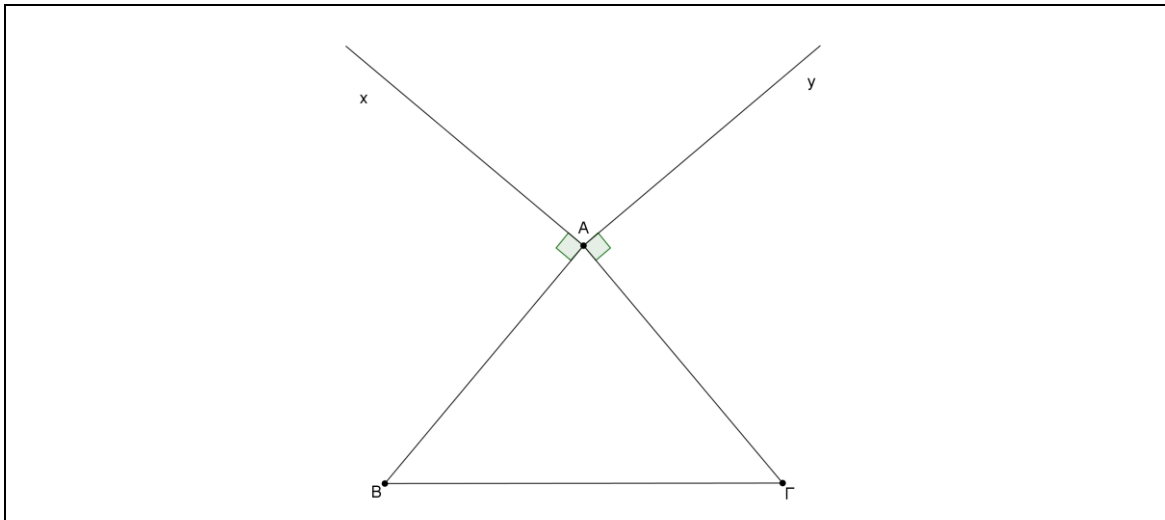
Οι κάθετες στην πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία B και Γ τέμνουν τις Ax και Ay στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

Μονάδες 12

β) Αν η γωνία $BA\Gamma$ είναι ίση με 80° , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔAE .

Μονάδες 13

**ΛΥΣΗ**

α) Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές, άρα θα είναι $\hat{B}_1 = \hat{G}_1$ ①

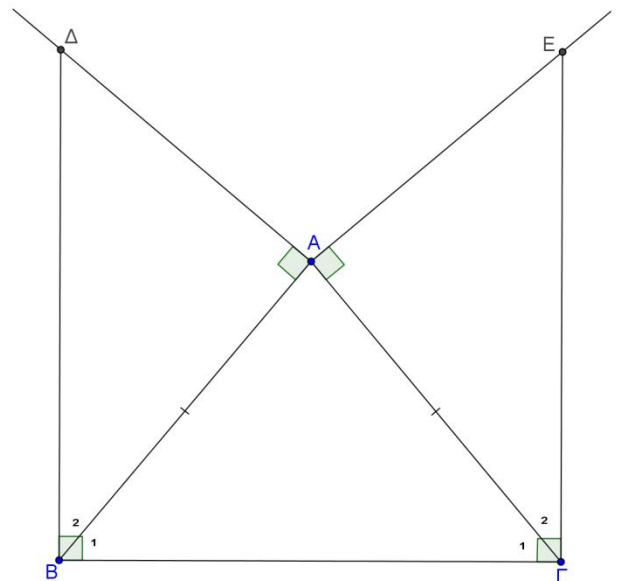
Συγκρίνω: $\triangle AB - \triangle \Gamma$

1. $AB = \Gamma$ (υπόθεση)
2. $\hat{B}_2 = \hat{G}_2$ (συμπληρωματικές
ίσων γωνιών από ①)

$$3. \hat{A}B = \hat{A}\Gamma = 90^\circ$$

Άρα από 2^ο κριτήριο ισότητας τριγώνων

(Γ – Π – Γ) είναι $\triangle AB = \triangle \Gamma$, άρα και τα υπί
ίσα, άρα και $BD = \Gamma E$.



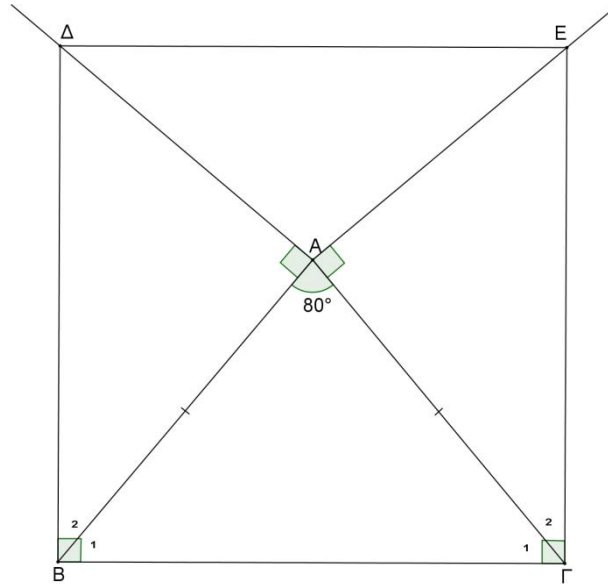
$$\begin{aligned} \beta) \text{ Είναι: } \hat{A}B + \hat{B}\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}\hat{A}E + \hat{E}\hat{A}\Delta &= 360^\circ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 90^\circ + 80^\circ + 90^\circ + \hat{E}\hat{A}\Delta = 360^\circ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 260^\circ + \hat{E}\hat{A}\Delta = 360^\circ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \boxed{\hat{E}\hat{A}\Delta = 100^\circ} \end{aligned}$$

Είναι: $\hat{A}B = \hat{A}\Gamma$, άρα και τα υπόλοιπα
αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα και $AD = AE$. Οπότε το τρίγωνο ADE είναι
ισοσκελές, άρα οι προσκείμενες στη βάση DE γωνίες είναι ίσες.

Δηλαδή, $\hat{A}DE = \hat{A}\Gamma$

Αλλά, στο τρίγωνο ADE είναι:

$$\hat{A}\hat{\Delta}E + \hat{A}\hat{E}\Gamma + \hat{E}\hat{A}\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A}\hat{\Delta}E + 100^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A}\hat{\Delta}E = 80^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{\Delta}E = \hat{A}\hat{E}\Gamma = 40^\circ$$

**ΑΣΚΗΣΗ (2_3424)**

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημεία Δ και E στην ευθεία $B\Gamma$ τέτοια, ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Έστω ότι $\Delta Z \perp AB$ και $EH \perp A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $BZ = \Gamma H$

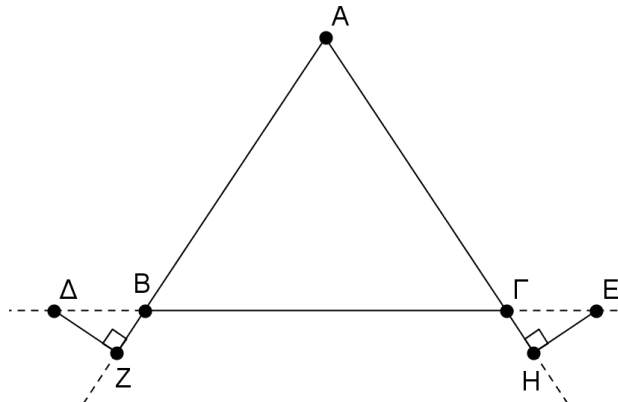
Μονάδες 10

ii. Το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές

Μονάδες 7

β) Αν $\hat{A} = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AZH .

Μονάδες 8

**Λύση**

α) i. Έχουμε $\hat{B}\hat{\Delta}Z = \hat{\Gamma}\hat{E}H$, γιατί

- $Z = H = 90^\circ$
- $B\Delta = \Gamma E$ (δεδομένα)
- $B_2 = \Gamma_2$ (ως κατακορυφήν ίσων γωνιών B_1, Γ_1 του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$)

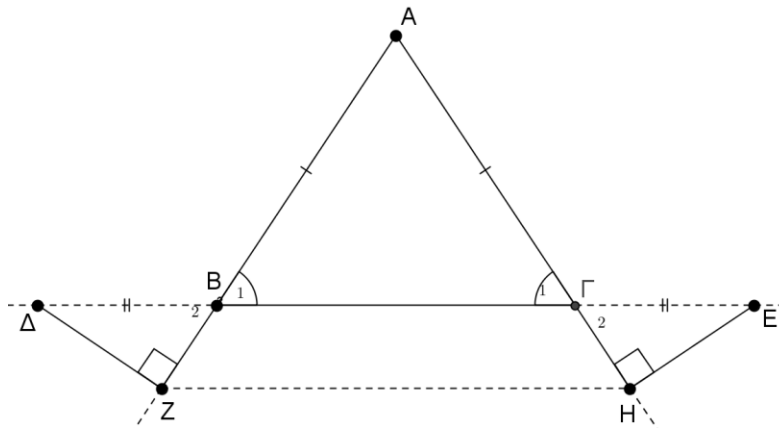
άρα $BZ = \Gamma H$.

ii. Έχουμε, $AB = A\Gamma$ (από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$), επίσης $BZ = \Gamma H$ (από το προηγούμενο ερώτημα), αν προσθέσουμε κατά μέλη βρίσκουμε:

$$AB + BZ = AG + GH \text{ δηλαδή } AZ = AH$$

β) Από το τρίγωνο AZH έχουμε,

$$Z = H = \frac{180^0 - 50^0}{2} = \frac{130^0}{2} = 65^0$$

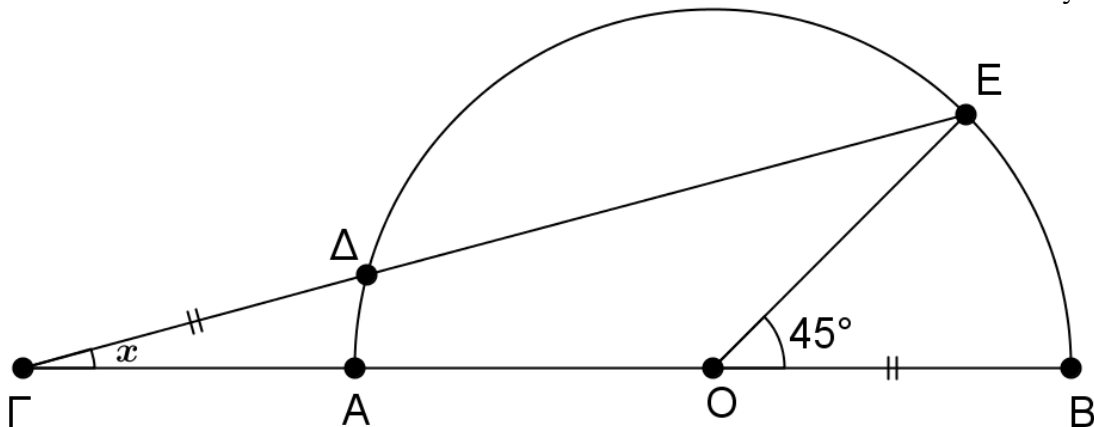


ΑΣΚΗΣΗ (2_4972

Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB προεκτείνουμε την AB προς το μέρος του A και παίρνουμε ένα σημείο Γ. Θεωρούμε E ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓΕ με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα ΓΔ ισούται με το OB και η γωνία

$\angle BOE = 45^0$, να υπολογίσετε τη γωνία $\angle \Gamma O = x$.

Μονάδες 25



Λύση

Φέρνουμε την βοηθητική ευθεία $OD = \rho$.

Παρατηρούμε ότι,

- Το τρίγωνο $\triangle \Gamma \Delta O$ είναι ισοσκελές, αφού $\Gamma \Delta = DO = \rho$, άρα

$$\angle \Gamma O = \angle O \Gamma = x$$

- Επίσης το τρίγωνο $\triangle O \Delta E$ είναι ισοσκελές, αφού $OD = OE = \rho$, άρα

$$\angle O \Delta E = \angle O E \Delta = \omega$$

Όμως η γωνία $\angle BOE = 45^0$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου $\triangle O \Delta E$, άρα ισχύει

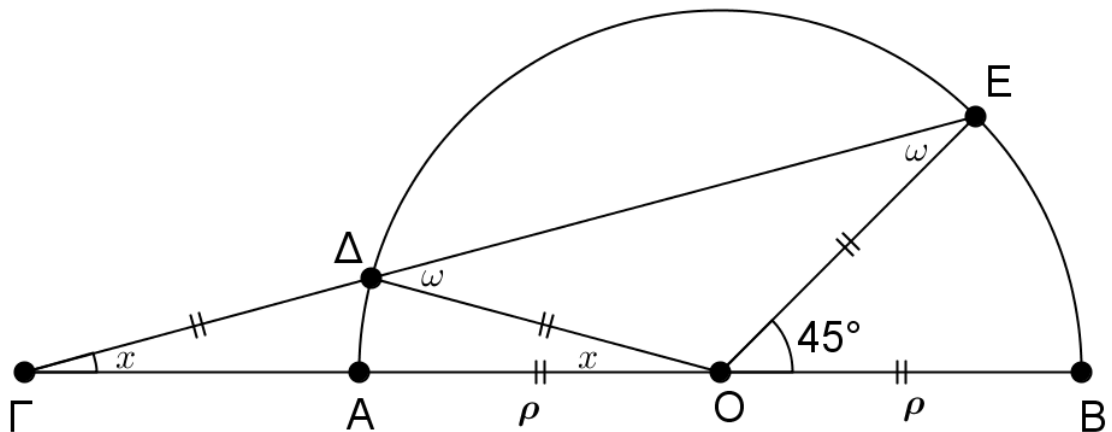
$$x + \omega = 45^0 \quad (1)$$

Επίσης η γωνία $\angle O \Delta E = \omega$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου $\triangle \Gamma O \Delta$, άρα ισχύει

$$\omega = 2x \quad (2)$$

Από σχέσεις (1) και (2) έχουμε,

$$x + 2x = 45^\circ \Rightarrow 3x = 45^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$$

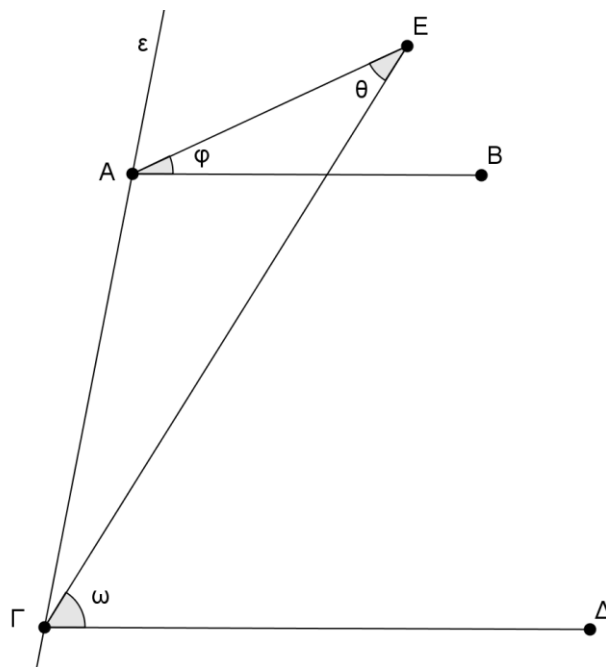


ΑΣΚΗΣΗ (2_5040)

Δίνεται ευθεία ε του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ καθώς και ένα τυχαίο σημείο E βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε .

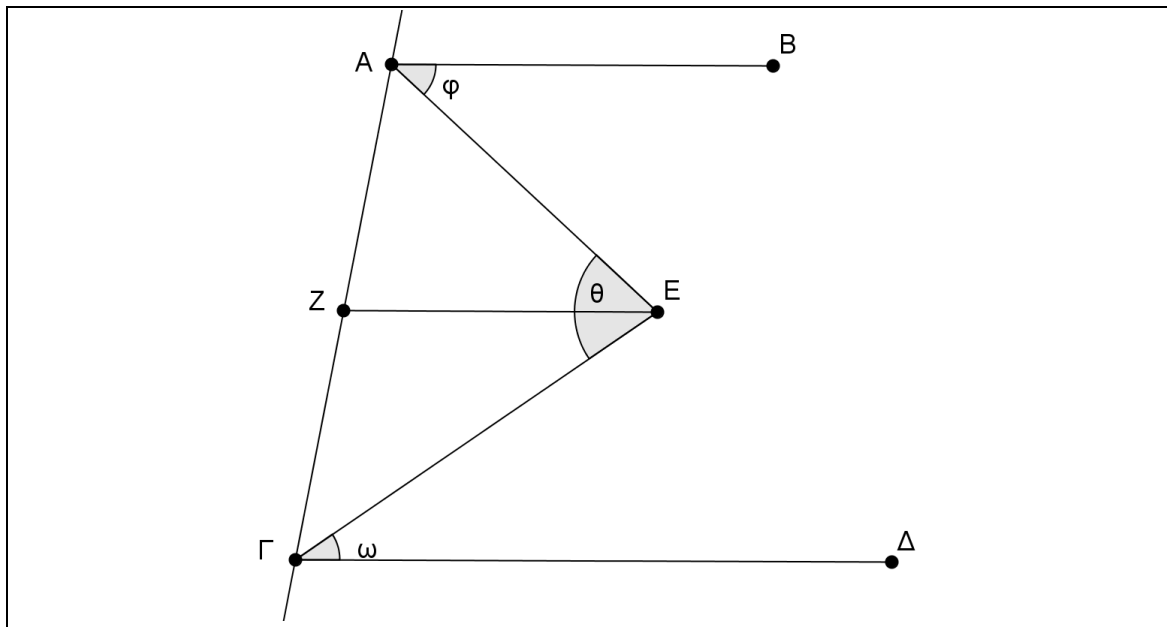
Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το E είναι εκτός των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ τότε: $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$



β) Αν το E είναι ανάμεσα στα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ και $EZ \parallel AB$, τότε να αποδείξετε

ότι $\hat{\theta} = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$

**ΛΥΣΗ**

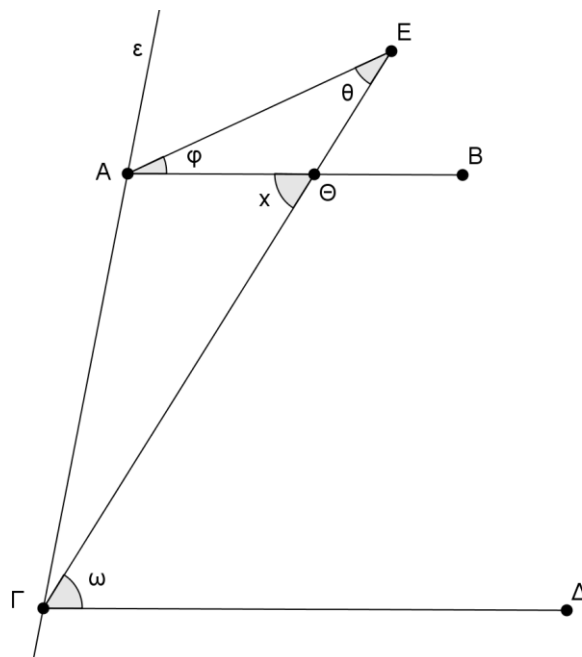
α) Έστω Θ το σημείο τομής των ΓΕ και ΑΒ. Τότε η γωνία x είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΒΘ άρα θα ισούται με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών, δηλαδή:

$$\hat{x} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$$

Όμως:

$\hat{\omega} = \hat{x}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΓΘΕ

Οπότε από τις δυο τελευταίες σχέσεις έχουμε $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$



β) Είναι:

$\hat{AEZ} = \hat{\varphi}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΖΕ και ΑΒ που τέμνονται από την ΑΕ

$\hat{ZEG} = \hat{\omega}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ZE και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την GE
 Προσθέτοντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη έχουμε:

$$\hat{AEZ} + \hat{ZEG} = \hat{\varphi} + \hat{\omega} \Leftrightarrow \hat{\theta} = \hat{\varphi} + \hat{\omega}$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5055)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 80^\circ$. Έστω K σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τέτοιο ώστε $KB = KA = K\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BKA και ΓKA είναι ίσα.

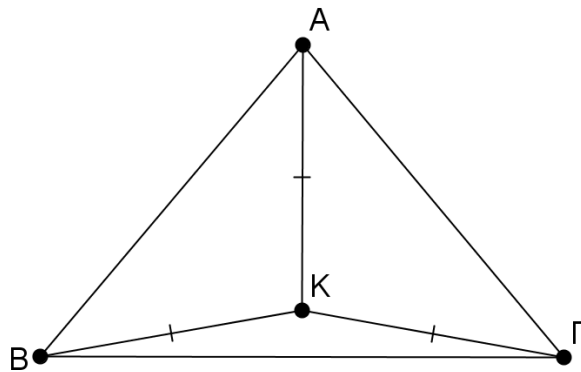
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{ABK}$ και $\hat{A\Gamma K}$

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{BK\Gamma}$.

(Μονάδες 7)

**ΛΥΣΗ**

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $BK\Gamma$ και ΓKA τα οποία έχουν

i) $AB = A\Gamma$ από υπόθεση

ii) $KB = K\Gamma$ από υπόθεση

iii) AK κοινή πλευρά

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα αφού έχουν τρεις πλευρές ίσες.

β) Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, άρα $\hat{BAK} = \hat{KAG} = 40^\circ$

Όμως τα τρίγωνα ABK και $AK\Gamma$ είναι ισοσκελή άρα οι προσκείμενες στη βάση τους γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή:

$$\hat{ABK} = \hat{BAK} = 40^\circ \text{ και } \hat{A\Gamma K} = \hat{KAG} = 40^\circ$$

γ) Στο τρίγωνο ABK έχουμε:

$$\hat{ABK} + \hat{BAK} + \hat{AKB} = 180^\circ \Rightarrow \hat{AKB} = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ \Rightarrow \hat{AKB} = 100^\circ$$

Στο τρίγωνο $A\Gamma K$ έχουμε:

$$\hat{A\Gamma K} + \hat{KAG} + \hat{AK\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{AK\Gamma} = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ \Rightarrow \hat{AK\Gamma} = 100^\circ$$

Όμως είναι:

$$\hat{AKB} + \hat{AK\Gamma} + \hat{BK\Gamma} = 360^\circ \Rightarrow \hat{BK\Gamma} = 360^\circ - 100^\circ - 100^\circ \Rightarrow \hat{BK\Gamma} = 160^\circ$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5061)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διάμεσός του AM . Φέρουμε ημιευθεία προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta = AB$.

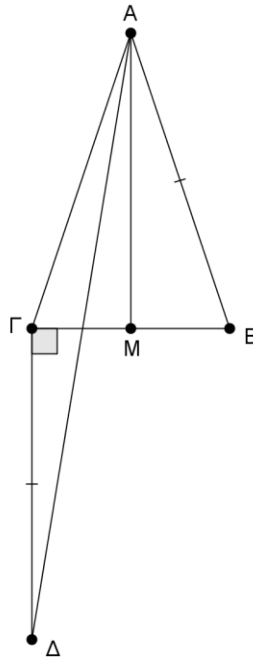
Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $\Delta A\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία $\Gamma\Delta A$.

(Μονάδες 12)

β) Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $MA\Gamma$.

(Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

α) Είναι:

$AB = A\Gamma$ από υπόθεση

$AB = \Gamma\Delta$ από υπόθεση

Άρα $A\Gamma = \Gamma\Delta$ δηλαδή το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές άρα οι προσκείμενες στη βάση του γωνίες θα είναι ίσες, $\hat{\Gamma A \Delta} = \hat{\Gamma \Delta A}$

β) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, η διάμεσος AM είναι και ύψος. Άρα το AM και το $\Gamma\Delta$ είναι και τα δυο κάθετα στην $B\Gamma$, άρα θα είναι μεταξύ τους παράλληλα δηλαδή $AM \parallel \Gamma\Delta$

$\hat{\Gamma A \Delta} = \hat{\Gamma \Delta A}$ από το ερώτημα α)

$\hat{\Delta A M} = \hat{\Gamma \Delta A}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\Gamma\Delta$, AM που τέμνονται από την $A\Delta$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι: $\hat{\Gamma A \Delta} = \hat{\Delta A M}$ δηλαδή η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $MA\Gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5064)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Έστω Ax η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας $\hat{A}_{εξ} = 120^\circ$. Από την κορυφή B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Ax , η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

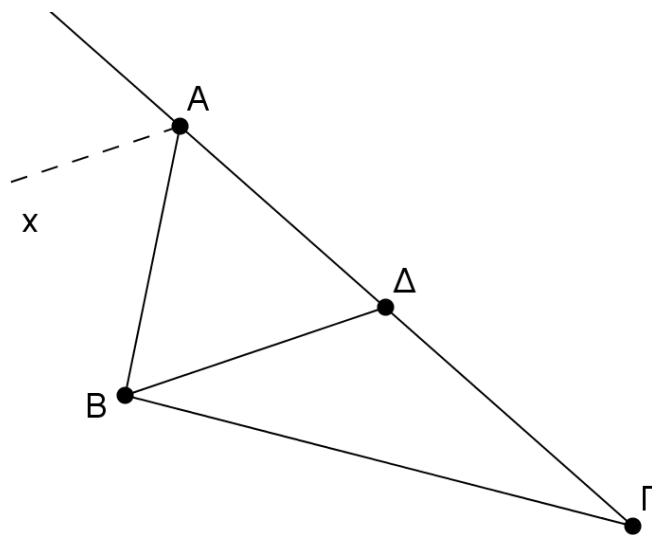
(Μονάδες 10)

ii. $\Delta\Gamma = A\Gamma - AB$

(Μονάδες 5)

β) Αν η γωνία $B\Delta A$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

α) i) Ονομάζουμε τις γωνίες όπως φαίνεται στο δίπλα σχήμα και έχουμε ότι:

$$\hat{A}_2 = \hat{A}_3 = \frac{\hat{A}_{εξ}}{2} = 60^\circ$$

$$\hat{A}_1 = 180^\circ - \hat{A}_{εξ} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$\hat{B}_1 = \hat{A}_2 = 60^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων Ax , $B\Delta$ που τέμνονται από την AB

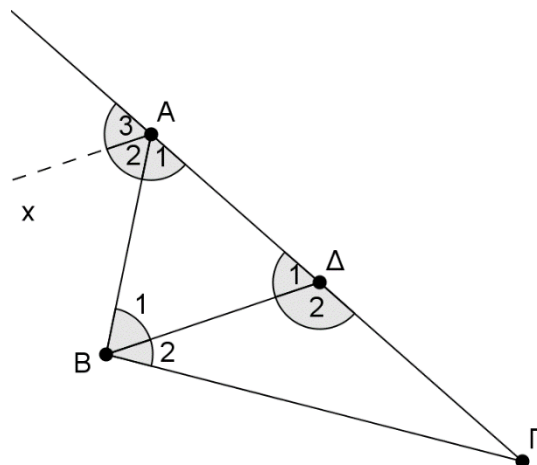
Άρα το τρίγωνο $AB\Delta$ έχει όλες τις γωνίες του ίσες με 60° οπότε είναι ισόπλευρο.

ii) Είναι:

$$\Delta\Gamma = A\Gamma - A\Delta$$

Όμως $A\Delta = AB$ γιατί το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο, άρα

$$\Delta\Gamma = A\Gamma - AB$$



β) Είναι:

$$\hat{\Delta}_1 = 2\hat{\Gamma} \Rightarrow 60^\circ = 2\hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$$

$$\hat{\Delta}_2 = 180^\circ - \hat{\Delta}_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Στο τρίγωνο ΒΔΓ έχουμε:

$$\hat{B}_2 + \hat{\Delta}_2 + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B}_2 = 180 - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5066)

Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ (προς το Α) και ΓΑ (προς το Α) τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ.

Να αποδείξετε ότι:

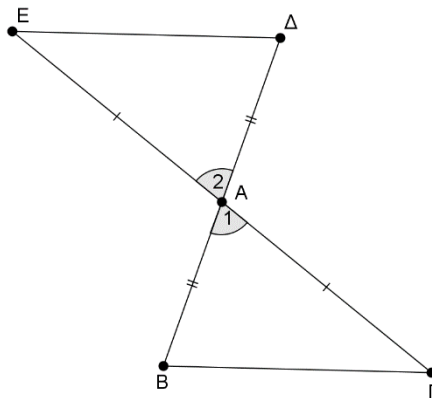
α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) ΕΔ//ΒΓ

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ τα οποία έχουν

i) $AB = AD$ από υπόθεση

ii) $AG = AE$ από υπόθεση

iii) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα έχουν δυο πλευρές και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες άρα είναι ίσα

β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα θα έχουν και όλα τα στοιχεία τους ίσα

άρα θα είναι και $\hat{B} = \hat{D}$. Αυτό σημαίνει ότι οι ευθείες ΒΓ και ΔΕ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες, άρα είναι παράλληλες.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5080)

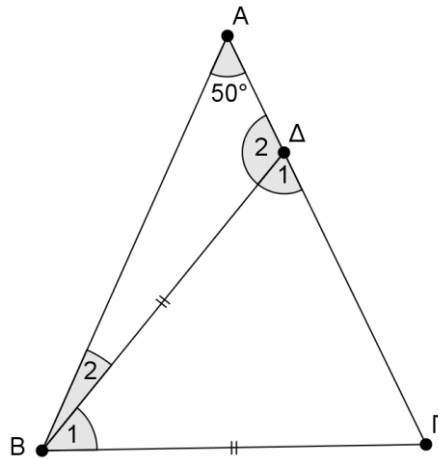
Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές ΑΒΓ ($AB = AG$) με γωνία $\hat{A} = 50^\circ$. Έστω Δ είναι σημείο της πλευράς ΑΓ, τέτοιο ώστε $BD = BG$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔΒΓ είναι ίση με τη γωνία Α.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$. Όμως $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ γιατί το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. Άρα:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow 50^\circ + 2\hat{B} = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{B} = 130^\circ \Rightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma} = 65^\circ$$

β) Το τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές αφού $B\Delta = \Delta\Gamma$ από υπόθεση.

Άρα

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma} = 65^\circ.$$

Οπότε στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ είναι:

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{B}_1 + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 + 65^\circ + 65^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 = 50^\circ$$

Επομένως η γωνία $\Delta B\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία A .

ΑΣΚΗΣΗ (2_5089)

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς $A\Gamma$ και $\Delta E \perp B\Gamma$.

Να υπολογίσετε:

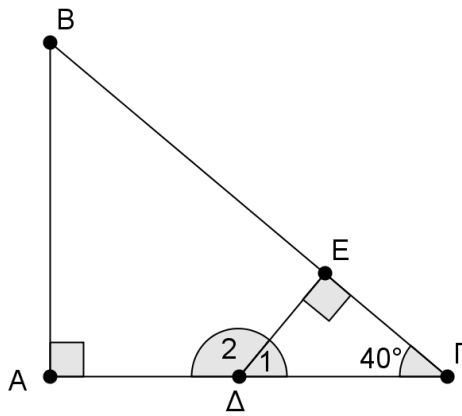
α) τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) τις γωνίες του τετραπλεύρου $A\Delta E B$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ



α) Στο τρίγωνο ΔΕΓ είναι:

$$\hat{E} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta}_1 = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + 40^\circ + \hat{\Delta}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Delta}_1 = 50^\circ$$

Άρα το τρίγωνο ΔΕΓ έχει $\hat{E} = 90^\circ$, $\hat{\Gamma} = 40^\circ$ και $\hat{\Delta}_1 = 50^\circ$

β) Είναι:

$$\hat{\Delta}_2 = 180 - \hat{\Delta}_1 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{B} + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 50^\circ$$

Άρα το τετράπλευρο ΑΒΕΔ έχει:

$$\hat{A} = 90^\circ, \hat{B} = 50^\circ, \hat{E} = 90^\circ, \hat{\Delta}_2 = 130^\circ$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5092)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB=AG$) με γωνία κορυφής $A = 40^\circ$. Στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) παίρνουμε τμήμα ΒΔ τέτοιο ώστε $BD = AB$.

Να υπολογίσετε

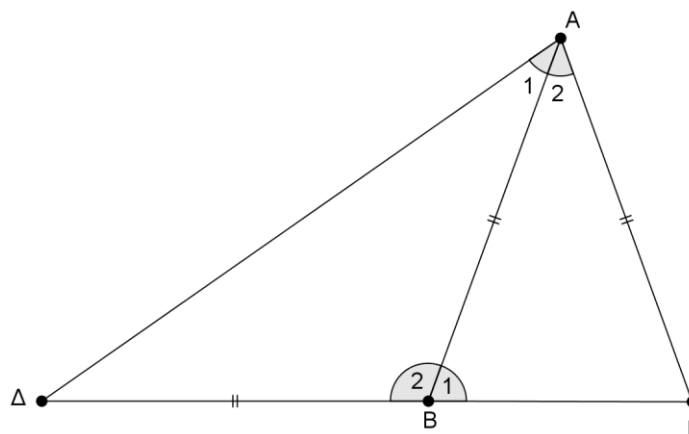
α) τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 10)

β) τη γωνία ΔΑΓ.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ



α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}$ οπότε:

$$\hat{A}_2 + \hat{B}_1 + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 40^\circ + 2\hat{B}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{\Gamma} = 70^\circ$$

Άρα είναι $\hat{A}_2 = 40^\circ$, $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma} = 70^\circ$

β) Από την υπόθεση έχουμε $B\Delta = \Delta\Gamma$ άρα το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές οπότε

$\hat{\Delta} = \hat{A}_1$. Όμως η γωνία $\hat{B}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου $AB\Delta$, άρα:

$$\hat{B}_1 = \hat{A}_1 + \hat{\Delta} \Rightarrow 70^\circ = 2\hat{A}_1 \Rightarrow \hat{A}_1 = 35^\circ$$

Τελικά $\hat{\Delta A\Gamma} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 75^\circ$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5094)

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Έστω ότι η $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της

γωνία A και η $\Delta E \parallel AB$. Αν η γωνία $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$,

α) να υπολογίσετε:

I. τις γωνίες B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.

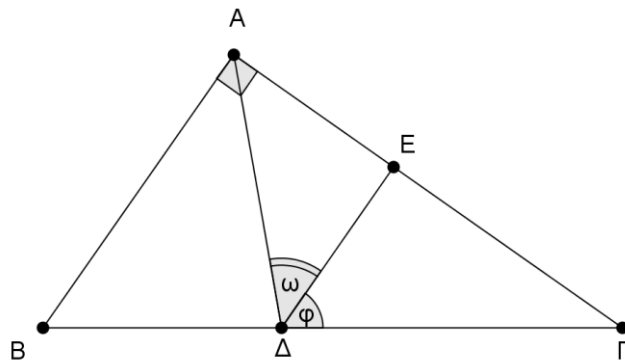
(Μονάδες 8)

II. τις γωνίες φ και ω .

(Μονάδες 10)

β) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) i) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + 20^\circ + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{\Gamma} = 70^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 35^\circ$$

Άρα θα είναι

$$\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma} = 20^\circ + 35^\circ = 55^\circ$$

ii) Είναι:

$$\hat{\omega} = \hat{\Delta A B} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE , AB που τέμνονται από την $A\Delta$

$$\hat{\varphi} = \hat{B} = 55^\circ$$

ως εντός εκτός και επί τ' αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΒ που τέμνονται από την ΒΓ.

β) Επειδή $\hat{\Delta A E} = \omega = 45^\circ$ το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές αφού έχει τις προσκείμενες στη βάση του γωνίες ίσες.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5100)

Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν $\Delta B = BA = A\Gamma = \Gamma E$ και $\hat{B A \Gamma} = 40^\circ$.
Να αποδείξετε ότι

α) $\hat{A B \Delta} = \hat{A \Gamma E} = 110^\circ$.

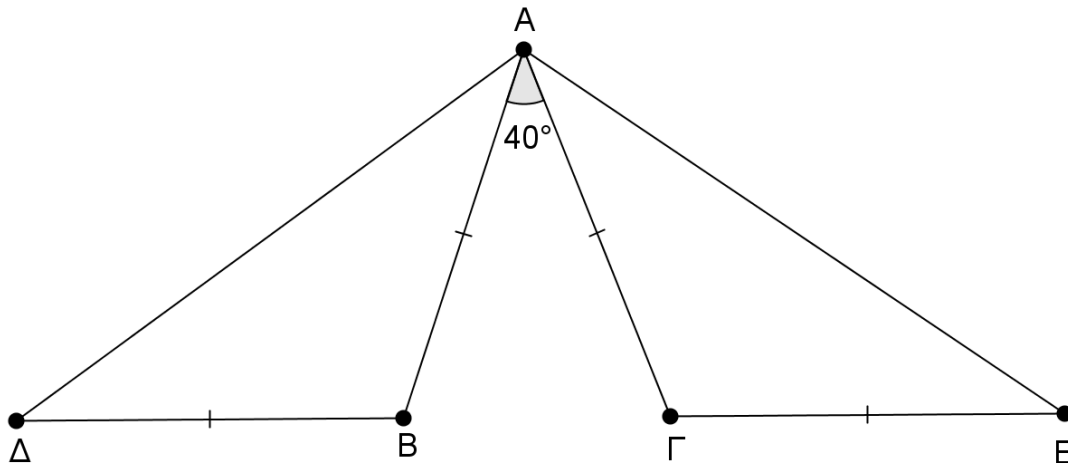
(Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

γ) το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Έστω $\hat{A B \Gamma} = \hat{B}_1$ και $\hat{A \Gamma B} = \hat{\Gamma}_1$.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές άρα οι προσκείμενες στη βάση του γωνίες είναι ίσες άρα:

$$\hat{A} + \hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_1 = 180^\circ \Rightarrow 40^\circ + \hat{B}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{B}_1 = 140^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 70^\circ$$

Οπότε:

$$\hat{A B \Delta} = 180^\circ - \hat{B}_1 = 110^\circ \text{ και } \hat{A \Gamma E} = 180^\circ - \hat{\Gamma}_1 = 110^\circ$$

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ τα οποία έχουν:

i) $B\Delta = \Gamma E$ από υπόθεση

ii) $AB = A\Gamma$ από υπόθεση

iii) $\hat{A B \Delta} = \hat{A \Gamma E} = 110^\circ$

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν δυο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία ίσες, άρα είναι ίσα.

γ) Επειδή τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα θα έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα άρα θα είναι και $A\Delta = AE$ δηλαδή το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5134)

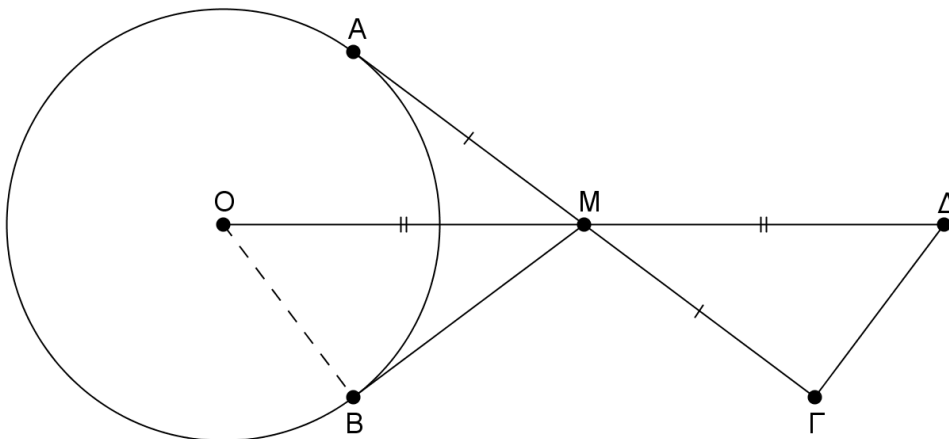
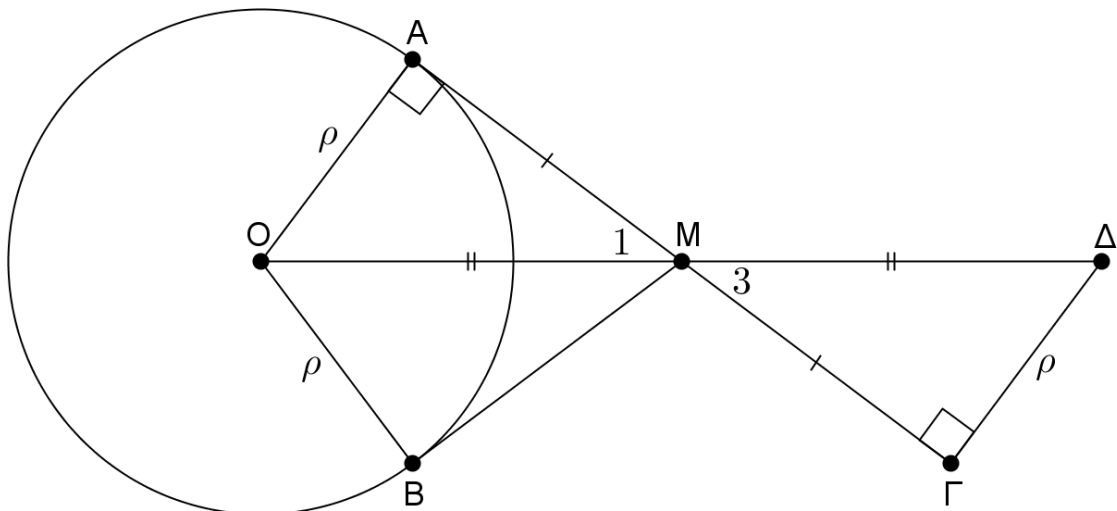
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) και τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB .

Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $M\Gamma = MA$ και την OM κατά τμήμα $M\Delta = MO$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OMB και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα, και να γράψετε τα στοιχεία τους.

Μονάδες 13

β) Να αιτιολογήσετε γιατί $OA \parallel \Gamma\Delta$.

Μονάδες 12**ΛΥΣΗ**

α) Φέρνω την ακτίνα OA και συγκρίνω τα τρίγωνα $M\Gamma\Delta$ και MAO τα οποία έχουν :

$M\Gamma = MA$ (από υπόθεση)

$M\Delta = MO$ (από υπόθεση)

$\hat{M}_1 = \hat{M}_3$ (ως κατακορυφήν γωνίες)

Τα τρίγωνα έχουν δυο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία ίσες μια προς μια, άρα θα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα. Δηλαδή θα

έχω $\Gamma\Delta = \text{ΟΑ} = \rho$, $\hat{\Gamma} = \hat{\text{Α}}$ (1) και $\text{ΜΔΓ} = \text{ΜΟΑ}$

β) Η ΟΑ είναι ακτίνα στο σημείο επαφής άρα $\hat{\text{Α}} = 90^\circ = \hat{\Gamma}$.

Επομένως $\text{ΟΑ} \perp \text{ΑΓ}$ και $\text{ΓΔ} \perp \text{ΑΓ}$, δηλαδή οι ΟΑ, ΓΔ είναι κάθετες στην ίδια ευθεία, άρα μεταξύ τους παράλληλες, οπότε $\text{ΟΑ} \parallel \text{ΓΔ}$.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5562)

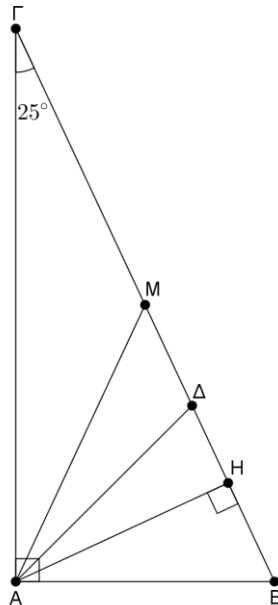
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\text{Α}} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 25^\circ$. Δίνονται επίσης η διάμεσος ΑΜ, το ύψος ΑΗ από την κορυφή Α και η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας Α.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες ΑΜΒ, ΗΑΒ, ΑΔΒ.

Μονάδες 15

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{\text{ΜΑΔ}} = \hat{\Delta\text{ΑΗ}} = 20^\circ$.

Μονάδες 10



ΛΥΣΗ

α) Από άθροισμα γωνιών τριγώνου στο τρίγωνο ΑΒΓ έχω :

$$\hat{\text{Α}} + \hat{\text{Β}} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{\text{Β}} + 25^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{\text{Β}} = 65^\circ$$

Η ΑΜ είναι διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου, άρα

$$\text{ΑΜ} = \frac{\text{ΒΓ}}{2} \Rightarrow \text{ΑΜ} = \text{ΜΓ} = \text{ΜΒ} = \frac{\text{ΒΓ}}{2}$$

Επειδή $\text{ΑΜ} = \text{ΜΓ}$ το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές, άρα $\hat{\Gamma\text{ΑΜ}} = \hat{\Gamma} = 25^\circ$

Στο τρίγωνο ΑΜΓ η γωνία ΑΜΒ είναι εξωτερική, οπότε

$$\hat{\text{ΑΜΒ}} = \hat{\Gamma\text{ΑΜ}} + \hat{\Gamma} = 25^\circ + 25^\circ = 50^\circ$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΑΒ (ΑΔ ύψος) από άθροισμα γωνιών τριγώνου έχουμε

$$\hat{\text{Η}} + \hat{\text{ΗΑΒ}} + \hat{\text{Β}} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{\text{ΗΑΒ}} + 65^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{\text{ΗΑΒ}} = 25^\circ$$

Είναι ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, άρα

$$\hat{\Delta AB} = \hat{\Delta \Gamma B} = \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow \hat{\Delta AB} = \hat{\Delta \Gamma B} = 45^\circ$$

Στο τρίγωνο ΔΑΒ από άθροισμα γωνιών τριγώνου έχουμε

$$\hat{\Delta \Gamma B} + \hat{\Delta AB} + \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Delta \Gamma B} + 45^\circ + 65^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Delta \Gamma B} = 70^\circ$$

β) Είναι

$$\hat{\Delta \Gamma B} = 45^\circ \Rightarrow \hat{M \Delta \Gamma} + \hat{M \Gamma B} = 45^\circ \Rightarrow \hat{M \Delta \Gamma} + 25^\circ = 45^\circ \Rightarrow \hat{M \Delta \Gamma} = 20^\circ$$

Επίσης

$$\hat{\Delta AB} = 45^\circ \Rightarrow \hat{\Delta \Gamma H} + \hat{H \Gamma B} = 45^\circ \Rightarrow \hat{\Delta \Gamma H} + 25^\circ = 45^\circ \Rightarrow \hat{\Delta \Gamma H} = 20^\circ$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5570)

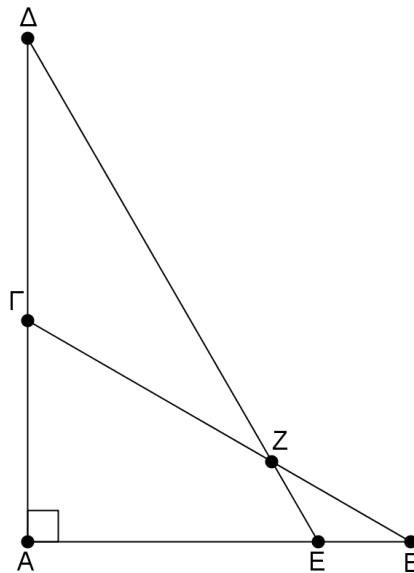
Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ (γωνία Α ορθή) του παρακάτω σχήματος ισχύει $\hat{B} = \hat{\Delta} = 30^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΕΓΖ.

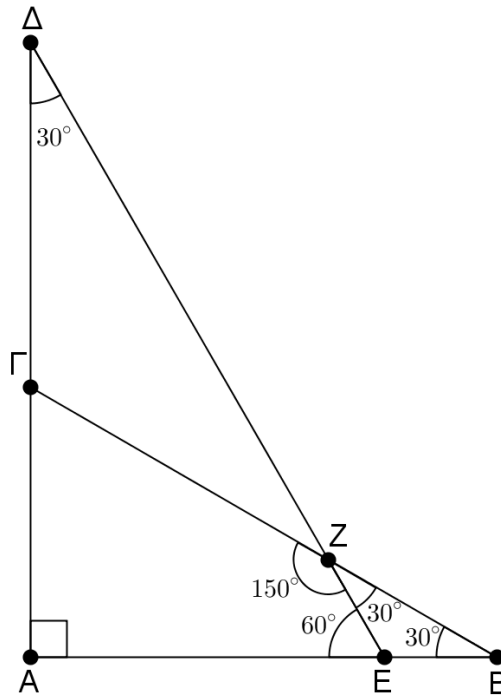
Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΖΔ και ΕΒΖ είναι ισοσκελή.

Μονάδες 13



ΛΥΣΗ



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ έχω

$$\hat{B} = 30^\circ \Rightarrow \hat{A}\hat{\Gamma}B = 60^\circ .$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο AΔΕ έχω

$$\hat{A} = 30^\circ \Rightarrow \hat{A}\hat{E}\Delta = 60^\circ .$$

Στο τετράπλευρό AΕΓΖ από άθροισμα γωνιών έχω

$$\hat{A} + \hat{A}\hat{\Gamma}B + \hat{\Gamma}\hat{Z}E + \hat{\Delta}\hat{E}A = 360^\circ \Rightarrow 90^\circ + 60^\circ + \hat{\Gamma}\hat{Z}E + 60^\circ = 360^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma}\hat{Z}E = 150^\circ$$

β) Είναι

$$\hat{\Gamma}\hat{Z}E + \hat{\Gamma}\hat{Z}\Delta = 180^\circ \Rightarrow 150^\circ + \hat{\Gamma}\hat{Z}\Delta = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma}\hat{Z}\Delta = 30^\circ$$

και

$$\hat{\Gamma}\hat{Z}\Delta = \hat{E}\hat{Z}B = 30^\circ$$

ως κατακορυφήν.

Στο τρίγωνο ΓΖΔ έχω $\hat{\Gamma}\hat{Z}\Delta = \hat{A} = 30^\circ$, άρα ισοσκελές .

Στο τρίγωνο EBZ έχω $\hat{E}\hat{Z}B = \hat{B} = 30^\circ$, άρα ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5572)

Στο παρακάτω σχήμα , οι ΑΔ και ΒΕ είναι παράλληλες . Επιπλέον ισχύουν $AD = AZ$,

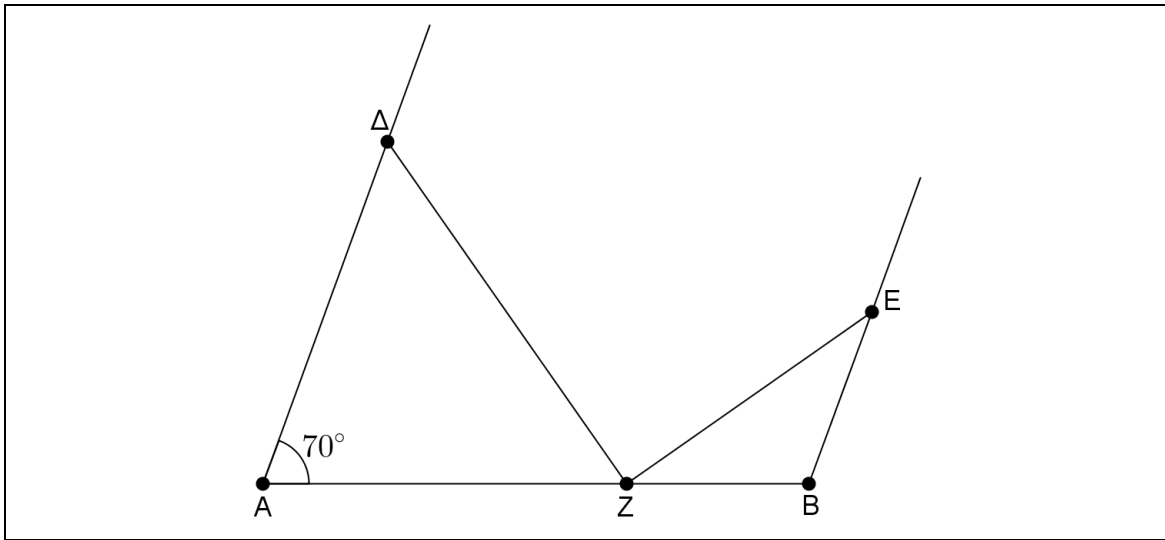
$BE = BZ$ και $\hat{A} = 70^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΔΖ και ΒΖΕ .

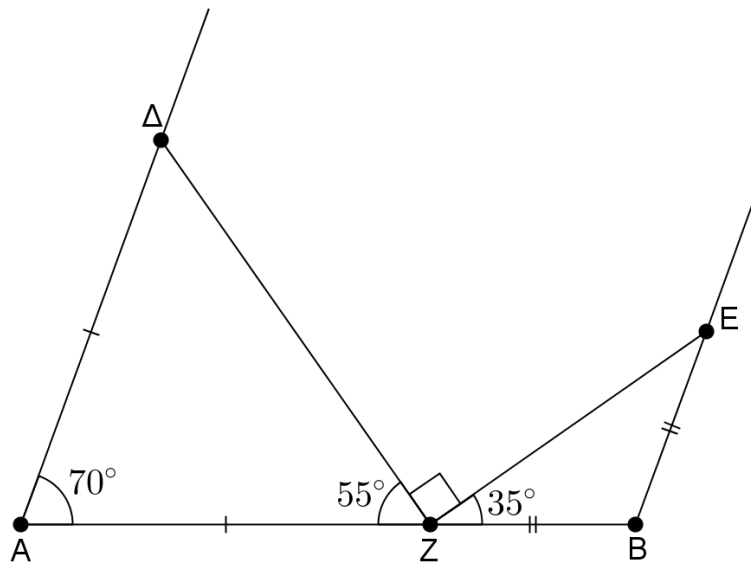
Μονάδες 16

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta}\hat{Z}E = 90^\circ$.

Μονάδες 9



ΛΥΣΗ



α) Στο τρίγωνο ΑΔΖ έχω $AD = AZ$ (από υπόθεση) , οπότε είναι ισοσκελές , άρα

$$\hat{A}\hat{\Delta}Z = \hat{A}Z\hat{\Delta} .$$

Στο τρίγωνο ΑΔΖ από άθροισμα γωνιών τριγώνου έχω :

$$\hat{A} + \hat{A}\hat{\Delta}Z + \hat{A}Z\hat{\Delta} = 180^\circ \Rightarrow 70^\circ + 2\hat{A}\hat{\Delta}Z = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{A}\hat{\Delta}Z = 110^\circ \Rightarrow \hat{A}\hat{\Delta}Z = 55^\circ ,$$

οπότε

$$\hat{A}\hat{\Delta}Z = \hat{A}Z\hat{\Delta} = 55^\circ .$$

Είναι

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow 70^\circ + \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 110^\circ$$

(ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων AD , BE που τέμνονται από την AB).

Στο τρίγωνο ΒΖΕ έχω $BE = BZ$ (από υπόθεση) , οπότε είναι ισοσκελές , άρα

$$\hat{B}\hat{E}Z = \hat{B}Z\hat{E} .$$

Στο τρίγωνο ΒΖΕ από άθροισμα γωνιών τριγώνου έχω:

$$\hat{B} + \hat{B\hat{E}Z} + \hat{B\hat{Z}E} = 180^\circ \Rightarrow 110^\circ + 2\hat{B\hat{E}Z} = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{B\hat{E}Z} = 70^\circ \Rightarrow \hat{B\hat{E}Z} = 35^\circ,$$

οπότε $\hat{B\hat{E}Z} = \hat{B\hat{Z}E} = 35^\circ$.

β) Η γωνία $\hat{AZB}$ είναι ευθεία οπότε:

$$\hat{AZB} = 180^\circ \Rightarrow \hat{AZ\Delta} + \hat{\Delta Z\hat{E}} + \hat{E\hat{Z}B} = 180^\circ \Rightarrow 55^\circ + \hat{\Delta Z\hat{E}} + 35^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Delta Z\hat{E}} = 90^\circ.$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5578)

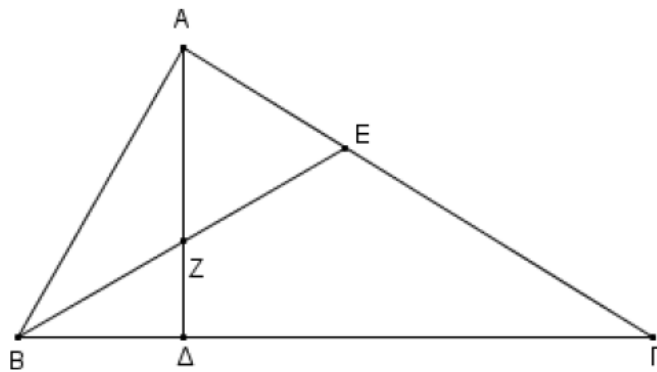
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν $A + \Gamma = 2B$ και $A = 3\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία B είναι ίση με 60°

Μονάδες 10

β) Αν το ύψος AD και η διχοτόμος του BE τέμνονται στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 15



Λύση

α) Από την υπόθεση έχουμε $A + \Gamma = 2B$ (1) και $A = 3\Gamma$ (2).

Επιπλέον ισχύει και:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Rightarrow \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 2B + B = 180^\circ \Rightarrow 3B = 180^\circ \Rightarrow \boxed{B = 60^\circ}$$

β) Από τη σχέση (1) βρίσκουμε

$$A + \Gamma = 120^\circ \stackrel{(2)}{\Rightarrow} 3\Gamma + \Gamma = 120^\circ \Rightarrow 4\Gamma = 120^\circ \Rightarrow \Gamma = 30^\circ.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ (αφού το $A\Delta$ είναι ύψος) η γωνία $\Gamma A\Delta$ είναι συμπληρωματική της $\Gamma = 30^\circ$.

Οπότε

$$\boxed{\Gamma A\Delta = 60^\circ}.$$

Επιπλέον, η BE είναι διχοτόμος και άρα $\Delta BZ = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Delta Z$, η γωνία ΔZB είναι συμπληρωματική της $\Delta BZ = 30^\circ$ και άρα $\Delta ZB = 60^\circ$.

Όμως οι γωνίες $\Delta ZB = 60^\circ$ και AZE είναι κατακορυφήν και άρα είναι ίσες. Δηλαδή

$$\boxed{AZE = 60^\circ}.$$

Οπότε το τρίγωνο AZE έχει δύο γωνίες 60° , άρα και η τρίτη γωνία είναι 60° και συνεπώς είναι ισόπλευρο.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5599)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και η διάμεσός του $A\Delta$ τέτοια ώστε $BA\Delta = 30^\circ$. Θεωρούμε σημείο E στην $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\Delta = AE$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

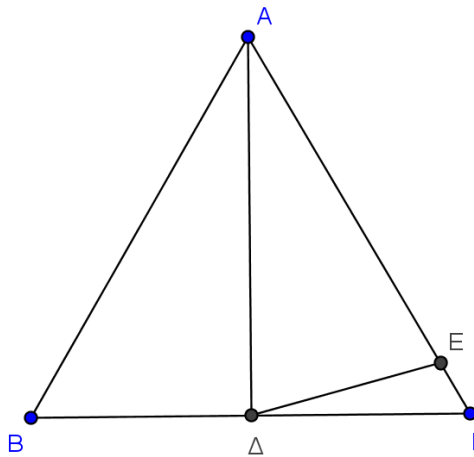
Μονάδες 8

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$.

Μονάδες 9

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $E\Delta\Gamma$.

Μονάδες 8



Λύση

α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές αφού $AB = A\Gamma$, οπότε η διάμεσός του $A\Delta$ είναι και ύψος. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε $BA\Delta = 30^\circ$ και συνεπώς η B είναι 60° ως συμπληρωματική της $BA\Delta = 30^\circ$. Δηλαδή το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει μία προσκείμενη στη βάση γωνία 60° , που σημαίνει ότι είναι ισόπλευρο.

β) Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές αφού από την υπόθεση είναι $A\Delta = AE$. Επιπλέον $\Delta AE = BA\Delta = 30^\circ$, αφού στο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$, η διάμεσος $A\Delta$ είναι και διχοτόμος.

Επίσης,

$$\Delta AE + A\Delta E + AE\Delta = 180^\circ \Rightarrow 30^\circ + A\Delta E + AE\Delta = 180^\circ \xRightarrow[\substack{A\Delta E = AE\Delta \\ A\Delta E \text{ ισοσκελές}}]{A\Delta E = AE\Delta} 2AE\Delta = 150^\circ \Rightarrow \boxed{AE\Delta = 75^\circ}$$

άρα και

$$\boxed{A\Delta E = 75^\circ}.$$

γ) Η γωνία $AE\Delta = 75^\circ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ και συνεπώς ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.

Δηλαδή

$$ΑΕΔ = ΕΔΓ + Γ \Leftrightarrow ΕΔΓ = 75^\circ - Γ.$$

Όμως $Γ = 60^\circ$, αφού το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισόπλευρο.

Οπότε έχουμε

$$ΕΔΓ = 75^\circ - Γ = 75 - 60^\circ \Leftrightarrow \boxed{ΕΔΓ = 15^\circ}.$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5626)

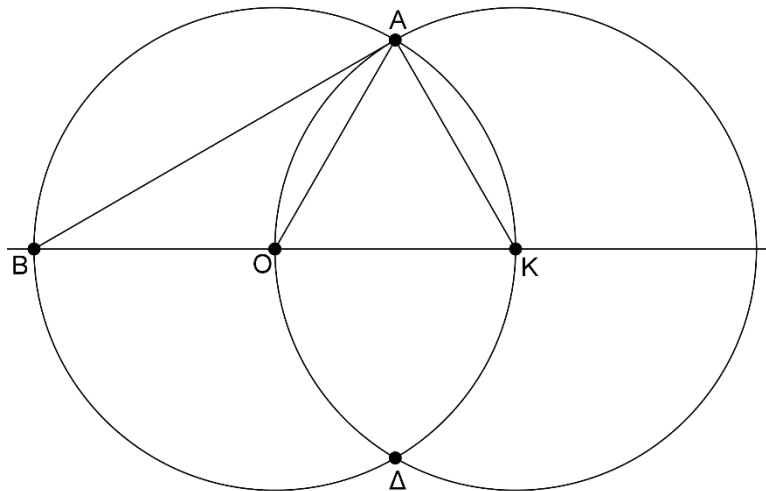
Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) με $OK = \rho$, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και Δ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΟΑΚ$ είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $ΒΑΚ$.

Μονάδες 15



Λύση

α) Ισχύουν:

$OA = \rho$ (ακτίνα του κύκλου με κέντρο O)

$KA = \rho$ (ακτίνα του κύκλου με κέντρο K)

$OK = \rho$ (δοσμένο από την εκφώνηση)

Επομένως $ΑΟΚ$ ισόπλευρο, εφόσον $OA = KA = OK$

β) Εφόσον το τρίγωνο $ΑΟΚ$ είναι ισόπλευρο ισχύει $A_1 = K_1 = O_1 = 60^\circ$

Άρα $K_1 = 60^\circ$ (1)

Η γωνία O_2 είναι παραπληρωματική της O_1 δηλαδή $O_1 + O_2 = 180^\circ \Leftrightarrow O_2 = 120^\circ$

Το τρίγωνο $ΟΑΒ$ είναι ισοσκελές ($OA = OB = \rho$) άρα $A_2 = B_2$

Επομένως,

$$\begin{cases} A_2 + B_2 + O_2 = 180^\circ \\ A_2 = B_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 + B_2 + 120^\circ = 180^\circ \\ A_2 = B_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 + B_2 = 60^\circ \\ A_2 = B_2 \end{cases} \Rightarrow A_2 = B_2 = 30^\circ$$

Άρα $B_2 = 30^\circ$ (2) και $BAK = A_1 + A_2 \Leftrightarrow BAK = 90^\circ$ (3)

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) οι γωνίες του τριγώνου BAK είναι γνωστές

ΑΣΚΗΣΗ (2_5652)

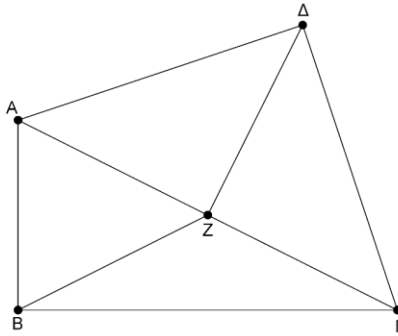
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $B = 90^\circ$ και Z το μέσο του ΑΓ. Με υποτείνουσα το ΑΓ κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ με $\Delta = 90^\circ$

α) Να αποδείξετε ότι $BZ = \Delta Z$.

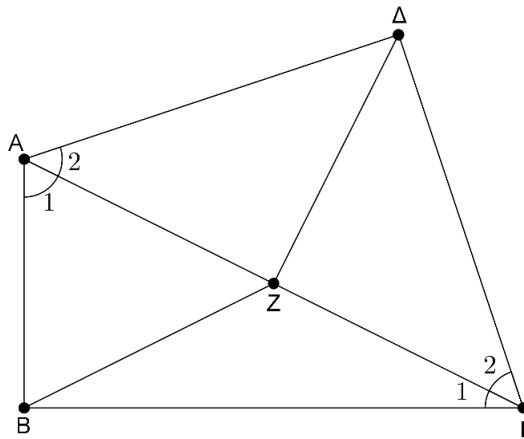
Μονάδες 13

β) Αν $\angle AGB = 30^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες BΑΔ και BΓΔ.

Μονάδες 12



Λύση



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ η BZ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ΑΓ, άρα

$$BZ = \frac{AG}{2} \quad (1).$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ η ΔZ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ΑΓ, άρα

$$\Delta Z = \frac{AG}{2} \quad (2).$$

Από (1) και (2) προκύπτει $BZ = \Delta Z$.

β) Η γωνία BΑΔ είναι το άθροισμα των γωνιών A_1, A_2

$A_1 = 60^\circ$ (συμπληρωματική της Γ_1 στο ABΓ)

$A_2 = 45^\circ$ διότι $\triangle A\Gamma$ ορθογώνιο και ισοσκελές.

Άρα

$$\angle B\Delta\Delta = A_1 + A_2 = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ \text{ και } \angle B\Gamma\Delta = \Gamma_1 + \Gamma_2 = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_6002)

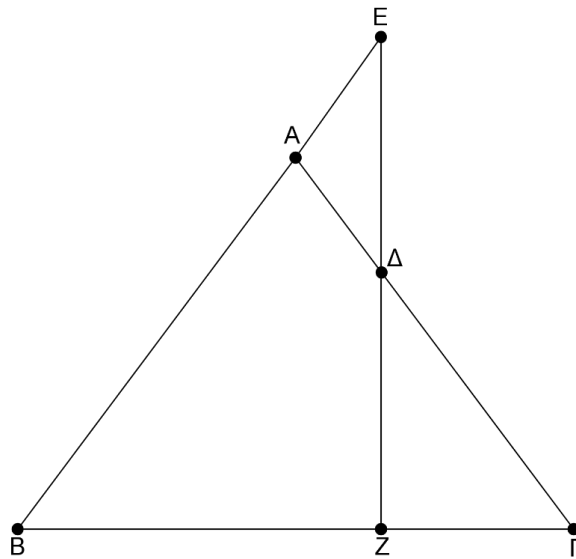
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεωρούμε σημείο E στην προέκταση της BA (προς το A) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς $A\Gamma$, ώστε $AE = A\Delta$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$.

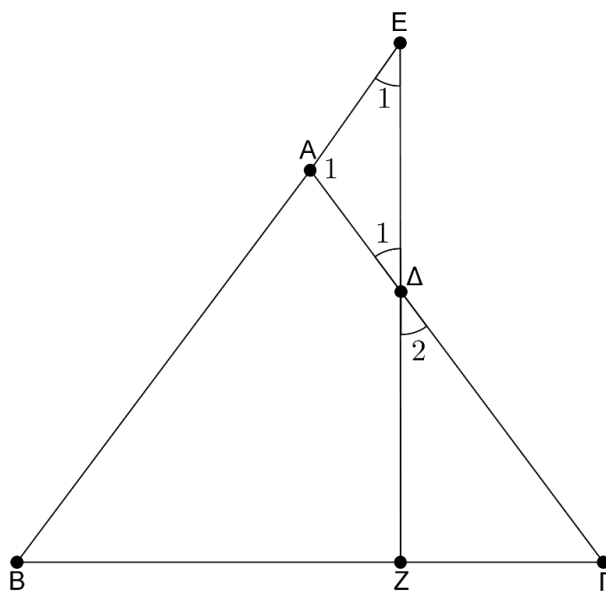
Μονάδες 10

β) Αν Z είναι το σημείο τομής της προέκτασης της $E\Delta$ (προς το Δ) με την $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι η EZ είναι κάθετη στην $B\Gamma$.

Μονάδες 15



Λύση



α) Η γωνία EAB είναι ευθεία γωνία δηλαδή $A_1 + A = 180^\circ$, όμως $A = 60^\circ$ (γωνία ισόπλευρου τριγώνου), άρα $A_1 = 120^\circ$

Στο τρίγωνο ΑΔΕ ισχύει :

$$A_1 + E_1 + \Delta_1 = 180^\circ \Rightarrow E_1 + \Delta_1 = 60^\circ \xrightarrow{E_1 = \Delta_1} \boxed{E_1 = \Delta_1 = 30^\circ}$$

β) Έχουμε,

$\Delta_2 = \Delta_1 = 30^\circ$ (κατακορυφήν) και

$\Gamma = 60^\circ$ (γωνία του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ) ,

άρα $\Delta Z \Gamma = 90^\circ$, όποτε ΔΖΓ ορθογώνιο.

ΑΣΚΗΣΗ (2_6584)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α. από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 9

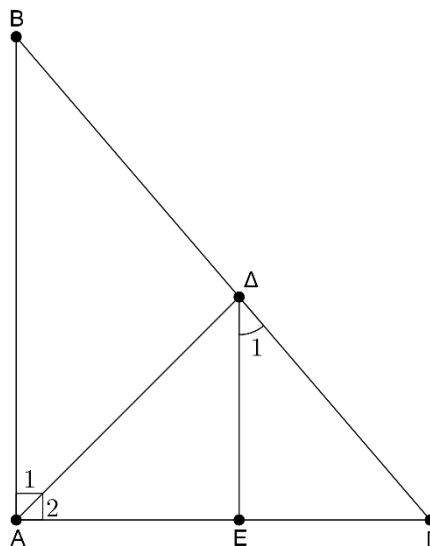
β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΑΔΕ.

Μονάδες 9

γ) Αν η γωνία Β είναι 20 μοίρες μεγαλύτερη της γωνίας Γ, να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ.

Μονάδες 7

Λύση



α) Οι ΑΒ και η ΔΕ είναι παράλληλες και εφόσον η ΑΒ τέμνει κάθετα την ΑΓ άρα και η ΔΕ θα τέμνει κάθετα την ΑΓ όποτε το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο στο Ε.

β) Εφόσον ΑΔ διχοτόμος της γωνίας Α και $A = 90^\circ$ τότε $A_1 = A_2 = 45^\circ$.

Οι γωνίες A_2 και ΑΔΕ είναι οι οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΕ επομένως έχουν άθροισμα 90° και επειδή $A_2 = 45^\circ$ άρα $\Delta ΔΕ = 45^\circ$.

γ) Έχουμε,

[lisari – team](#)

«Β Θέματα»

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + B + \Gamma = 180^\circ \Rightarrow B + \Gamma = 90^\circ (1)$$

Όμως,

$$B = \Gamma + 20^\circ (2)$$

Αντικαθιστώ την (2) στην (1) και έχω

$$\Gamma + 20^\circ + \Gamma = 90^\circ \Rightarrow 2 \cdot \Gamma = 70^\circ \Rightarrow \Gamma = 35^\circ$$

Άρα $B = 55^\circ$

Η γωνία $E\Delta\Gamma$ είναι συμπληρωματική της Γ άρα $E\Delta\Gamma = 55^\circ$

ΑΣΚΗΣΗ (2_6593)

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).

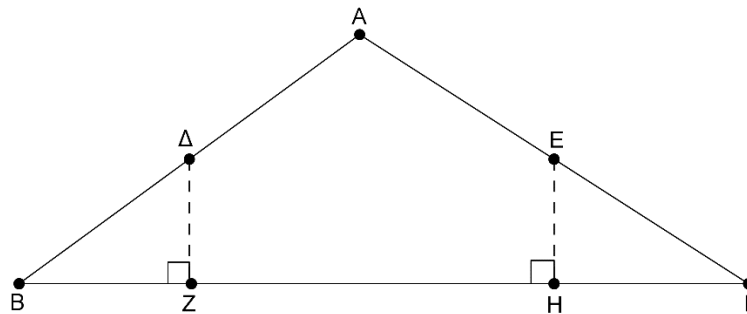
α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και E των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση $B\Gamma$.

Μονάδες 13

β) Αν $A = 75^\circ + B$ να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες 12

Λύση



α) Έστω Z και H αντίστοιχα οι προβολές των Δ και E πάνω στη $B\Gamma$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔZB και $EH\Gamma$ έχουν

(1° στοιχείο) $B\Delta = \Gamma E$ (μισά των ίσων πλευρών AB , $A\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$)

(2° στοιχείο) $B = \Gamma$ (προσκειμένες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου)

Άρα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μια προς μια επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε $\Delta Z = EH$

β) Ισχύουν οι σχέσεις :

$$A + B + \Gamma = 180^\circ (1) \quad B = \Gamma (2) \quad \text{και} \quad A = 75^\circ + B (3)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2) και (3) στην (1) προκύπτει

$$(75^\circ + B) + B + B = 180^\circ \Rightarrow 3 \cdot B = 180^\circ - 75^\circ \Rightarrow 3 \cdot B = 105^\circ \Rightarrow B = 35^\circ$$

Άρα από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $B = \Gamma = 35^\circ$ και από την σχέση (1)

$$A = 75^\circ + B \Rightarrow A = 110^\circ$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_6595)

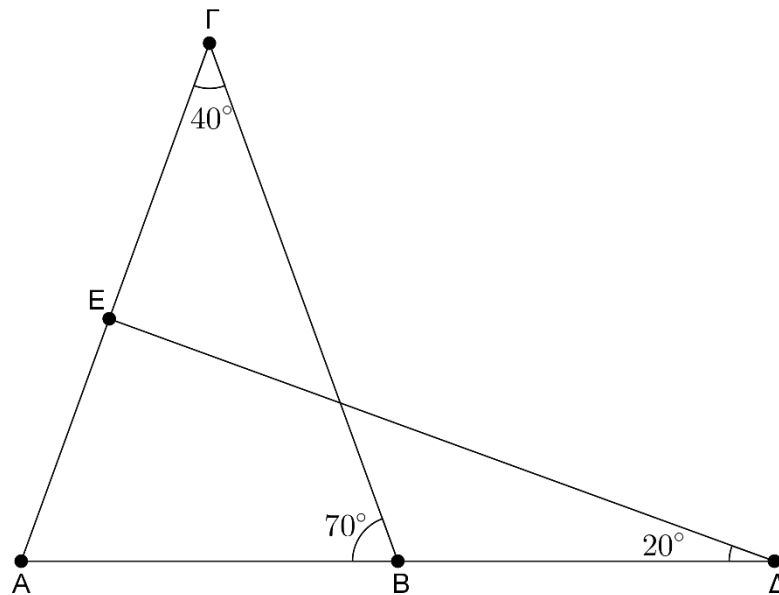
Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 12

β) Η γωνία ΑΕΔ είναι ορθή.

Μονάδες 13

**Λύση**

α) Έχουμε,

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Rightarrow A + 70^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow \boxed{A = 70^\circ}$$

Άρα

$$A = B = 70^\circ \Rightarrow AG = BG \Rightarrow ABG \text{ ισοσκελές.}$$

β) Στο τρίγωνο ΑΕΔ ισχύει $A + \Delta = 90^\circ$, επομένως η γωνία ΑΕΔ είναι ορθή

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

Κεφάλαιο 5ο

Παραλληλόγραμμα – Τραπεζία



ΑΣΚΗΣΗ (2_2817)

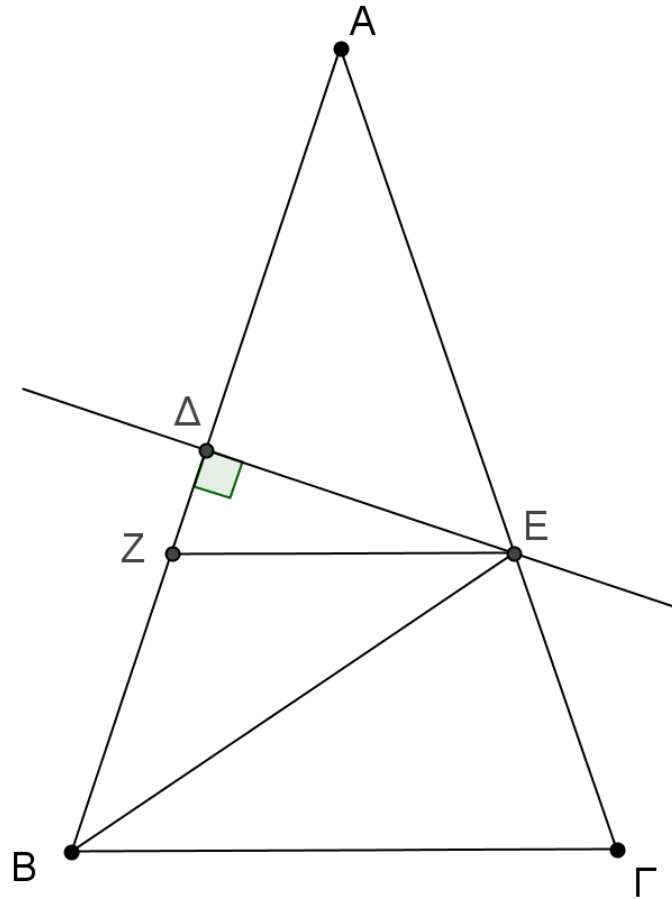
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB=AG$). Στο μέσο Δ της πλευράς AB φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την AG στο E . Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Z .

α) Να αποδείξετε ότι $AE=BE$.

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma EZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

α) Το E είναι σημείο της μεσοκαθέτου $E\Delta$, της πλευράς AB άρα θα ισαπέχει από τα άκρα του AB δηλαδή $AE=BE$.

β) Είναι

$$ZE \parallel B\Gamma \text{ (υπόθεση)} \Rightarrow Z\Gamma B \text{ τραπέζιο (1).}$$

Το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με

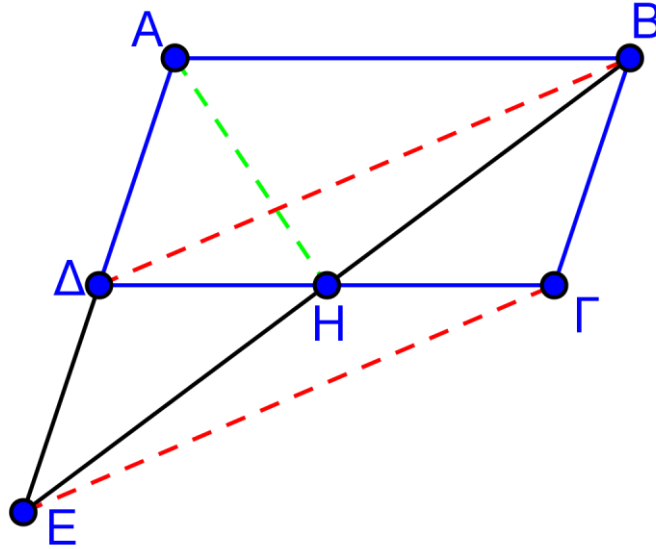
$$AB=AG \Rightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma} \text{ (2).}$$

(1),(2) $\Rightarrow Z\Gamma B$ ισοσκελές τραπέζιο

ΑΣΚΗΣΗ (2_2822)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=2B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E=\Delta\Delta$ και φέρουμε την BE που τέμνει την $\Delta\Gamma$ στο σημείο H . Να αποδείξετε ότι

- α) Το τρίγωνο $B\hat{A}E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)
 β) Το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
 γ) Η AH είναι διάμεσος του τριγώνου $B\hat{A}E$. (Μονάδες 9)

**Λύση**

α) Είναι $AB=2B\Gamma$ (υπόθεση) (1), $\Delta\Delta=\Delta E$ (υπόθεση) (2) και $\Delta\Delta=B\Gamma$ ($AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο) (3).

$$\text{Όμως } AE = \Delta\Delta + \overset{(2)}{\Delta E} \Rightarrow AE = \Delta\Delta + \Delta\Delta \Rightarrow AE = 2\Delta\Delta \overset{(3)}{\Rightarrow} AE = 2B\Gamma \overset{(1)}{\Rightarrow} AE = AB.$$

Άρα το τρίγωνο $B\hat{A}E$ είναι ισοσκελές.

β) Είναι $\Delta\Delta \parallel B\Gamma$ (γιατί το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο) $\Rightarrow \Delta E \parallel B\Gamma$ (1).

Επίσης $\Delta\Delta=\Delta E$ (υπόθεση) και $\Delta\Delta=B\Gamma$ (γιατί το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο) άρα $\Delta E=B\Gamma$ (2).

(1),(2) $\Rightarrow$ Το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Οι $\Delta\Gamma$ και BE είναι οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ άρα διχοτοούνται συνεπώς το σημείο τομής H , των $\Delta\Gamma$ και BE είναι το μέσο της BE (και της $\Delta\Gamma$) δηλαδή

η AH είναι διάμεσος του τριγώνου $B\hat{A}E$.

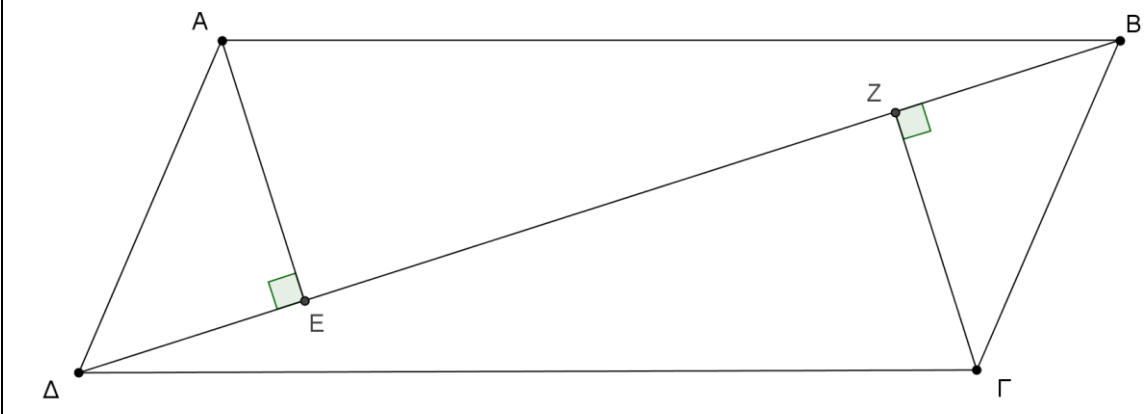
ΑΣΚΗΣΗ (2_2827)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ και η διαγώνίός του $ΒΔ$. Από τις κορυφές A και $Γ$ φέρουμε τις κάθετες $ΑΕ$ και $ΓΖ$ στην $ΒΔ$, που την τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{A} \hat{\Delta} E = \hat{\Gamma} \hat{B} Z$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΕΓΖ$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)

**Λύση**

α) Η $ΒΔ$ είναι τέμνουσα των παραλλήλων $ΑΔ$ και $ΒΓ$ άρα $\hat{A} \hat{\Delta} E = \hat{\Gamma} \hat{B} Z$ (1), ως εντός εναλλάξ.

Τα τρίγωνα $\hat{A} \hat{\Delta} E$ και $\hat{\Gamma} \hat{B} Z$ είναι ίσα γιατί $\hat{A} \hat{E} \Delta = \hat{\Gamma} \hat{Z} B = 90^\circ$, $ΑΔ = ΒΓ$ ($ΑΒΓΔ$ παραλληλόγραμμο) και $\hat{A} \hat{\Delta} E = \hat{\Gamma} \hat{B} Z$ (1). Άρα $ΑΕ = ΓΖ$ (2).

β) Είναι $ΑΕ = ΓΖ$ (2). Επίσης $ΑΕ \perp ΒΔ$ και $ΓΖ \perp ΒΔ$ άρα $ΑΕ \parallel ΓΖ$ (3).

(2),(3) $\Rightarrow$ Το τετράπλευρο $ΑΕΓΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.

ΑΣΚΗΣΗ (2_2829)

Δίνεται τρίγωνο $\hat{A} \hat{B} \hat{\Gamma}$. Από το μέσο M της πλευράς $ΒΓ$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $ΜΔ = ΒΑ$ με $ΜΔ \parallel ΒΑ$ και ευθύγραμμο τμήμα $ΜΕ = ΓΑ$ με $ΜΕ \parallel ΓΑ$. Να αποδείξετε ότι :

α) $\Delta A = A E$

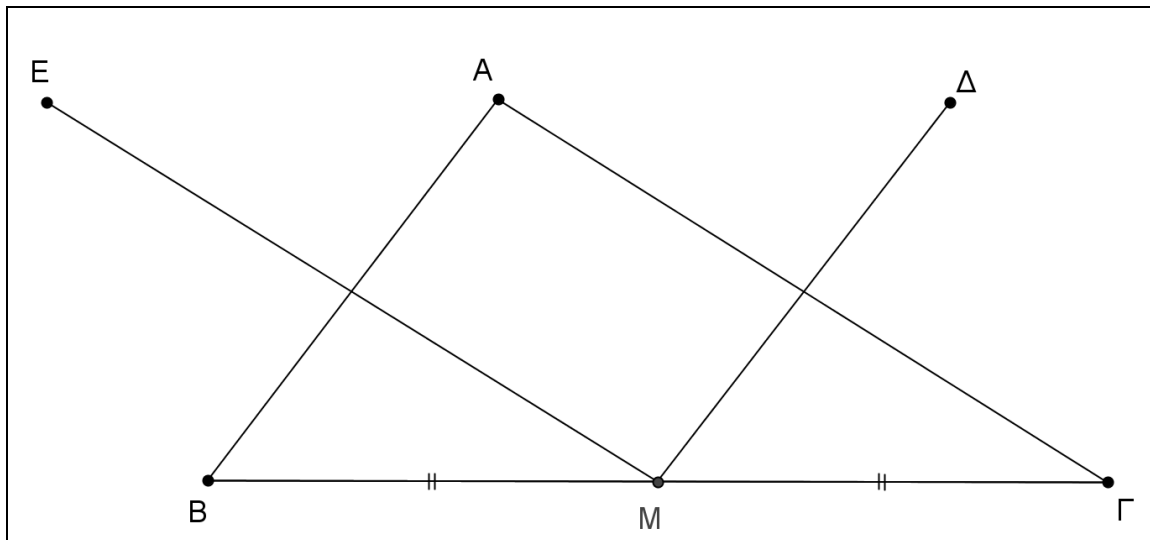
(Μονάδες 8)

β) Τα σημεία Δ, A και E βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

(Μονάδες 9)

γ) $\Delta E = B \Gamma$

(Μονάδες 9)

**Λύση**

α) Είναι $BM = GM$ (υπόθεση) (1).

Επίσης $MD = BA$ και $MD \parallel BA$ (υπόθεση) άρα το τετράπλευρο $AAMB$ είναι παραλληλόγραμμο άρα $DA = BM$ (2).

Τέλος $ME = GA$ και $ME \parallel GA$ (υπόθεση) άρα το τετράπλευρο $AEMG$ είναι παραλληλόγραμμο άρα $AE = GM$ (3).

$$(1),(2),(3) \Rightarrow DA = AE \quad (4)$$

β) Το τετράπλευρο $AAMB$ είναι παραλληλόγραμμο άρα $DA \parallel BM \Rightarrow DA \parallel BG$ (5). Το τετράπλευρο $AEMG$ είναι παραλληλόγραμμο άρα $AE \parallel GM \Rightarrow AE \parallel BG$ (6).

Επειδή τα τμήματα DA και AE έχουν κοινό σημείο και λόγω των σχέσεων (5),(6) τα σημεία E, A και D θα είναι συνευθειακά.

γ) Έχουμε,

$$(2),(3) \Rightarrow DA + AE = BM + GM \Rightarrow DE = BG$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_2831)

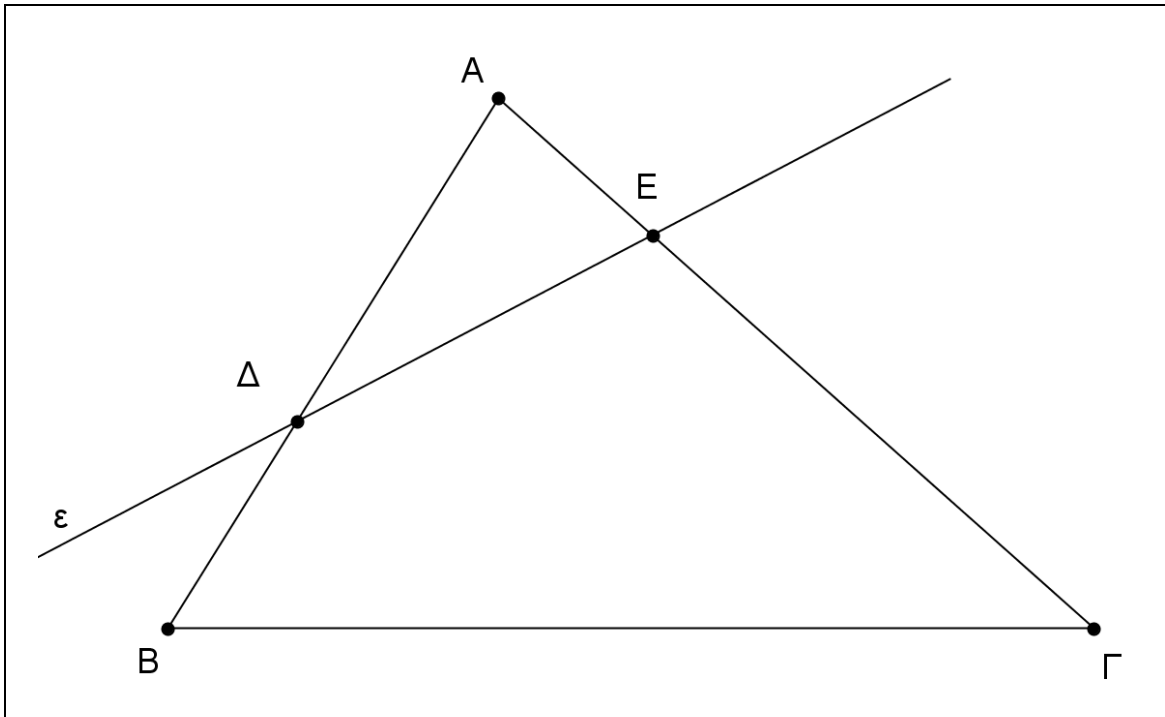
Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και Δ το μέσο της πλευράς AB . Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ϵ) που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ σε εσωτερικό της σημείο E . Η ευθεία (ϵ) χωρίζει το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ σε ένα τρίγωνο $\triangle ADE$ και ένα τετράπλευρο $BDE\Gamma$.

α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $BDE\Gamma$ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

**Λύση**

α) Επειδή $ΒΔ \nparallel ΓΕ$, για να είναι το τετράπλευρο $ΒΔΕΓ$ τραπέζιο θα πρέπει $ΔΕ \parallel ΒΓ$ (1).
Επίσης το σημείο $Δ$ είναι το μέσο της $ΑΒ$ (υπόθεση) (2).

Λόγω των (1) και (2), το σημείο $Ε$ θα πρέπει να είναι το μέσο της $ΑΓ$.

β) Για να είναι το τετράπλευρο $ΔΕΓΒ$ ισοσκελές τραπέζιο θα πρέπει :

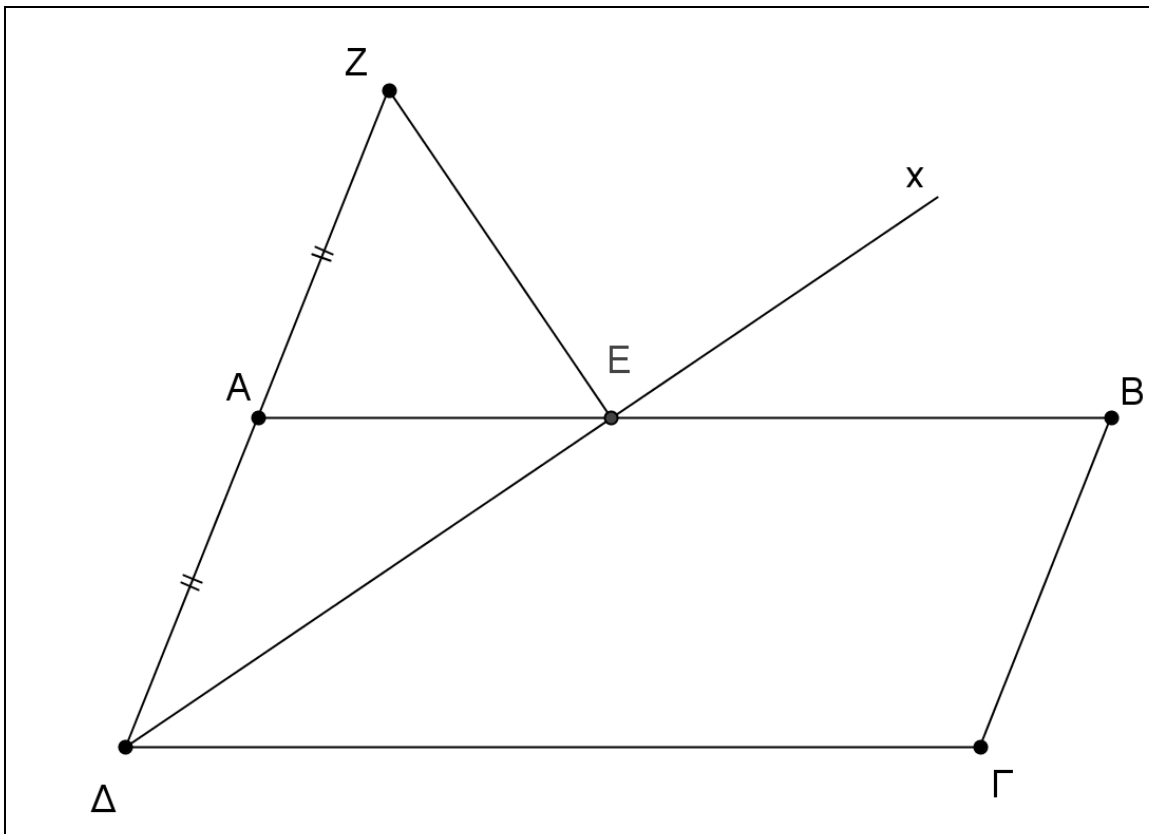
$$ΒΔ = ΓΕ \Leftrightarrow 2ΒΔ = 2ΓΕ \Leftrightarrow ΑΒ = ΑΓ \Leftrightarrow \text{το τρίγωνο } \hat{A}ΒΓ \text{ ισοσκελές.}$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_2832)

Σε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$, προεκτείνουμε την πλευρά $ΔΑ$ (προς το $Α$) κατά τμήμα $ΑΗ=ΔΑ$. Φέρουμε την διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, η οποία τέμνει την $ΑΒ$ στο σημείο $Ζ$. Να αποδείξετε ότι :

α) Το τρίγωνο $\hat{A} \hat{Z} Ζ$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Το τρίγωνο $\hat{A} \hat{Z} Η$ είναι ορθογώνιο με ορθή την γωνία $\hat{Z}$. (Μονάδες 13)



Λύση

α) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο (υπόθεση) άρα

$$AB \parallel \Delta\Gamma \Rightarrow AZ \parallel \Delta\Gamma.$$

Η ΔΖ είναι τέμνουσα των παραλλήλων ΑΖ και ΔΓ άρα $\hat{Z}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{A}\hat{Z}\hat{\Delta}$ (1), ως εντός εναλλάξ.

Επίσης $Z \hat{\Delta} \Gamma = A \hat{\Delta} Z$ (2) (υπόθεση)

$$(1),(2) \Rightarrow A \overset{\wedge}{\Delta} Z = A \hat{Z} \Delta$$

δηλαδή το τρίγωνο $A\hat{\Delta}Z$ είναι ισοσκελές με $\Delta A = AZ$ (3).

β) Έχουμε, $AH = \Delta A$ (4) (υπόθεση)

$$(3),(4) \Rightarrow \Delta Z = \frac{\Delta H}{2}$$

άρα το τρίγωνο $\triangle \hat{Z}H$ είναι ορθογώνιο με $\triangle \hat{Z}H = 90^\circ$.

ΑΣΚΗΣΗ (2_2834)

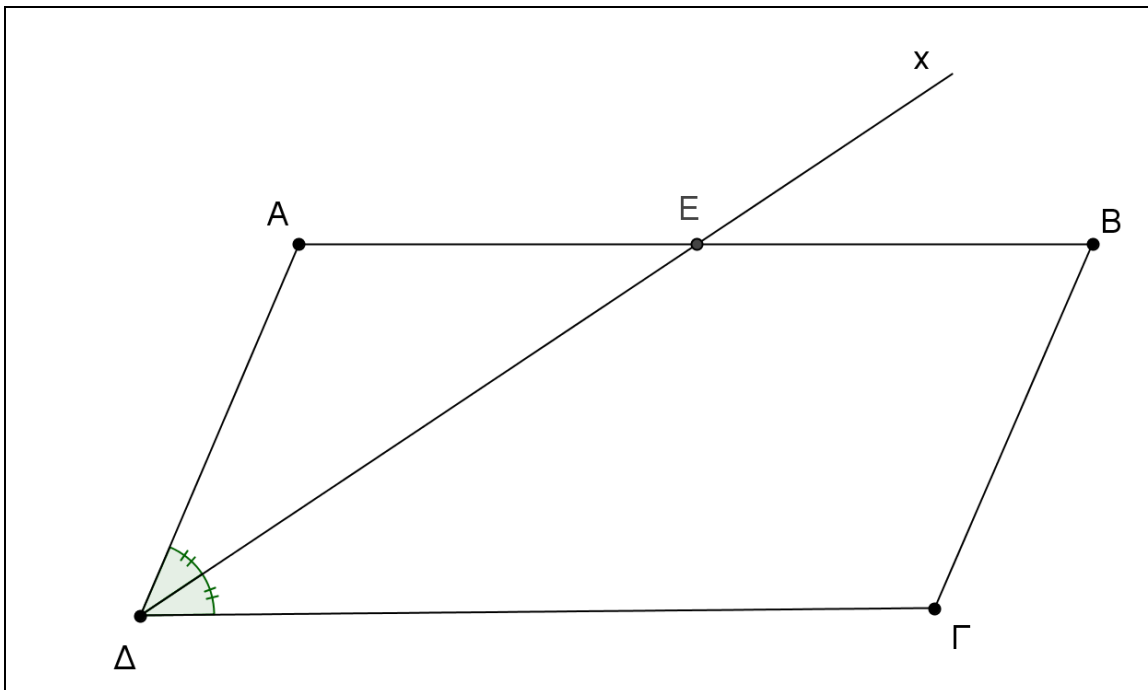
Δίνεται παραλληλόγραμμο με $AB=2AD$. Φέρουμε την διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\hat{\Delta}E$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 12)

β) Είναι το E μέσο της πλευράς AB; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

**Λύση**

α) Το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο (υπόθεση) άρα

$$AB \parallel \Delta\Gamma \Rightarrow AE \parallel \Delta\Gamma$$

Η ΔΕ είναι τέμνουσα των παραλλήλων ΑΕ και ΔΓ άρα $\hat{E}\Delta\Gamma = \hat{A}\hat{E}\Delta$ (1), ως εντός εναλλάξ.

Επίσης $\hat{E}\Delta\Gamma = \hat{A}\hat{\Delta}E$ (2) (υπόθεση).

$$(1),(2) \Rightarrow \hat{A}\hat{\Delta}E = \hat{A}\hat{E}\Delta$$

δηλαδή το τρίγωνο $\hat{A}\hat{\Delta}E$ είναι ισοσκελές με $A\Delta = AE$ (3).

β) Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$AB = 2A\Delta \stackrel{(3)}{\Rightarrow} AB = 2AE \Rightarrow AE = \frac{AB}{2} \quad (4).$$

Επίσης :

$$EB = AB - AE \stackrel{(4)}{\Rightarrow} EB = AB - \frac{AB}{2} \Rightarrow EB = \frac{AB}{2} \quad (5).$$

$$(4),(5) \Rightarrow AE = EB$$

άρα το σημείο E είναι το μέσο του AB.

ΑΣΚΗΣΗ (2_2836)

Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του.

Θεωρούμε σημείο E του τμήματος AO και σημείο Z του τμήματος OΓ, ώστε OE=OZ.

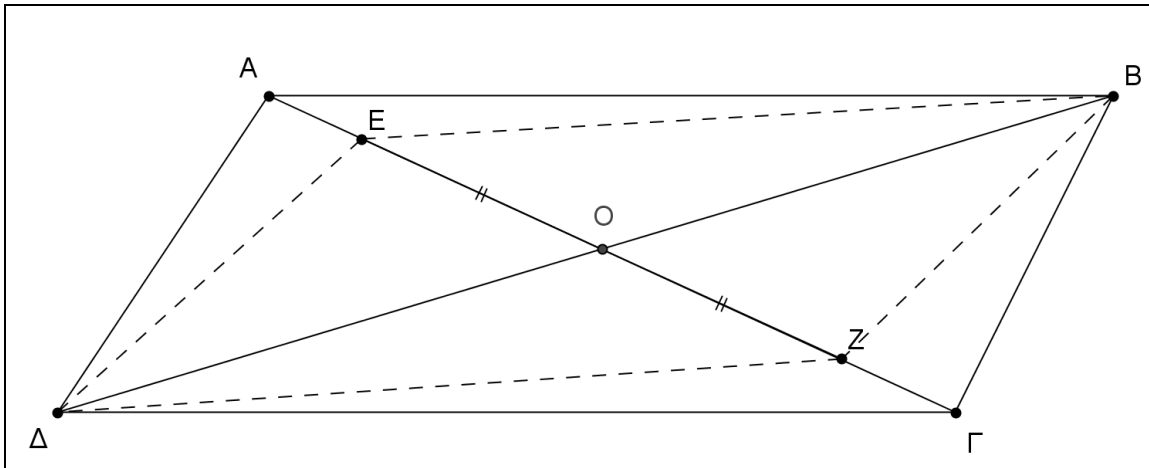
Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΕ=BZ.

(Μονάδες 12)

β) το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

**Λύση**

α) Τα τρίγωνα $\triangle \hat{E} O$ και $\triangle \hat{Z} O$ είναι ίσα γιατί $OE = OZ$ (υπόθεση), $DO = BO$ (υπόθεση) και $\hat{O}E = \hat{O}Z$ (κατακορυφήν) άρα $DE = BZ$.

β) Είναι $OE = OZ$ (υπόθεση) και $DO = BO$ (υπόθεση) δηλαδή οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $DEBZ$ διχοτομούνται άρα το $DEBZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

ΑΣΚΗΣΗ (2_2841)

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $\triangle \hat{B} \Gamma (\hat{A} = 90^\circ)$ και AD η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Από το σημείο D φέρουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την πλευρά AG στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) $AD = \frac{B\Gamma}{2}$

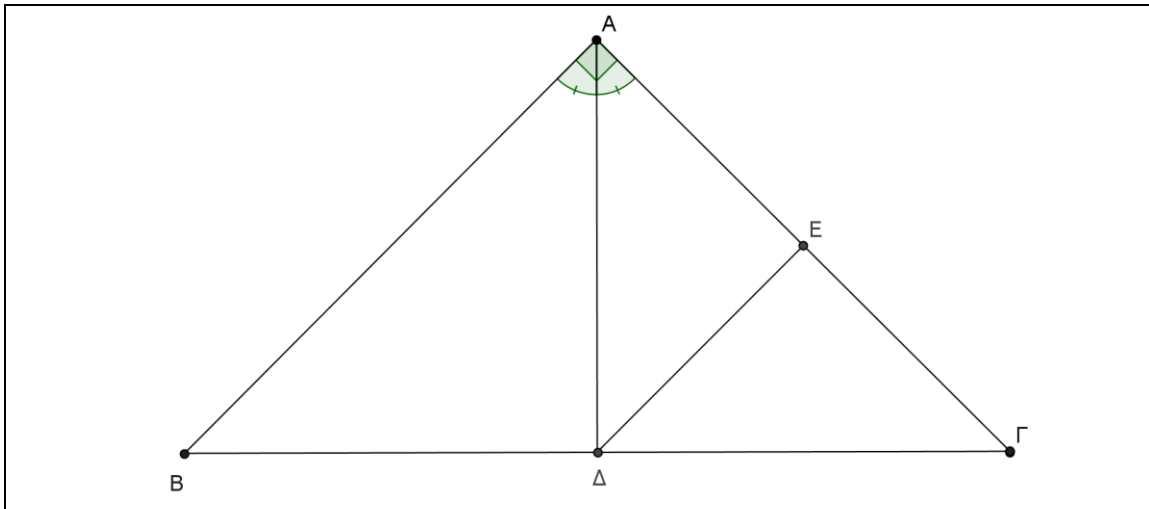
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $\triangle \hat{E} \Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 8)

γ) $DE = \frac{AG}{2}$

(Μονάδες 9)

**Λύση**

α) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής Α του ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου $\hat{A}B\Gamma$ άρα θα είναι και διάμεσος προς την υποτείνουσα ΒΓ δηλαδή

$$A\Delta = \frac{B\Gamma}{2}.$$

β) Επειδή $AB \perp A\Gamma$ και $DE \parallel AB$ θα είναι και $DE \perp A\Gamma$ άρα το τρίγωνο $\hat{\Delta}E\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

γ) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής Α του ισοσκελούς τριγώνου $\hat{A}B\Gamma$ άρα θα είναι και ύψος προς την ΒΓ δηλαδή το τρίγωνο $\hat{A}\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

Επίσης $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2} = \Delta\Gamma$ δηλαδή το ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{A}\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές και

επειδή η ΔΕ είναι ύψος προς την υποτείνουσα ΑΓ, του $\hat{A}\Delta\Gamma$, θα είναι και διάμεσος προς αυτήν άρα $DE = \frac{A\Gamma}{2}.$

ΑΣΚΗΣΗ (2_2844)

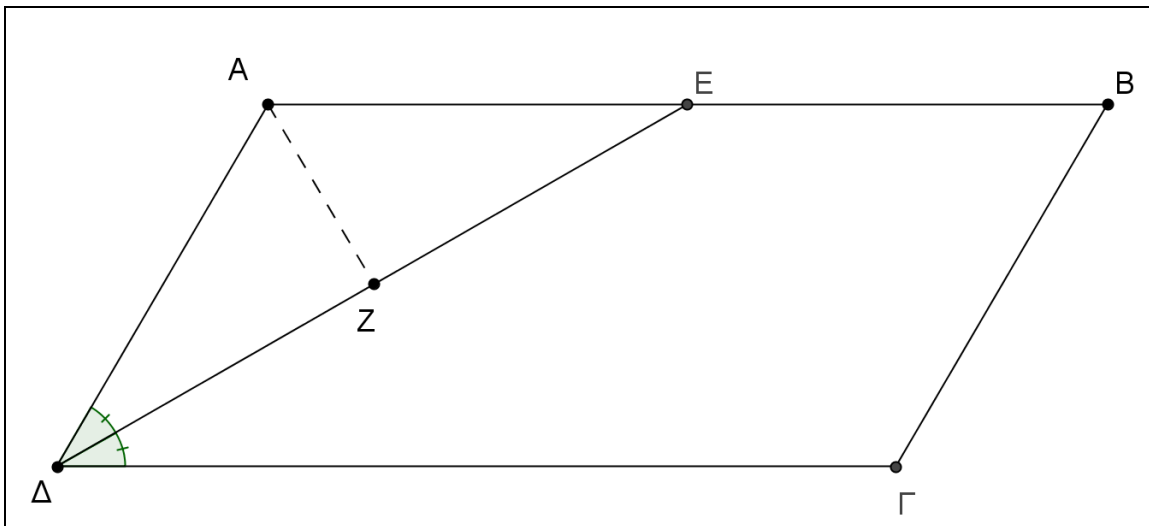
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία $\hat{A} = 120^\circ$ και $AB = 2A\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε, και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα ΑΖ στη ΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) γωνία $\hat{A}\Delta E = 30^\circ.$

(Μονάδες 10)

β) $AZ = \frac{AB}{4}$

(Μονάδες 15)

**Λύση**

α) Η ΔΕ είναι τέμνουσα των παραλλήλων ΑΕ και ΔΓ άρα οι γωνίες $\hat{E}\hat{\Delta}\Gamma$ και $\hat{A}\hat{E}\Delta$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ.

Επειδή $\hat{A}\hat{\Delta}E = \hat{E}\hat{\Delta}\Gamma$ (υπόθεση) θα είναι και $\hat{A}\hat{\Delta}E = \hat{A}\hat{E}\Delta$ άρα στο τρίγωνο $\hat{A}\hat{\Delta}E$ θα είναι

$$120^\circ + 2\hat{A}\hat{\Delta}E = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}\hat{\Delta}E = 30^\circ.$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{A}\hat{Z}\Delta$ είναι $\hat{A}\hat{\Delta}Z = \hat{A}\hat{\Delta}E = 30^\circ$ οπότε $AZ = \frac{A\Delta}{2}$ (1).

Επίσης

$$AB = 2A\Delta \Rightarrow A\Delta = \frac{AB}{2} \quad (2).$$

Άρα

$$AZ \stackrel{(1),(2)}{=} \frac{\frac{AB}{2}}{2} \Rightarrow AZ = \frac{AB}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_2849)

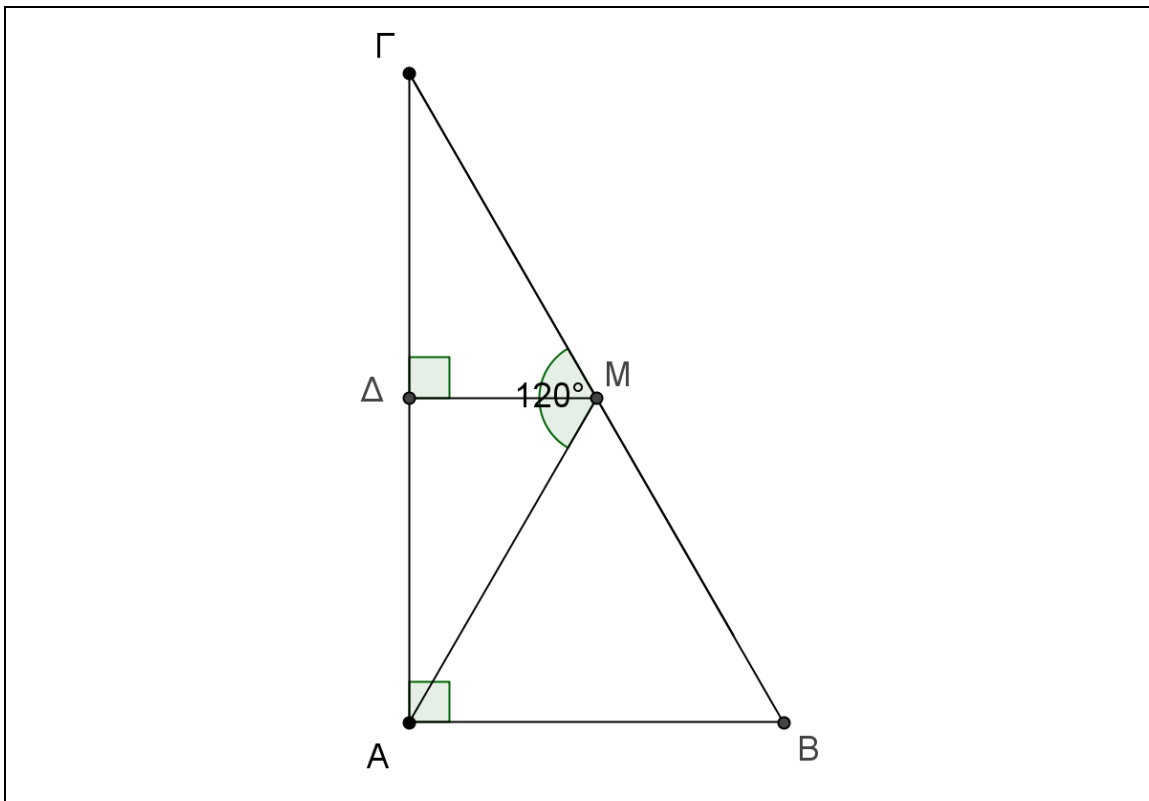
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 8$ cm. Έστω ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου και $M\Delta \perp A\Gamma$. Αν η γωνία $\hat{A}\hat{M}\hat{\Gamma}$ είναι ίση με 120° , τότε:

α) Να δείξετε ότι $AB = 4$ cm.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μήκος της ΜΔ.

(Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

α) Η AM είναι η διάμεσος προς την υποτείνουσα BΓ, του ορθογωνίου τριγώνου $\triangle AB\Gamma$
 άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$ (1) δηλαδή το τρίγωνο $\triangle AM\Gamma$ είναι ισοσκελές οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma}$

Συνεπώς στο τρίγωνο $\triangle AM\Gamma$ είναι

$$120^\circ + 2\hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ.$$

Έτσι, στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AM\Gamma$, για την απέναντι κάθετη πλευρά της $\hat{\Gamma}$, θα ισχύει

$$AB = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm.}$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle M\Delta\Gamma$, για την απέναντι κάθετη πλευρά της $\hat{\Gamma}$, θα ισχύει

$$M\Delta = \frac{M\Gamma}{2} \stackrel{(1)}{=} \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4} = \frac{8}{4} = 2 \text{ cm.}$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_2852)

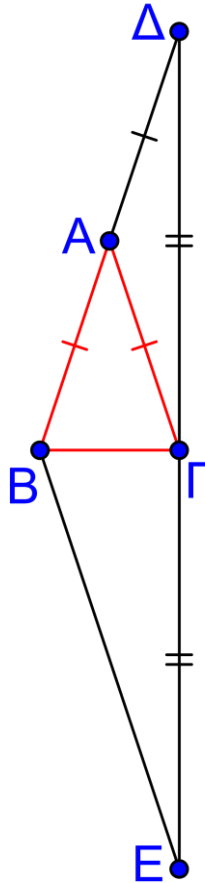
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στην προέκταση της BA (προς το μέρος της κορυφής A) παίρνουμε σημείο Δ ώστε $AB = AD$ και στην προέκταση της ΔΓ (προς το μέρος της κορυφής Γ) παίρνουμε σημείο Ε ώστε $\Delta\Gamma = \Gamma\text{E}$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle \Gamma\text{B}$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $BE \parallel AG$ και $AG = \frac{BE}{2}$.

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$AG = AB = AD = \frac{BD}{2} \Rightarrow AG = \frac{BD}{2}.$$

Άρα το $\triangle B \hat{A} \Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\angle B \hat{A} \Gamma = 90^\circ$.

β) Από την υπόθεση έχουμε $AB = AD$ άρα το σημείο A είναι το μέσο του BD και $\Gamma D = \Gamma E$ άρα το σημείο Γ είναι το μέσο του DE.

Συνεπώς το AG, ενώνει τα μέσα των πλευρών AB και DE, του τριγώνου $\triangle B \hat{A} E$, οπότε

$$AG \parallel BE \text{ και } AG = \frac{BE}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_2850)

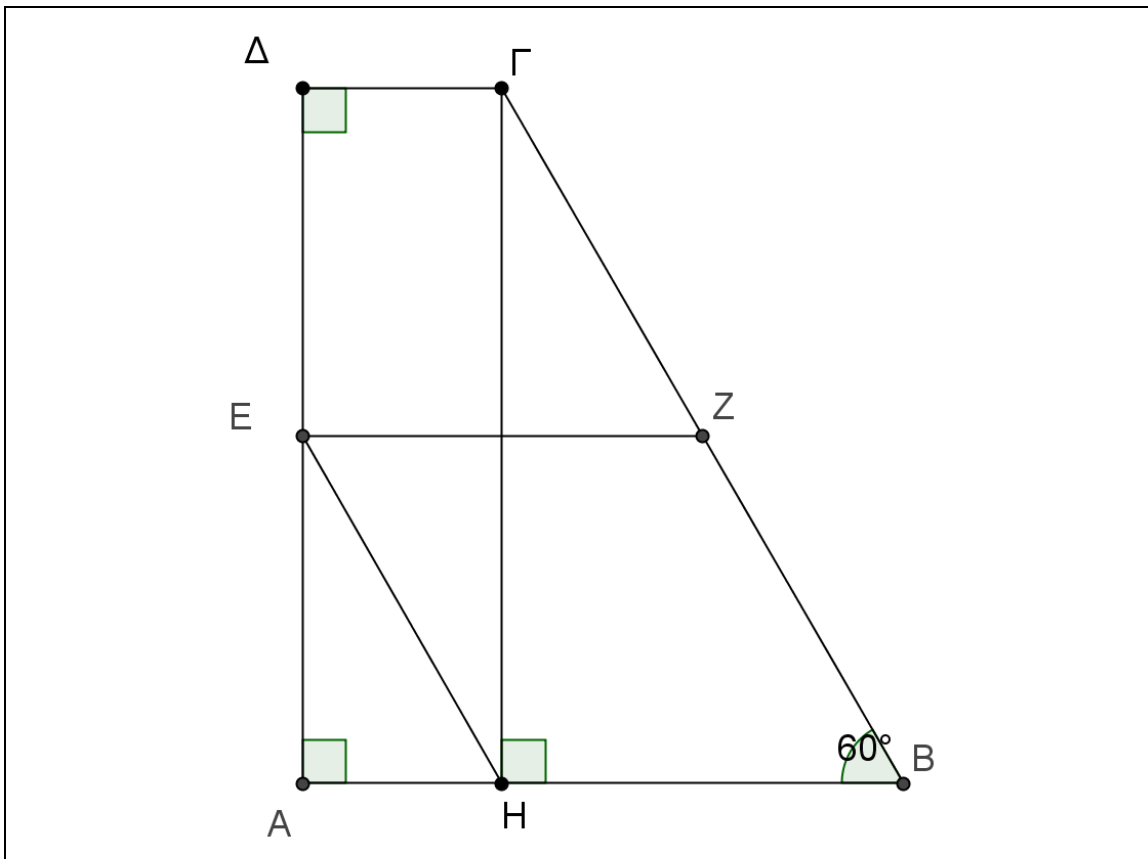
Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB > \Gamma \Delta$, $B\Gamma = 4\Gamma \Delta$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρουμε την $\Gamma H \perp AB$ και θεωρούμε τα μέσα E και Z των πλευρών AD και BΓ αντιστοίχως. Να δείξετε ότι:

α) $AB = 3\Gamma \Delta$.

(Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο EHBZ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

**Λύση**

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma \hat{H} B$ είναι $\hat{B} = 60^\circ$ άρα

$$\hat{H} \Gamma B = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

συνεπώς για την απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας $\hat{H} \Gamma B$ θα ισχύει

$$HB = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4\Gamma\Delta}{2} \Rightarrow HB = 2\Gamma\Delta (1).$$

Το τετράπλευρο $AH\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο γιατί $\hat{A} = \hat{\Delta} = \hat{A}\hat{H}\Gamma = 90^\circ$ άρα $AH = \Gamma\Delta$ (2)
Έτσι

$$AB = AH + HB \stackrel{(1),(2)}{=} \Gamma\Delta + 2\Gamma\Delta \Rightarrow AB = 3\Gamma\Delta (3)$$

β) Η EZ είναι η διάμεσος του τραπεζίου άρα $EZ \parallel AB \Rightarrow EZ \parallel HB$ (4) και

$$EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \stackrel{(3)}{=} \frac{3\Gamma\Delta + \Gamma\Delta}{2} \Rightarrow EZ = 2\Gamma\Delta \stackrel{(1)}{\Rightarrow} EZ = HB (5)$$

(4),(5) $\Rightarrow$ το τετράπλευρο $EHBZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

ΑΣΚΗΣΗ (2_2856)

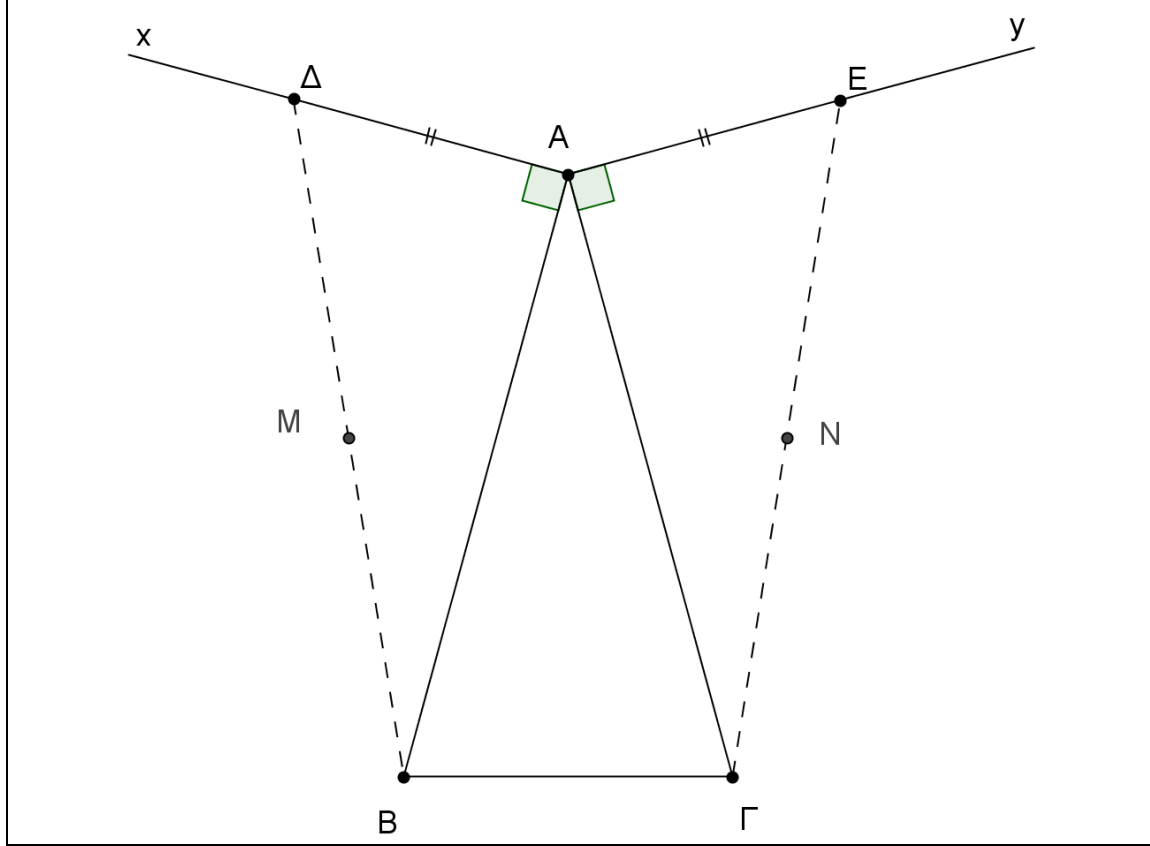
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$. Στις Ax και Ay θεωρούμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = AE$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

(Μονάδες 12)

β) Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των τμημάτων ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ. Είναι ορθογώνια τρίγωνα και ΑΒ=ΑΓ και ΑΔ=ΑΕ (από υπόθεση). Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα από κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων. Συνεπώς ΒΔ=ΓΕ

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΑΜ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα, άρα

$$AM = \frac{BG}{2}$$

Όμοια η ΑΝ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα του ΑΓΕ τριγώνου, οπότε

$$AN = \frac{AG}{2}$$

Επιπλέον ΑΒ=ΑΓ, οπότε ΑΜ=ΑΝ, δηλαδή το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές

ΑΣΚΗΣΗ (2_5069)

Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ.

Να αποδείξετε ότι

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Η προέκτασή της διαμέσου ΑΜ προς το μέρος της κορυφής Α διχοτομεί την πλευρά ΕΔ του τριγώνου ΔΑΕ.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ τα οποία έχουν:

i) $AB = A\Delta$ από υπόθεση

ii) $A\Gamma = AE$ από υπόθεση

iii) $A_1 = A_2$ κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα έχουν δυο πλευρές και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες άρα είναι ίσα

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABM και $A\Delta N$ τα οποία έχουν:

i) $AB = A\Delta$ από υπόθεση

ii) $B = \Delta$ γιατί τα τρίγωνα ABM , $A\Delta N$ είναι ίσα

iii) $A_1 = A_3$ κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα ABM και $A\Delta N$ έχουν δυο πλευρές και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες άρα είναι ίσα. Οπότε θα είναι $N\Delta = BM$

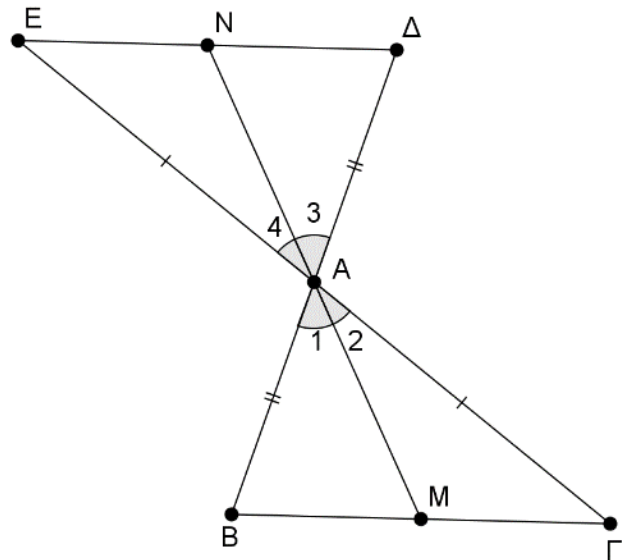
Όμως

$$BM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\Delta E}{2}$$

Άρα από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

$$N\Delta = \frac{\Delta E}{2}$$

Οπότε το N είναι το μέσο της ΔE δηλαδή η προέκτασή της διαμέσου AM προς το μέρος της κορυφής A διχοτομεί την πλευρά $E\Delta$ του τριγώνου ΔAE .

**ΑΣΚΗΣΗ (2_2851)**

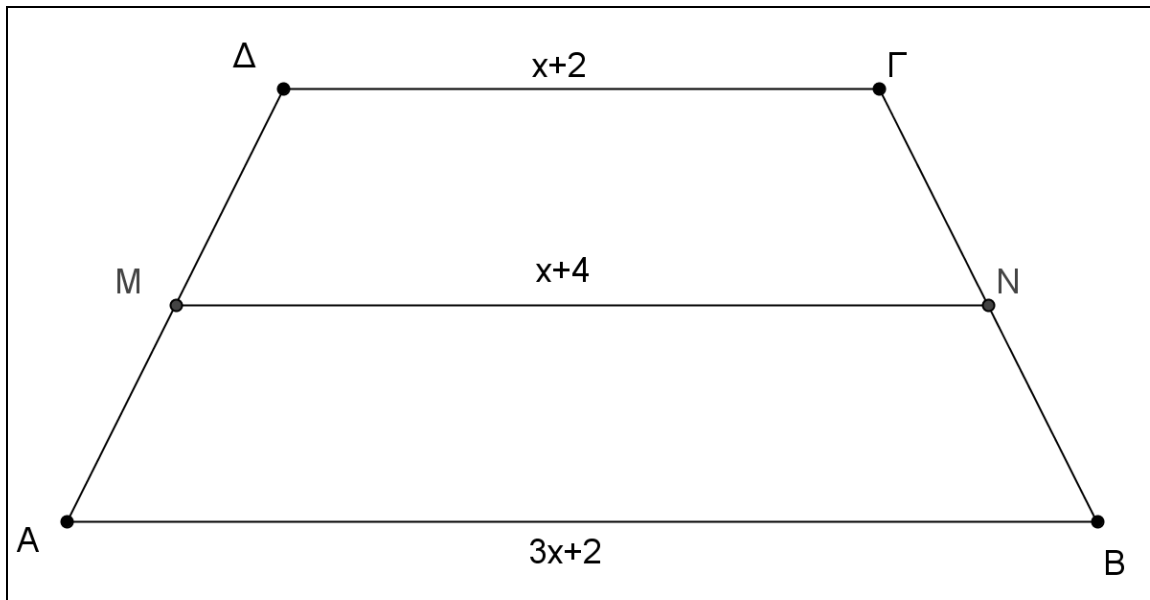
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$.

α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι: $AB = 3x + 2$, $\Gamma\Delta = x + 2$ και το μήκος της διαμέσου του τραπεζίου είναι $MN = x + 4$, τότε να δείξετε ότι $x = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Αν η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου.

(Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

α) Η MN είναι η διάμεσος του τραπέζιου ABΓΔ άρα :

$$MN = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow x + 4 = \frac{3x + 2 + x + 2}{2} \Leftrightarrow 2x + 8 = 4x + 4 \Leftrightarrow x = 2$$

β) Το τραπέζιο ABΓΔ είναι ισοσκελές ($AD = B\Gamma$) άρα $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = \hat{B}$ οπότε :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ \Rightarrow 6\hat{B} = 360^\circ \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ.$$

Συνεπώς

$$\hat{A} = 60^\circ \text{ και } \hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 120^\circ.$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_2858)

Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με $AB = 2B\Gamma$ και E το μέσο της πλευράς του AB.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές.

Μονάδες 10

β) Η DE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$

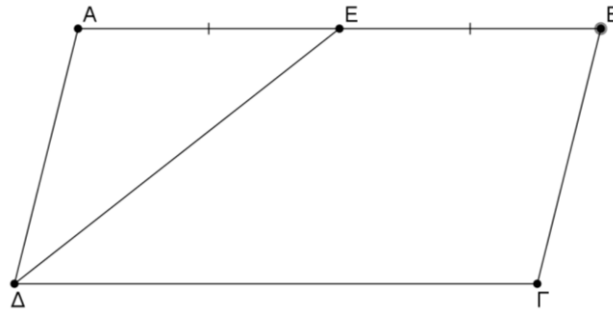
Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Το E είναι μέσο του AB, άρα θα ισχύει:

$$AE = EB = \frac{AB}{2} \stackrel{AB=2B\Gamma}{=} \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma \stackrel{AD=B\Gamma}{=} AD \Rightarrow AE = AD$$

άρα το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές.

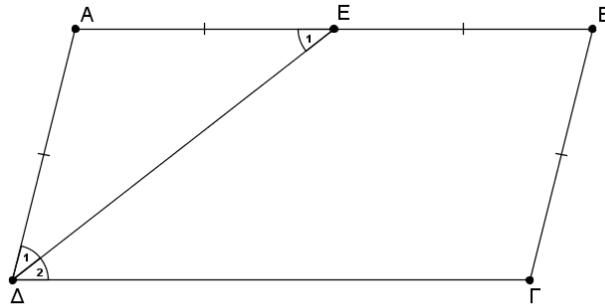


β) Από το α) ερώτημα, το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές άρα ισχύει:

$$\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1 \quad \textcircled{1}$$

Αλλά $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_2$ $\textcircled{2}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΔΓ, τεμνόμενες από την ΔΕ.

Άρα, από $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ προκύπτει ότι: $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ άρα η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$



ΑΣΚΗΣΗ (2_3411)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ θεωρούμε σημείο Ε ώστε ΜΔ = ΔΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 12

β) Η ΒΕ διέρχεται από το μέσο της διαμέσου ΑΜ.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Είναι ΜΔ = ΔΕ (υπόθεση) και

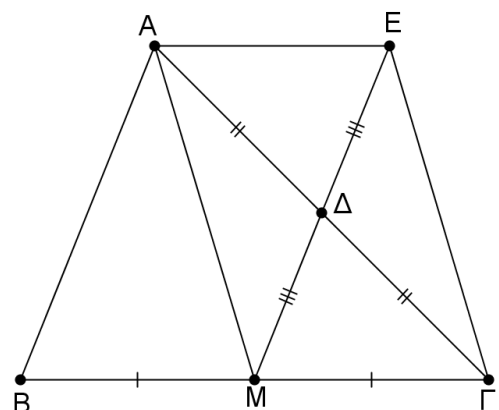
$$\Delta \text{ μέσο του } ΑΓ, \text{ άρα } ΑΔ = ΔΓ = \frac{ΑΓ}{2}$$

Άρα, το ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι διαγώνιοί του, ΑΓ, ΜΕ διχοτομούνται.

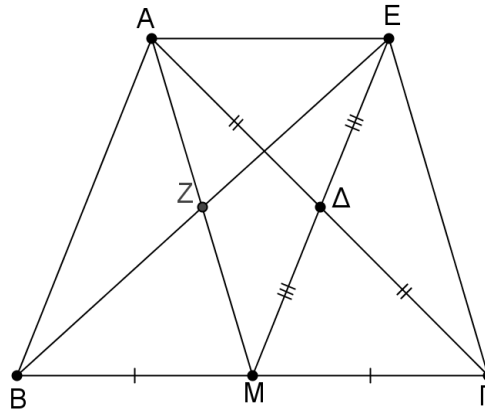
β) Το ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, άρα είναι:

$$ΑΕ // = ΜΓ \stackrel{BM=MG}{\Leftrightarrow} ΑΕ // = ΒΜ$$

Οπότε ΑΕΜΔ παραλληλόγραμμο, άρα οι



διαγώνιοί του ΑΜ και ΒΕ διχοτομούνται, οπότε
η ΒΕ διέρχεται από το μέσο Ζ της ΑΜ

**ΑΣΚΗΣΗ (2_3412)**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ θεωρούμε σημείο Ε ώστε ΜΔ = ΔΕ.

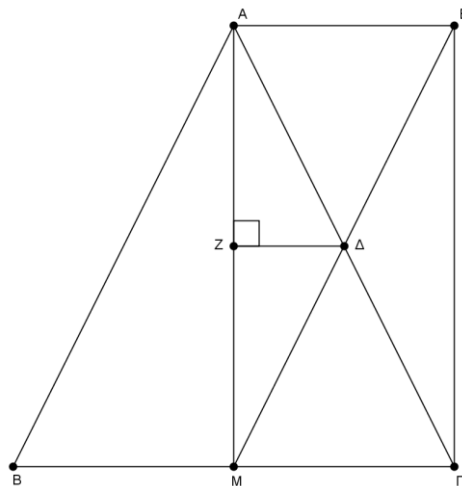
Αν το σημείο Ζ είναι το ίχνος του Δ στην ΑΜ, να αποδείξετε ότι

α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 12

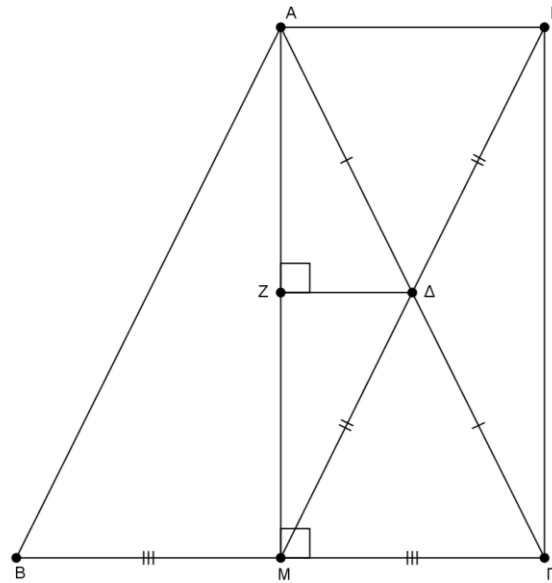
β) $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{4}$

Μονάδες 13

**ΛΥΣΗ**

α) Είναι ΜΔ = ΜΕ (υπόθεση) και Δ μέσο του ΑΓ, άρα $A\Delta = \Delta\Gamma = \frac{A\Gamma}{2}$

Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοί του ΑΓ, ΜΕ διχοτομούνται. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσος ΑΜ είναι και ύψος, άρα $\hat{A}\hat{M}\hat{\Gamma} = 90^\circ$, άρα, το ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο με μια γωνία του ορθή, άρα ΑΜΓΕ ορθογώνιο.



β) Το Z είναι ίχνος του Δ στην ΑΜ, άρα $\Delta Z \perp AM$. Z μέσο ΑΜ, και ΑΜ ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, άρα $BG \perp AM$ οπότε, $\Delta Z \parallel BG$, ως ευθείες κάθετες στο ίδιο ευθύγραμμο τμήμα. Στο τρίγωνο ΑΜΓ, είναι Δ μέσο της ΑΓ και $\Delta Z \parallel MG$, άρα και Z μέσο της ΑΜ. Στο τρίγωνο ΑΜΓ, Δ μέσο της ΑΓ, Z μέσο της ΑΜ, άρα το ευθύγραμμο τμήμα ΔZ, που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών του τριγώνου ΑΜΓ είναι παράλληλο προς τη τρίτη πλευρά ΜΓ και ίσο με το μισό της, δηλαδή:

$$\Delta Z = \frac{M\Gamma}{2} \stackrel{M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}}{\Rightarrow} \Delta Z = \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow \Delta Z = \frac{B\Gamma}{4}$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_3414)

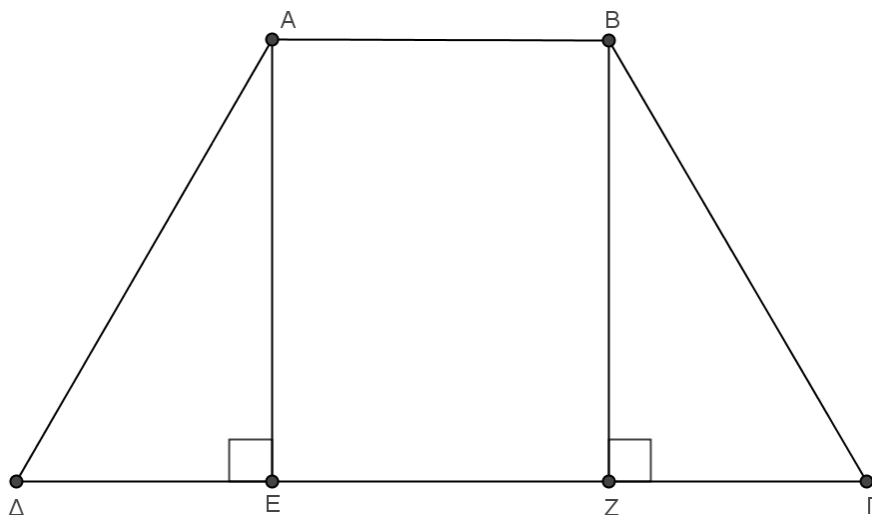
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$, $A\Delta = 12$ και $\Gamma\Delta = 20$. Φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

α) Να αποδείξετε ότι: $\Delta E = \Gamma Z$ και $AB = EZ$.

Μονάδες 12

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραπεζίου.

Μονάδες 13

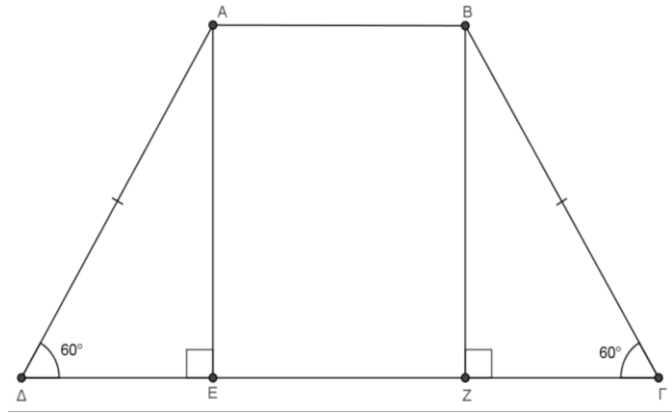


ΛΥΣΗα) Συγκρίνω: $\triangle A\hat{D}E - \triangle B\hat{Z}G$

1. $AD = BG$ (υπόθεση)
2. $\hat{A} = \hat{G} = 60^\circ$ (υπόθεση)
3. $\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$ (υπόθεση)

Άρα από κριτήριο ισότητας
ορθογωνίων τριγώνων είναι

$\triangle A\hat{D}E = \triangle B\hat{Z}G$, άρα και τα
υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους
ίσα, άρα $DE = GZ$ και $AE = BZ$.



Αλλά, $AE \perp DG$ και $BZ \perp DG$ οπότε, $AE \parallel BZ$ άρα το $ABZE$ παραλληλόγραμμο με
 $\hat{EZ} = 90^\circ$ οπότε ορθογώνιο, άρα και $AB = EZ$.

β) Στο τρίγωνο ADE είναι $\hat{A} = 60^\circ$ οπότε είναι:

$$\hat{A} + \hat{E} + \hat{DAE} = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + 90^\circ + \hat{DAE} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{DAE} = 30^\circ$$

$$\text{Στο ορθογώνιο τρίγωνο } ADE \text{ είναι } \hat{DAE} = 30^\circ \text{ οπότε: } DE = \frac{AD}{2} \Leftrightarrow DE = \frac{12}{2} = 6$$

$$\text{Οπότε: } DE = GZ = 6$$

$$\text{Άρα, } DG = DE + EZ + ZG \Leftrightarrow 20 = 6 + EZ + 6 \Leftrightarrow EZ = 8 \Leftrightarrow EZ = AB = 8$$

Οπότε η περίμετρος του τραπέζιου είναι:

$$\Pi = AB + BG + GD + DA = 8 + 12 + 20 + 8 = 48$$

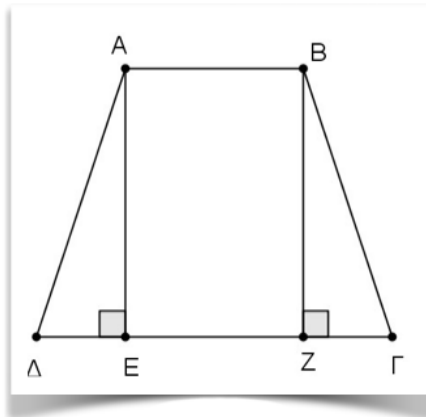
ΑΣΚΗΣΗ (2_3415)

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $ABGD$ ($AB \parallel GD$). Φέρνουμε τα ύψη του AE και BZ .

Να αποδείξετε ότι:

α) $DE = GZ$

β) $AZ = BE$



Μονάδες 12

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

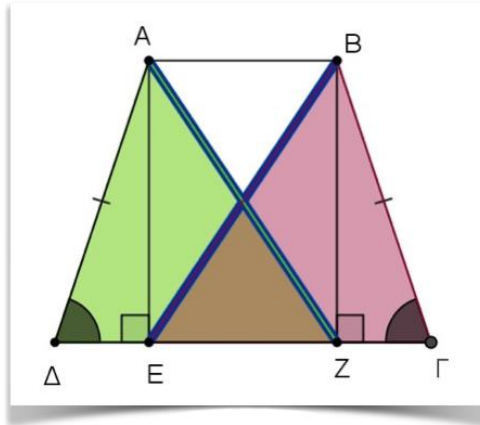
α) Τα τρίγωνα $\triangle A\hat{E}D$ και $\triangle B\hat{Z}G$:

1. είναι ορθογώνια,
2. έχουν $AD = BG$ (διότι το $ABGD$ είναι
ισοσκελές τραπέζιο),

3. έχουν $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$, ως γωνίες της βάσης ισοσκελούς τραπεζίου.

Άρα $\triangle A\hat{E}\Delta = \triangle B\hat{Z}\Gamma$, οπότε $\Delta E = \Gamma Z$

(διότι σε ίσα τρίγωνα, απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές).



β) 1^{ος} τρόπος:

Το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ορθογώνιο (διότι οι απέναντι πλευρές του είναι ανα δύο παράλληλες και $\hat{A}\hat{E}\hat{Z} = 90^\circ$). Άρα $AZ = BE$, ως διαγώνιες ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

2^{ος} τρόπος:

Τα τρίγωνα $\triangle A\hat{\Delta}Z$ και $\triangle B\hat{E}\Gamma$ έχουν:

1. $A\Delta = B\Gamma$ (διότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο),
2. $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$, ως γωνίες της βάσης ισοσκελούς τραπεζίου.
3. $\Delta Z = E\Gamma$ (διότι $\Delta Z = \Delta E + EZ = \Gamma Z + EZ = \Gamma E$).

Άρα $\triangle A\hat{\Delta}Z = \triangle B\hat{E}\Gamma$ (κριτήριο ΠΓΠ), οπότε $AZ = BE$

(διότι σε ίσα τρίγωνα, απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές).

ΑΣΚΗΣΗ (2_3416)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), το ύψος του $A\Delta$ και τα μέσα E και Z των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

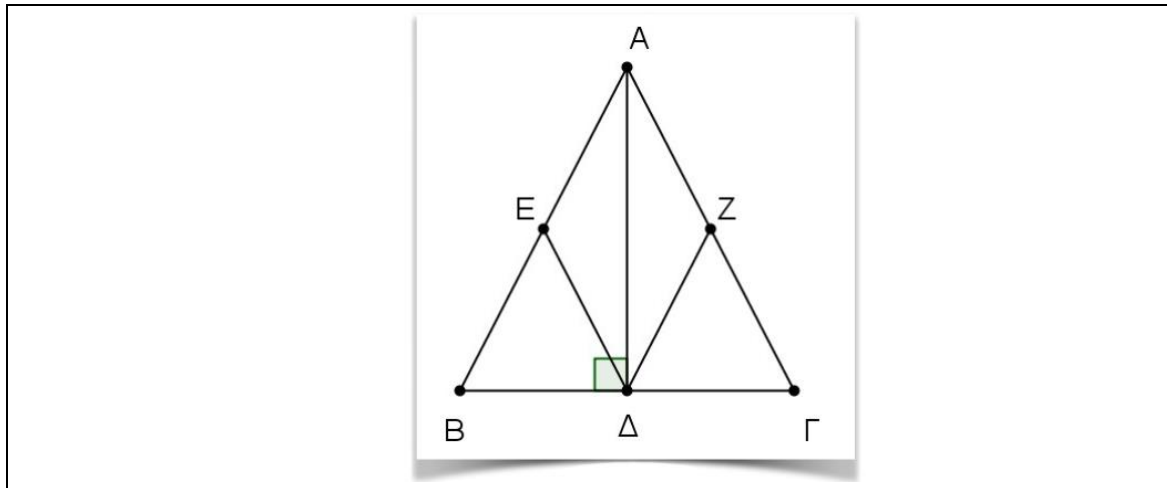
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $B\Delta E$ και $\Gamma\Delta Z$ είναι ίσα

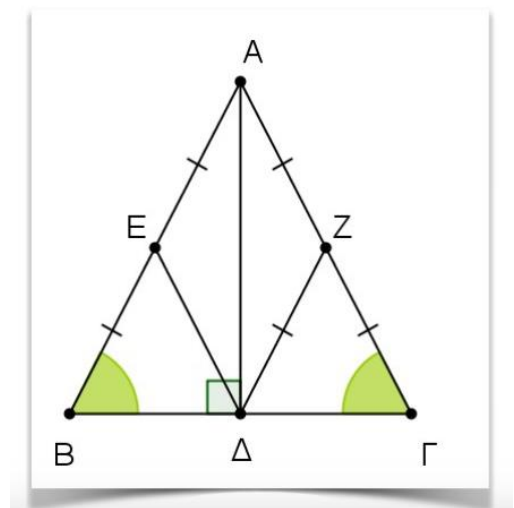
Μονάδες 15

β) Το τετράπλευρο $AZ\Delta E$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 10

**ΛΥΣΗ**

- α) Τα τρίγωνα $\triangle B\Delta E$, $\triangle \Gamma\Delta Z$ έχουν:
1. $BE = \Gamma Z$ (ως μισά τμήματα ίσων πλευρών),
 2. $B\Delta = \Gamma\Delta$ (διότι το $A\Delta$ είναι ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση $B\Gamma$, άρα το $A\Delta$ είναι και διάμεσος),
 3. $\angle B = \angle \Gamma$, ως γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου.
- Άρα $\triangle B\Delta E = \triangle \Gamma\Delta Z$ (κριτήριο ΠΓΠ).



- β) Το ευθύγραμμο τμήμα ΔZ ενώνει τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, $A\Gamma$, άρα $Z\Delta = \parallel \frac{AB}{2}$, δηλαδή το $Z\Delta$

είναι ίσο και παράλληλο με το AE . Άρα το $AZ\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο και επιπλέον $AZ = Z\Delta$, άρα είναι ρόμβος.

ΑΣΚΗΣΗ (2_3418)

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και GA αντίστοιχα.

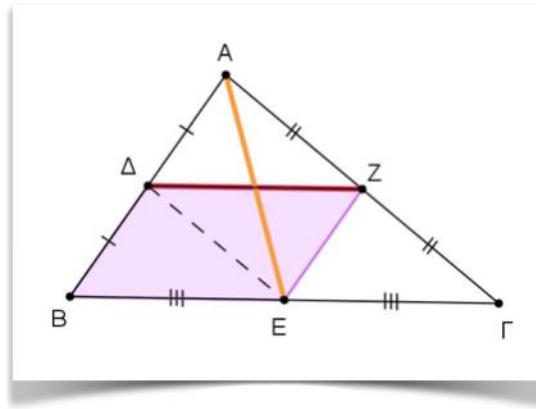
Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο ΔBEZ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 13

- β) Η ευθεία ΔZ διχοτομεί το τμήμα AE .

Μονάδες 12

**ΛΥΣΗ**

α) Τα Δ , Z είναι τα μέσα των πλευρών AB , AG αντίστοιχα, άρα το ΔZ είναι ίσο και παράλληλο με το $\frac{BG}{2}$, δηλαδή με το BE . Οπότε το ΔBEZ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Τα Δ , E είναι τα μέσα των πλευρών AB , $BΓ$ αντίστοιχα, άρα το ΔE είναι ίσο και παράλληλο με το $\frac{AG}{2}$, δηλαδή με το AZ .

Οπότε το ΔDEZ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα οι διαγώνιες του θα διχοτομούνται, δηλαδή η ευθεία ΔZ διχοτομεί το τμήμα AE .

ΑΣΚΗΣΗ (2_3419)

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ABΓ$ με $AB < AG$ και γωνία $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Θεωρούμε το ύψος $A\Delta$ και το μέσο Z της πλευράς AG . Προεκτείνουμε το ύψος $A\Delta$ (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔE .

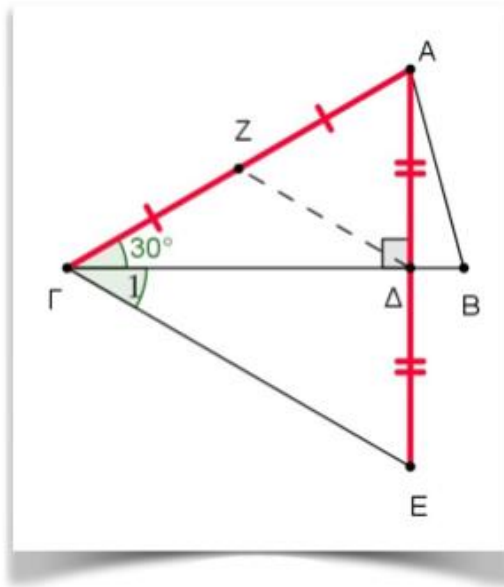
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta Z = \frac{AG}{2}$.

Μονάδες 12

β) Το τρίγωνο $A\hat{\Gamma}E$ είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 13

**ΛΥΣΗ**

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AG\hat{D}$, το DZ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα AG . Άρα (από γνωστή πρόταση) $DZ = \frac{AG}{2}$.

β) Στο τρίγωνο $\triangle AGE$, το GD είναι ύψος και διάμεσος, άρα:

1. το $\triangle AGE$ είναι ισοσκελές, με $AG = GE$ και

2. το GD είναι και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

Έτσι, $\hat{AGE} = 2 \cdot \hat{AGB} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.

Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\triangle AGE$ είναι 180° , δηλαδή

$$\hat{GAE} + \hat{A} + \hat{AGE} = 180^\circ \Rightarrow \hat{GAE} + \hat{A} + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{GAE} + \hat{A} = 120^\circ \quad (1)$$

Όμως $\hat{GAE} = \hat{A}$, άρα από τη σχέση (1) προκύπτει ότι κάθε γωνία του τριγώνου $\triangle AGE$ είναι 60° , δηλαδή είναι ισόπλευρο.

ΑΣΚΗΣΗ (2_3422)

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του AD . Προεκτείνουμε το AD (προς το Δ) κατά τμήμα $DE = AD$. Έστω K το συμμετρικό του B ως προς το Δ .

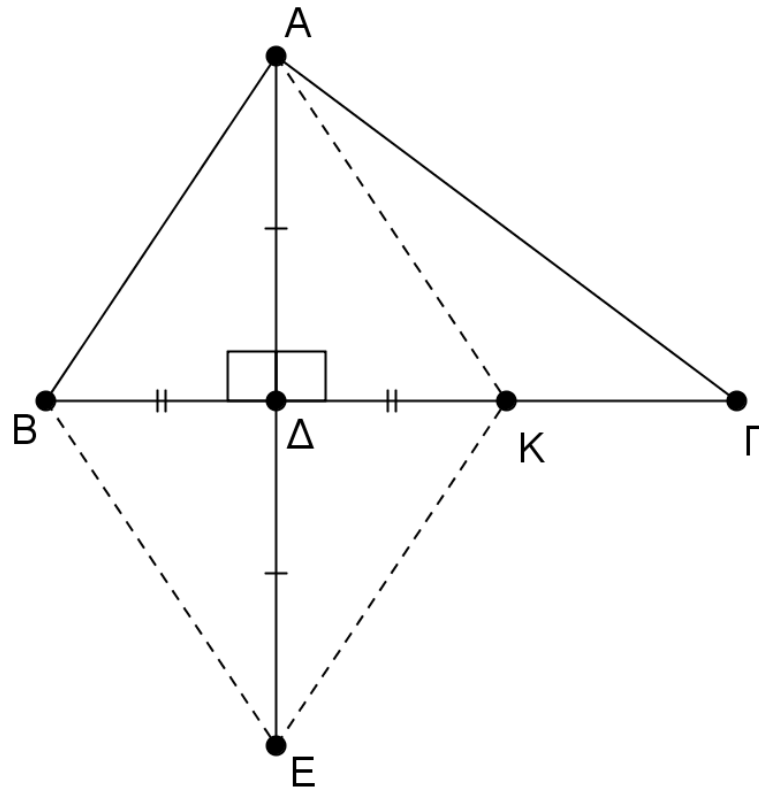
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές.

Μονάδες 12

β) Το τετράπλευρο $ABEK$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 13

**Λύση**

α) Παρατηρούμε ότι στο τρίγωνο ABK το AD είναι ύψος και διάμεσος, δηλαδή το AD είναι μεσοκάθετος του BK , άρα το A θα ισαπέχει από τα άκρα B, K , οπότε $AB = AK$, άρα το ABK είναι ισοσκελές τρίγωνο.

β) Το τετράπλευρο $ABEK$ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι διχοτομούνται. Όμως $AB = AK$, δηλαδή δύο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες, άρα το $ABEK$ είναι ρόμβος.

ΑΣΚΗΣΗ (2_3427)

Το τετράπλευρο $ABΓΔ$ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι
 $AE \perp BΓ$ και $AZ \perp ΔΓ$

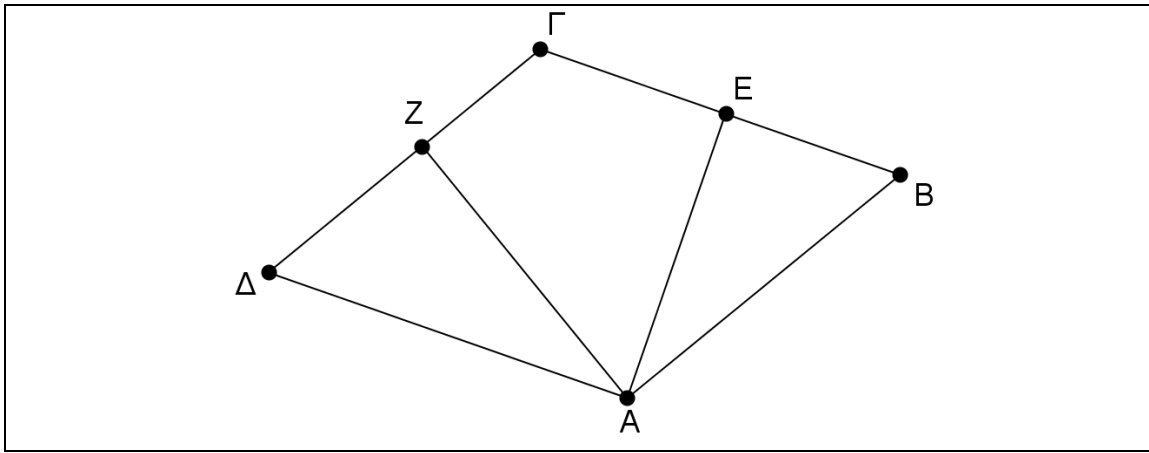
Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ είναι ρόμβος, τότε $AZ = AE$.

Μονάδες 12

β) Αν για το παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ ισχύει $AZ = AE$, τότε αυτό είναι ρόμβος.

Μονάδες 13

**Λύση**

α) Έχουμε $\hat{\Delta Z A} = \hat{A E B}$, γιατί

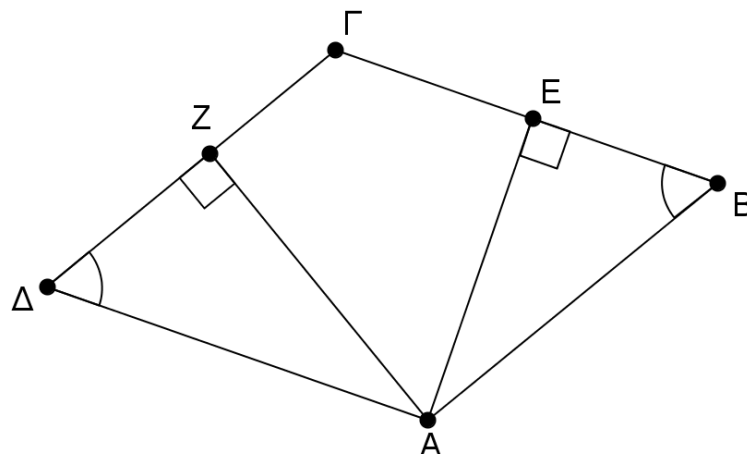
- $Z = E = 90^\circ$
- $\Delta = B$ (απέναντι γωνίες του παρ/μου ΑΒΓΔ)
- $A\Delta = AB$ (διαδοχικές πλευρές ρόμβου)

άρα $AZ = AE$.

β) Έχουμε $\hat{\Delta Z A} = \hat{A E B}$, γιατί

- $Z = E = 90^\circ$
- $\Delta = B$ (απέναντι γωνίες του παρ/μου ΑΒΓΔ)
- $AZ = AE$

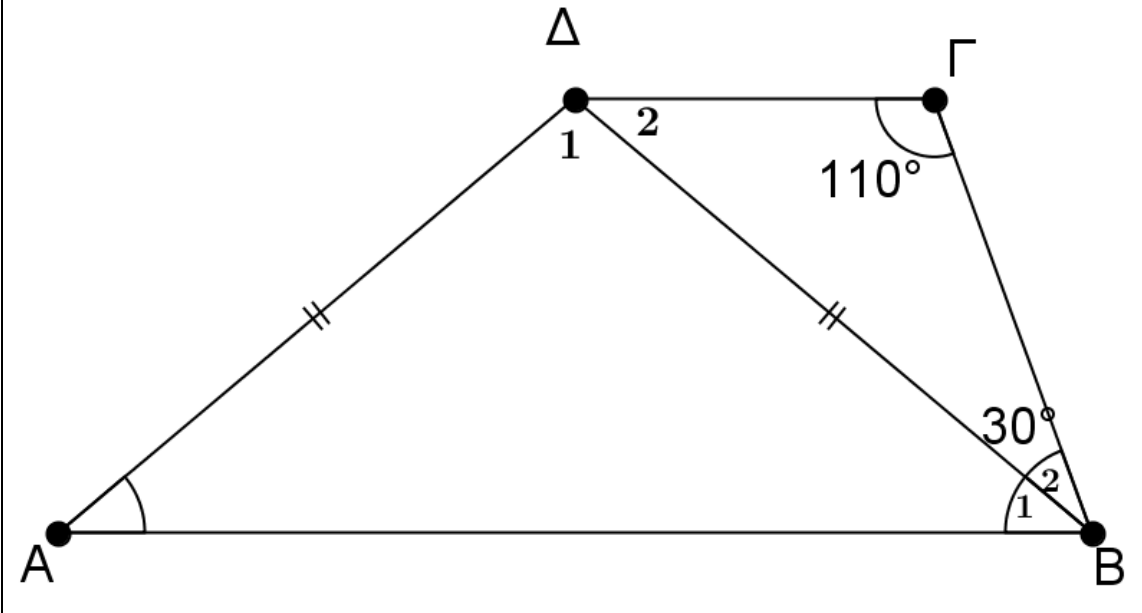
άρα $A\Delta = AB$, δηλαδή δύο διαδοχικές πλευρές του παρ/μου είναι ίσες, άρα το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.



ΑΣΚΗΣΗ (2_4973)

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ στο οποίο η διαγώνιος $B\Delta$ είναι ίση με την πλευρά $A\Delta$. Αν η γωνία $\Gamma = 110^\circ$ και η γωνία $\Delta B\Gamma = 30^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $A\Delta B$.

Μονάδες 25

**Λύση**

Αναζητούμε τη γωνία $A\Delta B = \Delta_1$.

Από το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ έχουμε,

$$\Delta_2 = 180^\circ - 110^\circ - 30^\circ = 40^\circ$$

Όμως $\Delta_2 = B_1 = 40^\circ$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\Gamma\Delta$ και AB με τεμνόμενη την πλευρά $B\Delta$.

Επομένως στο ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta B$ έχουμε,

$$\Delta_1 = 180^\circ - 2 \cdot 40^\circ = 100^\circ$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5007)

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$. Θεωρούμε τα σημεία E και Z πάνω στην AB έτσι ώστε $AE = EZ = ZB$ και έστω K το σημείο τομής των ΔZ και ΓE .

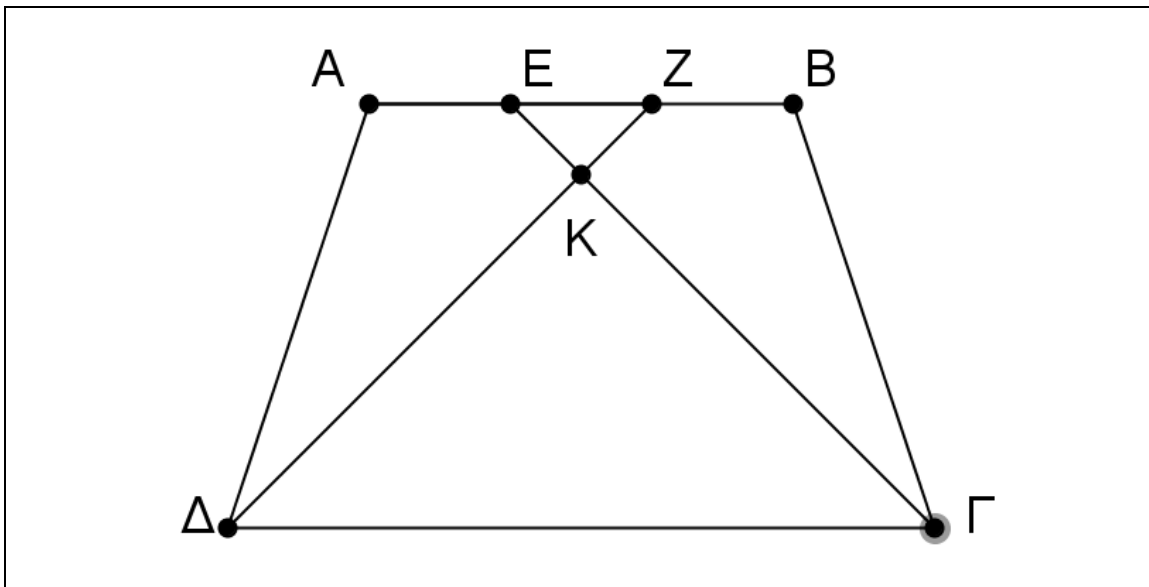
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta Z = \Gamma E$

Μονάδες 13

β) Τα τρίγωνα EKZ και $\Delta K\Gamma$ είναι ισοσκελή.

Μονάδες 12

**Λύση**

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔAZ και ΓBE

1) $AZ = BE$ (ως άθροισμα ίσων τμημάτων)

2) $AD = BG$ ($AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τραπέζιο)

3) $\Delta AZ = \Gamma BE$ ($AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τραπέζιο)

Από Π-Γ-Π τα τρίγωνα ΔAZ και ΓBE είναι ίσα άρα $\Delta Z = \Gamma E$

β) Αφού τα τρίγωνα ΔAZ και ΓBE είναι ίσα έχουμε επιπλέον ότι $\Delta Z = \Gamma E$ και αφού $\Delta D = \Gamma B$ ($AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τραπέζιο) είναι $\Delta Z = \Gamma E$ (ως διαφορά ίσων γωνιών) οπότε το τρίγωνο $\Delta K \Gamma$ είναι ισοσκελές

Ακόμη $BE = \Gamma E$ (ως εντός εναλλάξ) και $AZ = \Delta Z$ (ως εντός εναλλάξ)

Αφού $\Delta E = \Delta Z$ (το τρίγωνο $\Delta K \Gamma$ είναι ισοσκελές) έχουμε ότι $AZ = BE$ άρα και το τρίγωνο $E K Z$ είναι ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5021)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O είναι το κέντρο του. Έστω E, Z, H, Θ τα μέσα των OD, OA, OB και OG αντίστοιχα

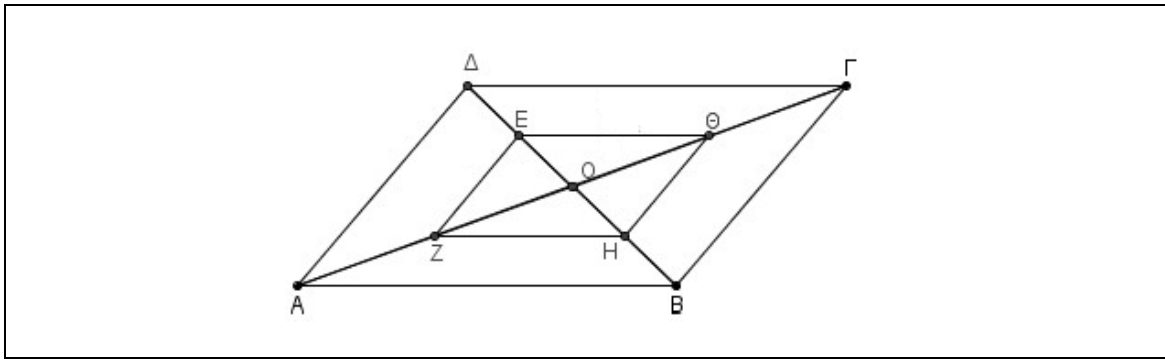
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο

Μονάδες 10

β) Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι 40, να βρείτε την περίμετρο του $EZH\Theta$

Μονάδες 15

**Λύση**

α) Στο τρίγωνο ΟΓΔ το Ε είναι μέσο της ΟΔ και το Θ είναι μέσο της ΟΓ οπότε

$$ΕΘ // = \frac{ΓΔ}{2} \quad (1)$$

Στο τρίγωνο ΑΒΟ το Ζ είναι μέσο της ΑΟ και το Η είναι μέσο της ΟΒ οπότε

$$ΖΗ // = \frac{ΑΒ}{2} \quad (2)$$

Αφού ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο έχουμε ότι $ΑΒ // = ΓΔ$ (3)

Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι $ΕΘ // = ΖΗ$ άρα το ΕΖΘΗ είναι παραλληλόγραμμο

β) Στο τρίγωνο ΟΑΔ το Ε είναι μέσο της ΔΟ και το Ζ είναι μέσο της ΟΑ οπότε

$$ΕΖ = \frac{ΑΔ}{2} \quad (4)$$

Στο τρίγωνο ΟΒΓ το Θ είναι μέσο της ΟΓ και το Η είναι μέσο της ΟΒ οπότε

$$ΗΘ = \frac{ΒΓ}{2} \quad (3)$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \Pi_{ΕΖΗΘ} &= ΕΖ + ΖΗ + ΗΘ + ΘΕ \stackrel{(1),(2)}{=} \frac{ΑΔ}{2} + \frac{ΑΒ}{2} + \frac{ΒΓ}{2} + \frac{ΓΔ}{2} \\ &\stackrel{(3),(4)}{=} \frac{ΑΔ + ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ}{2} = \frac{\Pi_{ΑΒΓΔ}}{2} = \frac{40}{2} = 20 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5024)

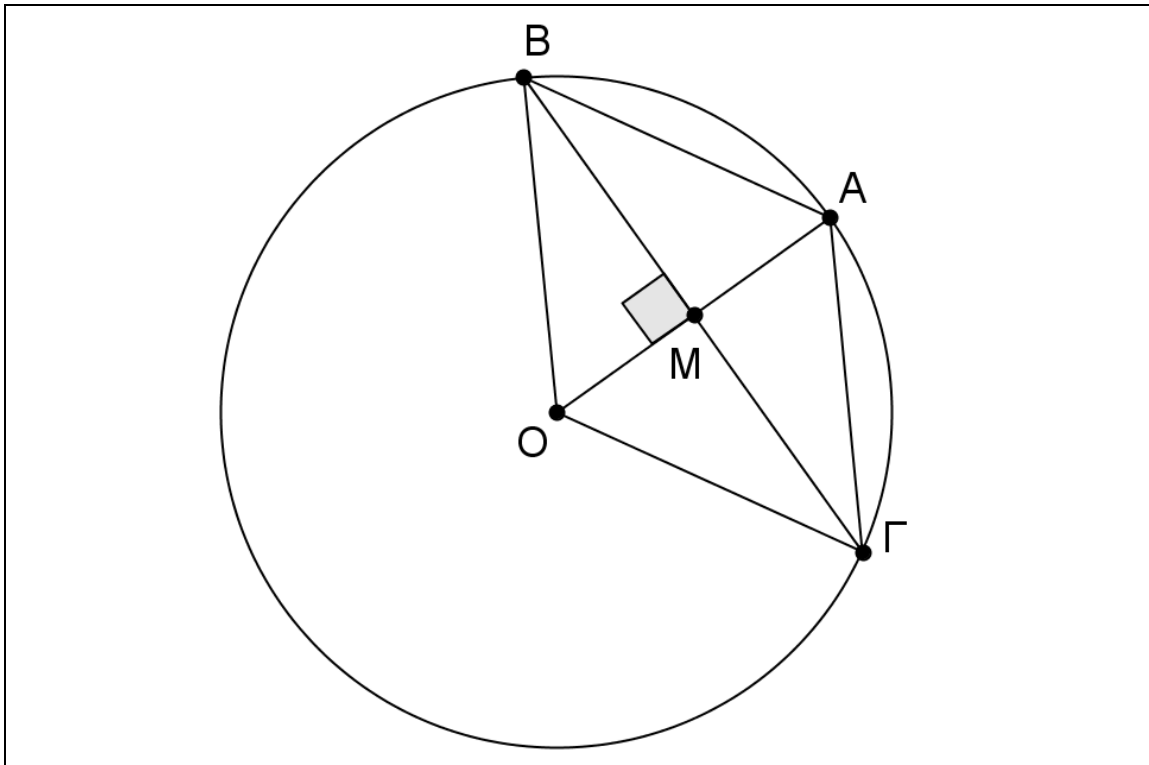
Σε κύκλο κέντρου Ο, έστω ΟΑ μία ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της ΟΑ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι

α) Το τρίγωνο ΟΒΑ είναι ισόπλευρο

Μονάδες 13

β) Το τετράπλευρο ΟΒΑΓ είναι ρόμβος

Μονάδες 12

**Λύση**

α) Αφού το B ανήκει στη μεσοκάθετο του OA έχουμε ότι $BO=BA$
 Όμως $BO=OA$ (ως ακτίνες κύκλου) οπότε $BO=BA=OA$ άρα το τρίγωνο OBA είναι ισόπλευρο

β) Αφού η BΓ είναι μεσοκάθετος του OA το M είναι μέσο του OA
 Επιπλέον, $OB=OG$ ως ακτίνες κύκλου άρα το τρίγωνο OBG είναι ισοσκελές και το OM είναι το ύψος που άγεται από τη κορυφή O στη βάση του BΓ.
 Έτσι λοιπόν η OM είναι και διάμεσος της BΓ άρα το M είναι μέσο της BΓ
 Οπότε στο τετράπλευρο OBAΔ οι διαγώνιοί του BΓ και OA διχοτομούνται άρα το OBAΔ είναι παραλληλόγραμμο και αφού $BΓ \perp OA$ το OBAΔ είναι ρόμβος.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5033)

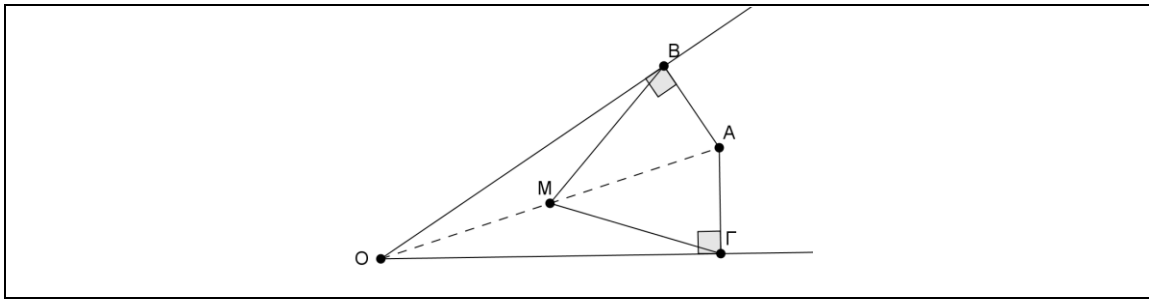
Δίνεται γωνία $\hat{xOy}$ και σημείο A στο εσωτερικό της. Από το A φέρνουμε τις κάθετες AB, AG προς τις πλευρές Ox, Oy της γωνίας αντίστοιχα, και ονομάζουμε M το μέσο του OA. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο BMΓ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

β) $\hat{BMΓ} = 2 \times \hat{xOy}$

(Μονάδες 15)

**ΛΥΣΗ**

α) Το BM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ABO, άρα θα είναι

$$BM = \frac{OA}{2}.$$

Όμοια το ΓM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου AΓO, άρα θα είναι

$$ΓM = \frac{OA}{2}.$$

Από τις δυο τελευταίες σχέσεις έχουμε $BM = ΓM$ άρα το τρίγωνο BMΓ είναι ισοσκελές.

β) Επειδή M μέσο του OA είναι $OM = \frac{OA}{2}$ όμως και $BM = \frac{OA}{2}$ άρα θα έχουμε ότι

$BM = OM$ δηλαδή το τρίγωνο OMB είναι ισοσκελές με βάση την OB. Οπότε οι

προσκειμένες στη βάση του γωνίες θα είναι ίσες άρα $\hat{MOB} = \hat{MBO}$.

Όμως η γωνία BMA είναι εξωτερική του τριγώνου BMO άρα θα ισχύει:

$$\hat{BMA} = \hat{MOB} + \hat{MBO} \Rightarrow \hat{BMA} = 2\hat{MOB} \quad (1)$$

Ομοίως έχουμε ότι $ΓM = OM$ δηλαδή το τρίγωνο ΓOM είναι ισοσκελές με βάση την

OG. Οπότε οι προσκειμένες στη βάση του γωνίες θα είναι ίσες άρα $\hat{MOΓ} = \hat{MΓO}$.

Όμως η γωνία ΓMA είναι εξωτερική του τριγώνου ΓMO άρα θα ισχύει:

$$\hat{ΓMA} = \hat{ΓOB} + \hat{MΓO} \Rightarrow \hat{ΓMA} = 2\hat{MOΓ} \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε ότι:

$$\hat{BMA} + \hat{ΓMA} = 2\hat{MOB} + 2\hat{MOΓ} \Leftrightarrow \hat{BMΓ} = 2 \times \hat{Oy}$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5039)

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\hat{B} = 40^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επιπλέον, τα σημεία Δ, E και Z είναι τα μέσα των πλευρών του AB, BΓ και ΓA αντίστοιχα.

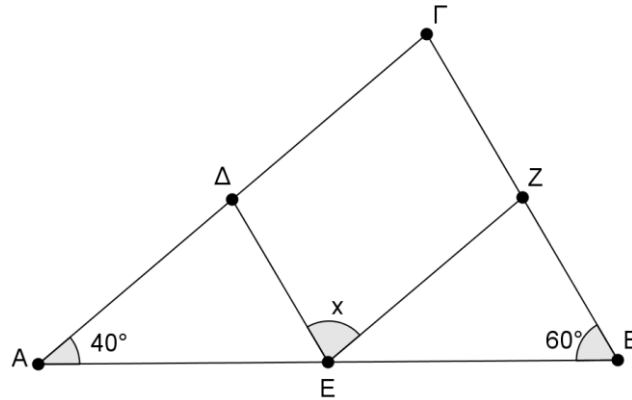
α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{BΔE} = \hat{EZΓ} = 80^\circ$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{D}\hat{E}\hat{Z}$ (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ABΓ είναι:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 40^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 80^\circ$$

β) Το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών AΓ και AB άρα είναι παράλληλο στην BΓ. Ομοίως το ευθύγραμμο τμήμα ZE ενώνει τα μέσα των πλευρών BΓ και AB άρα είναι παράλληλο στην AΓ, οπότε το ΔΓZE έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Επίσης είναι:

$$\hat{B}\hat{\Delta}\hat{E} = \hat{A} = 80^\circ \text{ ως εντός εκτός και επί τ' αυτά μέρη}$$

$$\hat{E}\hat{Z}\hat{\Gamma} = \hat{A} = 80^\circ \text{ ως εντός εκτός και επί τ' αυτά μέρη}$$

γ) Επειδή το ΔΓZE είναι παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του θα είναι ίσες,

δηλαδή $\hat{D}\hat{E}\hat{Z} = \hat{A} = 80^\circ$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5059)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ \right)$. Έστω Δ σημείο της πλευράς AΓ τέτοιο

ώστε, η διχοτόμος ΔΕ της γωνίας $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B}$ να είναι παράλληλη στην πλευρά BΓ.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BΔΓ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

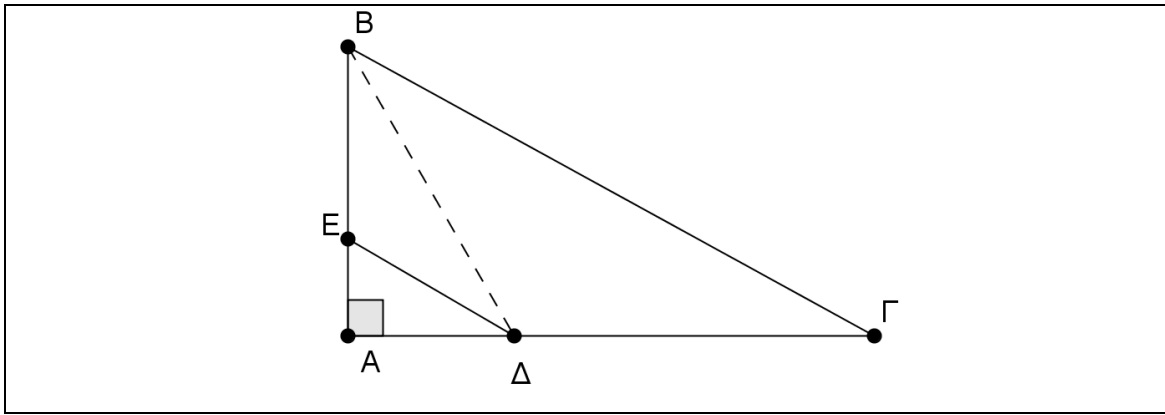
β) Αν $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = 60^\circ$,

I. να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

II. να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 2AB$

(Μονάδες 7)

**ΛΥΣΗ**

α) Είναι:

 $\hat{B}\Delta E = \hat{\Delta B}\Gamma$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE , $B\Gamma$ που τέμνονται από την ΔB
 $\hat{E}\Delta A = \hat{\Gamma}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE , $B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$
 $\hat{B}\Delta E = \hat{E}\Delta A$ γιατί η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Delta B$

Άρα από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι $\hat{\Delta B}\Gamma = \hat{\Gamma}$ δηλαδή το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ έχει τις προσκείμενες στη βάση του γωνίες ίσες, άρα είναι ισοσκελές.

β) i) Αν $\hat{A\Delta B} = 60^\circ$ τότε $\hat{E\Delta A} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ και επειδή όπως είδαμε στο α) ερώτημα

είναι $\hat{E\Delta A} = \hat{\Gamma}$ τότε $\hat{\Gamma} = 30^\circ$

ii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ άρα η απέναντι πλευρά από την γωνία Γ θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή:

$$AB = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2AB$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5071)

Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, αν M και N είναι τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

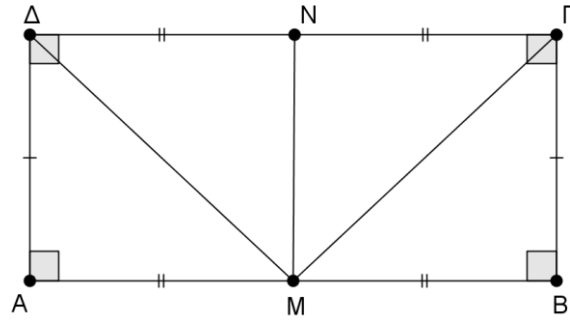
α) $M\Delta = M\Gamma$.

(Μονάδες 12)

β) Η ευθεία MN είναι μεσοκάθετος του τμήματος $\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ



α) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle ADM$ και $\triangle BGM$ τα οποία έχουν:

i) $AD = BG$ απέναντι πλευρές ορθογωνίου

ii) $AM = MB$ από υπόθεση

Άρα τα τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μια προς μια, άρα είναι ίσα.

β) Αφού $MD = MG$ το M ισαπέχει από τα άκρα του $\Gamma\Delta$ άρα βρίσκεται στη μεσοκάθετο του $\Gamma\Delta$. Το N είναι το μέσο του $\Gamma\Delta$ επομένως η ευθεία MN είναι η μεσοκάθετος του $\Gamma\Delta$.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5073)

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και A' , Γ' οι προβολές των κορυφών A και Γ στη διαγώνιο $B\Delta$. Αν τα σημεία A' και Γ' δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

α) $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$

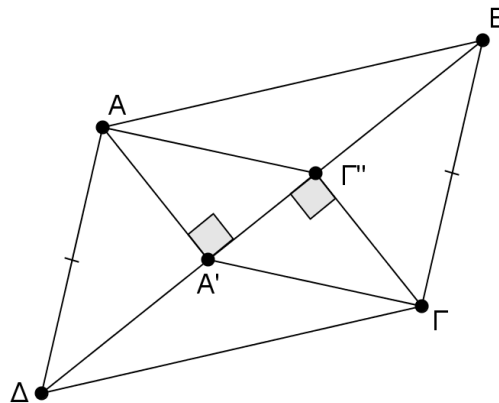
(Μονάδες 8)

β) $AA' = \Gamma\Gamma'$

(Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο $A\Gamma'\Gamma A'$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Τα ευθύγραμμα τμήματα AA' και $\Gamma\Gamma'$ είναι κάθετα και τα δυο στην ίδια ευθεία $B\Delta$, άρα είναι μεταξύ τους παράλληλα δηλαδή $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$

β) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AA'\Delta$ και $\triangle \Gamma\Gamma'B$ τα οποία έχουν:

i) $AD = BG$ γιατί είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου

ii) $\hat{A}\Delta A' = \hat{\Gamma B \Gamma'}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ευθειών $A\Delta$, $B\Gamma$ που τέμνονται από την $B\Delta$.

Άρα τα τρίγωνα $AA'\Delta$ και $\Gamma\Gamma'B$ έχουν τις υποτείνουσες και μια οξεία γωνία ίσες μια προς μια, άρα είναι ίσα. Οπότε $AA' = \Gamma\Gamma'$

γ) Από τα ερωτήματα α) και β) έχουμε ότι $AA' = \Gamma\Gamma'$ και $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$ δηλαδή το τετράπλευρο $AA'\Gamma\Gamma'$ έχει δυο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες άρα είναι παραλληλόγραμμο.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5096)

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με γωνία $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην AB , η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο Δ .

α) Να υπολογίσετε

I. τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

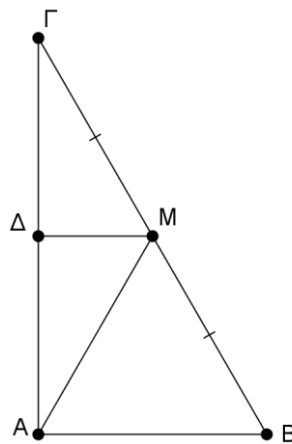
(Μονάδες 7)

II. τις γωνίες του τριγώνου $AM\Gamma$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $M\Delta$ είναι μεσοκάθετος του $A\Gamma$.

(Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) i) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + 2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 3\hat{\Gamma} = 90^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$$

Οπότε και

$$\hat{B} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$$

ii) Το AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, άρα:

$$AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma = MB$$

Οπότε το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές άρα $\hat{MAG} = \hat{\Gamma} = 30^\circ$

Στο τρίγωνο ΑΜΓ έχουμε:

$$\hat{MAG} + \hat{AMG} + \hat{G} = 180^0 \Rightarrow 30^0 + \hat{AMG} + 30^0 = 180^0 \Rightarrow \hat{AMG} = 120^0$$

β) Επειδή $M\Delta \parallel AB$ και $AB \perp AG$ θα είναι και $M\Delta \perp AG$. Άρα το $M\Delta$ είναι ύψος από την κορυφή του ισοσκελούς τριγώνου ΑΜΓ οπότε είναι μεσοκάθετος του ΑΓ.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5103)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 40^0$ και $B = 70^0$. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ με $\Delta E = 9$ και $E\Gamma = 16$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

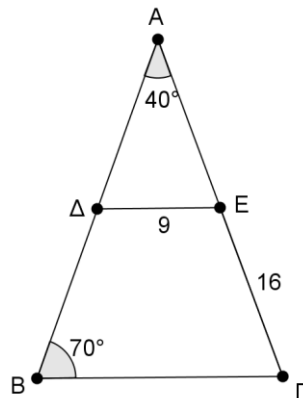
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 18$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

$$A + B + \Gamma = 180^0 \Rightarrow 40^0 + 70^0 + \Gamma = 180^0 \Rightarrow \Gamma = 70^0$$

Άρα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$

β) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δυο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ άρα θα είναι:

$$\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2\Delta E = 2 \cdot 9 \Leftrightarrow B\Gamma = 18$$

γ) Είναι:

$$AB = A\Gamma = 2 \cdot 16 = 32$$

Άρα η περίμετρος Π του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$\Pi = AB + A\Gamma + B\Gamma = 32 + 32 + 18 = 82$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5104)

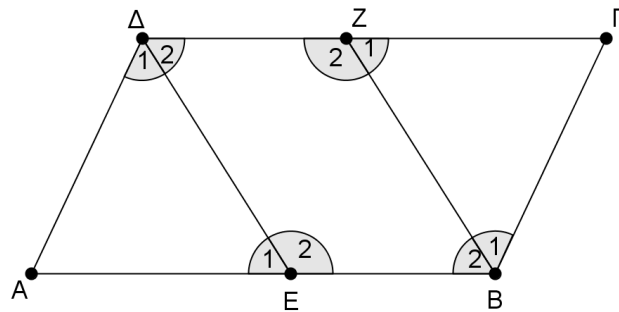
Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών Δ και B τέμνουν τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\hat{B} = \hat{\Delta}$ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου. Άρα και $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ (1) ως τα μισά των ίσων γωνιών B και Δ .

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ τα οποία έχουν:

- i) $A\Delta = B\Gamma$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
- ii) $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου
- iii) $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ από τη σχέση (1)

Επομένως τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες γωνίες ίσες άρα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα θα έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα άρα θα είναι και $\Delta E = BZ$ (2) και $AE = \Gamma Z$. Όμως $AB = \Gamma\Delta$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου άρα και $\Delta Z = BE$ (3) ως διαφορά ίσων τμημάτων.

Από τις σχέσεις (2), (3) συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο ΔZBE έχει τις απέναντι πλευρές τους ανά δύο ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5108)

Στις πλευρές $A\Delta$ και $B\Gamma$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία E και Z , τέτοια ώστε $AE = \Gamma Z$. Αν η ευθεία ZE τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία H και Θ , να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{HBZ} = \hat{E\Delta\Theta}$

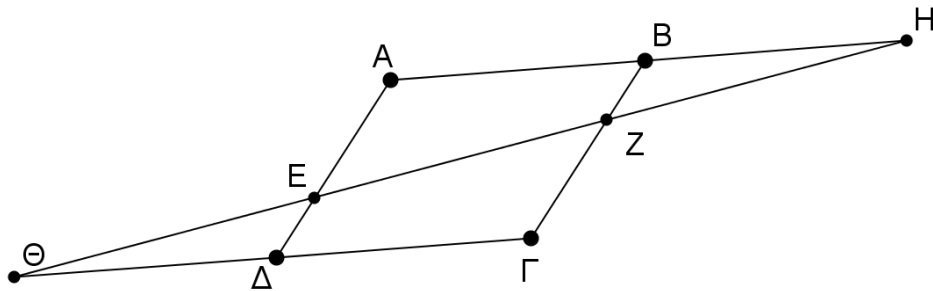
(Μονάδες 8)

$$\beta) \hat{BZH} = \hat{\Delta E\Theta}$$

(Μονάδες 8)

$$\gamma) BH = \Theta\Delta$$

(Μονάδες 9)

**ΛΥΣΗ**

α) Το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο άρα έχει τις απέναντι γωνίες του ίσες. Οπότε θα είναι και $\hat{HBZ} = \hat{E\Delta\Theta}$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

β) Είναι:

$$\hat{AEZ} = \hat{\Gamma ZE}$$

ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ , ΒΓ που τέμνονται από την ΕΖ

Άρα είναι και $\hat{BZH} = \hat{\Delta E\Theta}$ ως κατακορυφήν ίσων γωνιών.

γ) Είναι $AE = \Gamma Z$ από υπόθεση άρα και $\Delta E = BZ$ (1) ως διαφορά των ίσων τμημάτων ΑΔ, ΑΕ και ΓΒ, ΓΖ

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα BZH και ΔΕΘ τα οποία έχουν:

i) $\Delta\Delta E = BZ$ από σχέση (1)

ii) $\hat{HBZ} = \hat{E\Delta\Theta}$ από το ερώτημα α)

iii) $\hat{BZH} = \hat{\Delta E\Theta}$ από το ερώτημα β)

ΑΣΚΗΣΗ (2_5111)

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $B = 50^\circ$. Έστω ότι τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\Delta E\Gamma = 70^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\Delta E \parallel AB$

(Μονάδες 8)

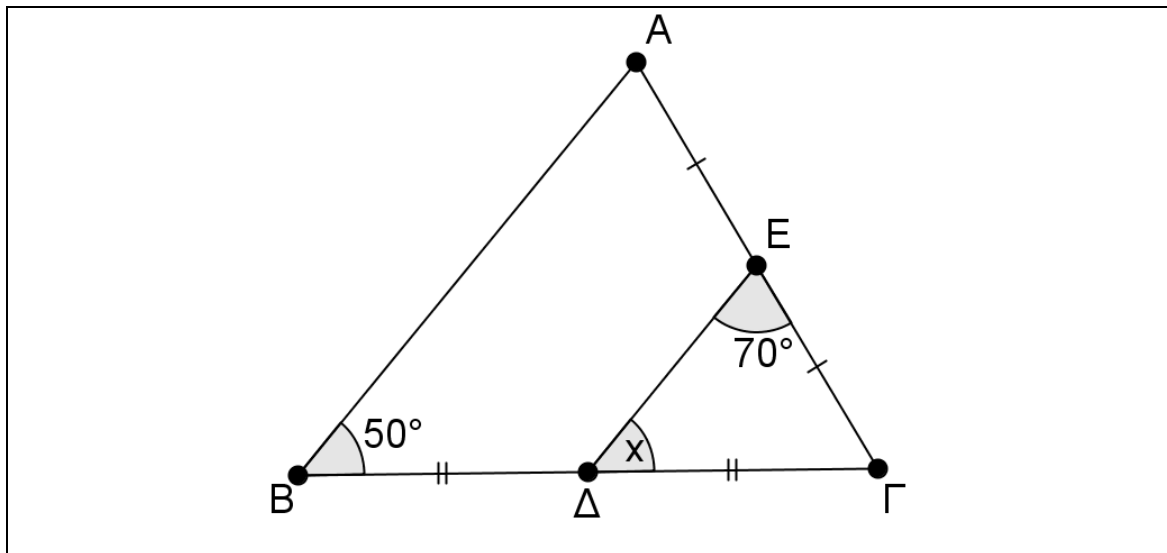
β) Να υπολογίσετε

I. τη γωνία x

(Μονάδες 8)

II. τις γωνίες Α και Γ του τριγώνου ABΓ

(Μονάδες 9)

**ΛΥΣΗ**

α) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ άρα θα είναι:

$$\Delta E \parallel AB \text{ και } \Delta E = \frac{AB}{2}$$

β) i) $x = 50^\circ$ ως εντός εκτός και επί τ' αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΒΓ.

ii) $A = 70^\circ$ ως εντός εκτός και επί τ' αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΑΓ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Rightarrow 70^\circ + 50^\circ + \Gamma = 180^\circ \Rightarrow \Gamma = 60^\circ$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5113)

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ΑΔ=9, ΕΓ=10 και ΒΓ=30.

α) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

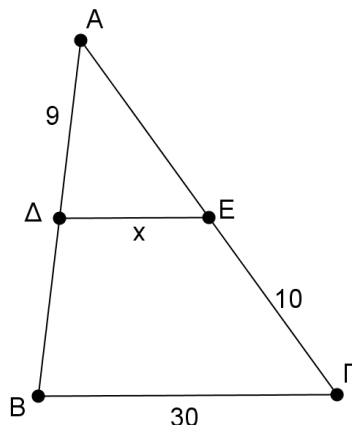
(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος x του τμήματος ΔΕ.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Είναι: $BD = AD = 9$ και $AE = EG = 10$ αφού τα Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Οπότε η περίμετρος Π του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$\Pi = AB + BG + AG = 18 + 20 + 30 = 68$$

β) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δυο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ άρα θα είναι: $DE \parallel BG$ και επειδή οι πλευρές ΒΔ και ΓΕ προφανώς τέμνονται στο Α, το ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

γ) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δυο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ άρα θα είναι:

$$\Delta E = \frac{BG}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5114)

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, $AE=8$, $ED=9$ και $DB=10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

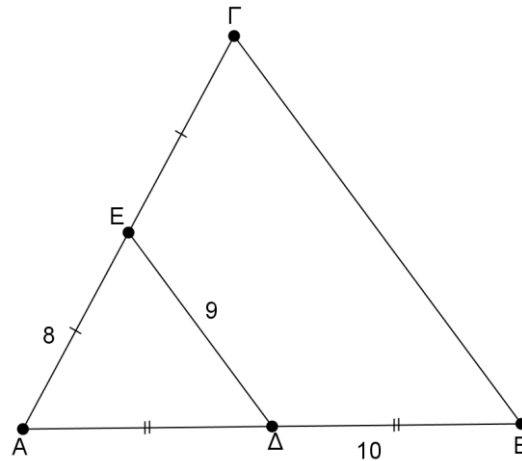
(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.

(Μονάδες 8)

γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου ΑΒΓ και του τετράπλευρου ΔΕΓΒ.

(Μονάδες 9)

**ΛΥΣΗ**

α) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δυο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ άρα θα είναι: $DE \parallel BG$ και επειδή οι πλευρές ΒΔ και ΓΕ προφανώς τέμνονται στο Α, το ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

β) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δυο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ άρα θα είναι:

$$\Delta E = \frac{BG}{2} \Rightarrow BG = 2\Delta E = 2 \cdot 9 \Rightarrow BG = 18$$

γ) Είναι:

$$AD = DB = 10 \text{ και } EG = AE = 8$$

αφού τα Δ, Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Οπότε $AB = 20$ και $AG = 16$

Η περίμετρος του $\triangle AB\Gamma$ είναι:

$$\Pi_{\triangle AB\Gamma} = AB + B\Gamma + \Gamma A = 20 + 18 + 16 = 54$$

Η περίμετρος του $\triangle E\Gamma B$ είναι:

$$\Pi_{\triangle E\Gamma B} = \Delta E + E\Gamma + \Gamma B + B\Delta = 9 + 8 + 18 + 10 = 45$$

Άρα η περίμετρος του $\triangle AB\Gamma$ είναι μεγαλύτερη από την περίμετρος του $\triangle E\Gamma B$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5117)

Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $\Delta\Delta = E\Delta = \Delta B$ με $AE = 8$ και $\Delta B = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle AEB$ είναι ορθογώνιο.

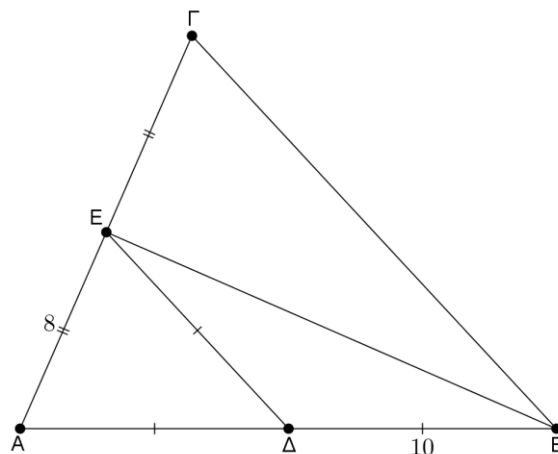
Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 20$.

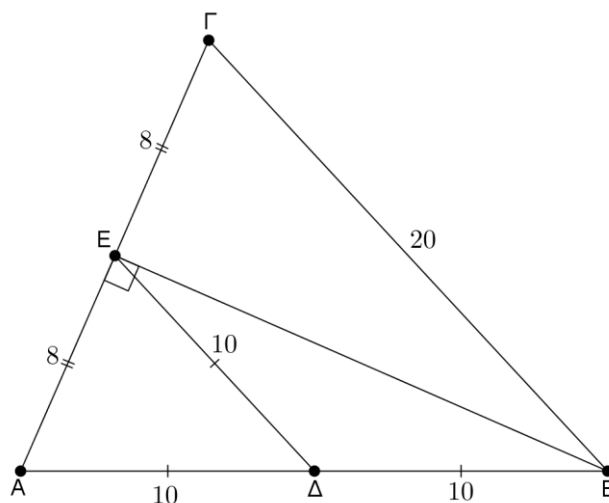
Μονάδες 8

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$.

Μονάδες 9



ΛΥΣΗ



α) Στο τρίγωνο $\triangle AEB$ το Δ είναι μέσο της AB , άρα η $E\Delta$ είναι διάμεσος με $E\Delta = \Delta B = 10$.

Επίσης αφού το Δ είναι μέσο της ΑΒ θα ισχύει

$$ΑΔ = ΔΒ = \frac{ΑΒ}{2} \Rightarrow \frac{ΑΒ}{2} = 10 \Rightarrow ΑΒ = 20$$

Παρατηρώ ότι $ΕΔ = \frac{ΑΒ}{2}$, δηλαδή η διάμεσος είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, επομένως το τρίγωνο ΔΕΒ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΒ και ορθή γωνία την Ε.

β) Γνωρίζουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δυο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο και ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς, οπότε

$$ΔΕ // = \frac{ΒΓ}{2} \quad (1)$$

Επομένως

$$ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2} \Rightarrow \frac{ΒΓ}{2} = 10 \Rightarrow ΒΓ = 20$$

γ) Επειδή το Ε είναι μέσο της ΑΓ θα ισχύει

$$ΑΕ = ΕΓ = \frac{ΑΓ}{2} ,$$

άρα

$$\frac{ΑΓ}{2} = 8 \Rightarrow ΑΓ = 16$$

Οπότε η περίμετρος Π του τριγώνου ΑΒΓ θα είναι:

$$Π = ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ \Rightarrow Π = 20 + 20 + 16 \Rightarrow Π = 56$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5118)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ . Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα . Επιπλέον ισχύουν $ΑΔ = ΕΔ = ΔΒ$ με $ΑΕ = 8$ και $ΔΒ = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο.

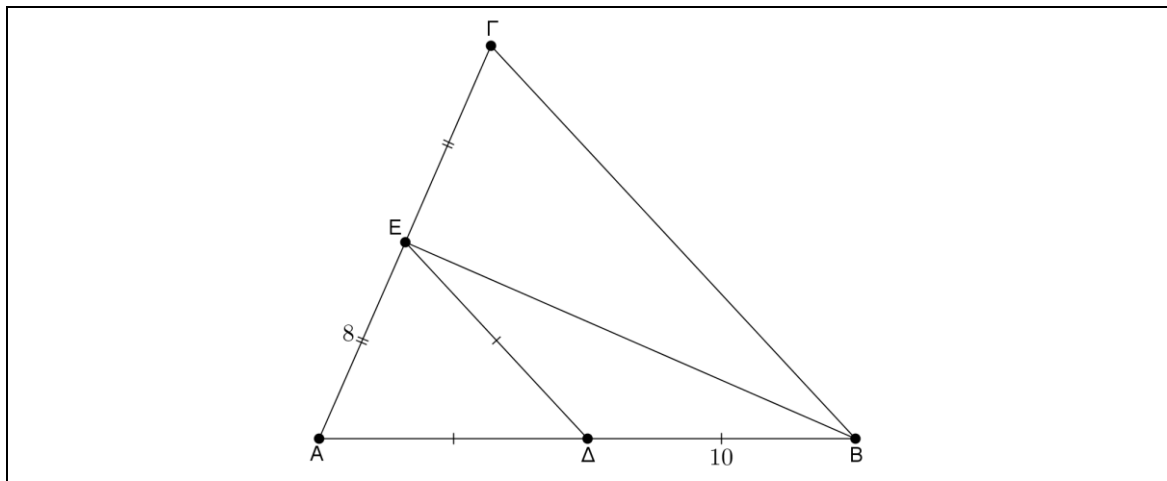
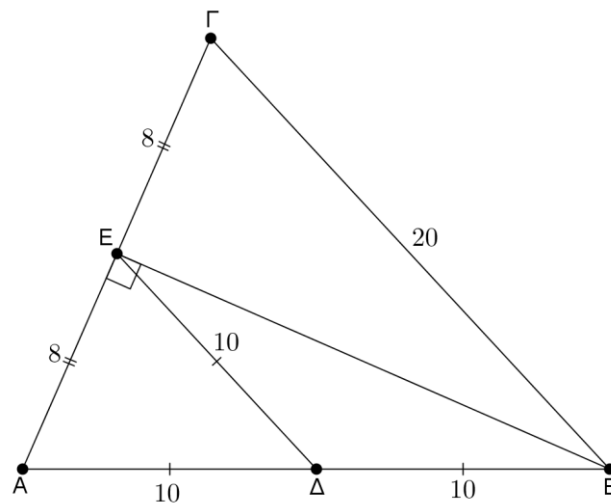
Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 10

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 9

**ΛΥΣΗ**

α) Στο τρίγωνο AEB το Δ είναι μέσο της AB , άρα η ΕΔ είναι διάμεσος με $ΕΔ = ΔΒ = 10$.

Επίσης αφού το Δ είναι μέσο της AB θα ισχύει

$$ΑΔ = ΔΒ = \frac{ΑΒ}{2} \Rightarrow \frac{ΑΒ}{2} = 10 \Rightarrow ΑΒ = 20$$

Παρατηρώ ότι $ΕΔ = \frac{ΑΒ}{2}$, δηλαδή η διάμεσος είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί , επομένως το τρίγωνο ΔΕΒ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΒ και ορθή γωνία την Ε .

β) Γνωρίζουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δυο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο και ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς , οπότε

$$ΔΕ // = \frac{ΒΓ}{2} \quad (1)$$

Επομένως

$$ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2} \Rightarrow \frac{ΒΓ}{2} = 10 \Rightarrow ΒΓ = 20$$

Επειδή $ΑΒ = ΒΓ = 20$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές .

γ) Επειδή το Ε είναι μέσο της ΑΓ θα ισχύει

$$AE = EG = \frac{AG}{2} ,$$

άρα

$$\frac{AG}{2} = 8 \Rightarrow AG = 16$$

Οπότε η περίμετρος Π του τριγώνου $AB\Gamma$ θα είναι :

$$\Pi = AB + B\Gamma + AG \Rightarrow \Pi = 20 + 20 + 16 \Rightarrow \Pi = 56.$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5124)

Στο ακόλουθο σχήμα ισχύουν $AB = BD = AG = GE = 5$, $BK \perp AD$ και $\Gamma\Lambda \perp AE$.

α) Να προσδιορίσετε , ως προς τις πλευρές , το είδος των τριγώνων $AB\Delta$ και $AG\epsilon$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας .

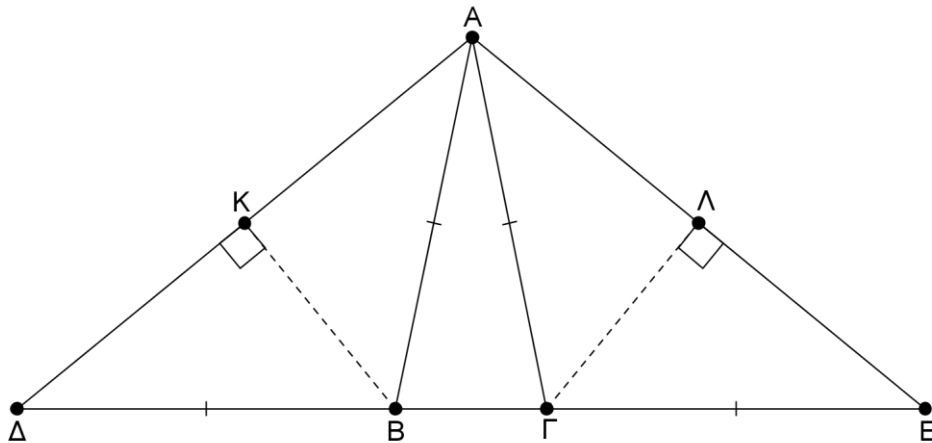
Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων AD και AE .

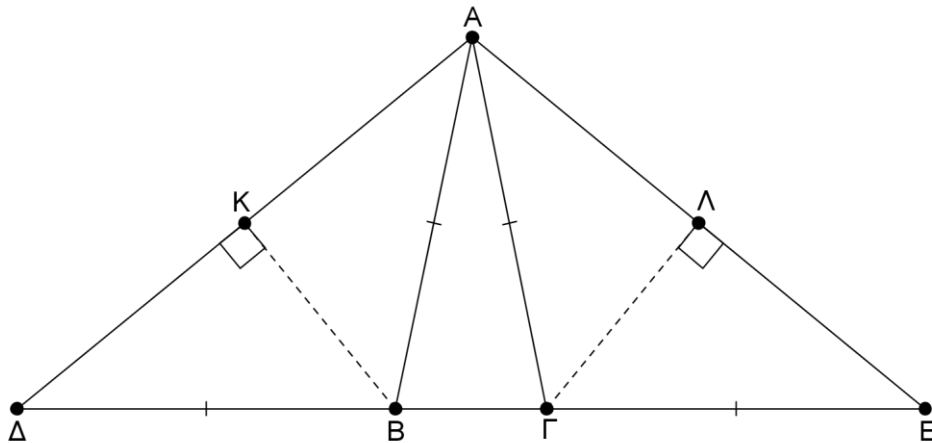
Μονάδες 10

γ) Αν η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 12 , να υπολογίσετε το τμήμα $K\Lambda$.

Μονάδες 9



ΛΥΣΗ



α) Επειδή $AB = BD$ το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές .

Όμοια στο τρίγωνο $AG\epsilon$ έχω $AG = GE$, άρα και το $AG\epsilon$ είναι ισοσκελές .

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Delta$ η BK είναι ύψος, επομένως θα είναι διχοτόμος και διάμεσος, άρα K μέσο της $A\Delta$.

Όμοια στο ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma E$ η $\Gamma\Lambda$ είναι ύψος, επομένως θα είναι διχοτόμος και διάμεσος, άρα Λ μέσο της $A E$.

γ) Η περίμετρος, Π του $AB\Gamma$ είναι 12, άρα

$$\Pi = AB + A\Gamma + B\Gamma \Rightarrow AB + A\Gamma + B\Gamma = 12 \Rightarrow 5 + 5 + B\Gamma = 12 \Rightarrow B\Gamma = 2.$$

Τα K, Λ είναι μέσα των $A\Delta, A E$, οπότε στο τρίγωνο $A\Delta E$ το ευθύγραμμο τμήμα $K\Lambda$ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών, άρα θα ισχύει

$$K\Lambda = \frac{\Delta E}{2} = \frac{B\Delta + B\Gamma + \Gamma E}{2} = \frac{5 + 2 + 5}{2} = 6$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5129)

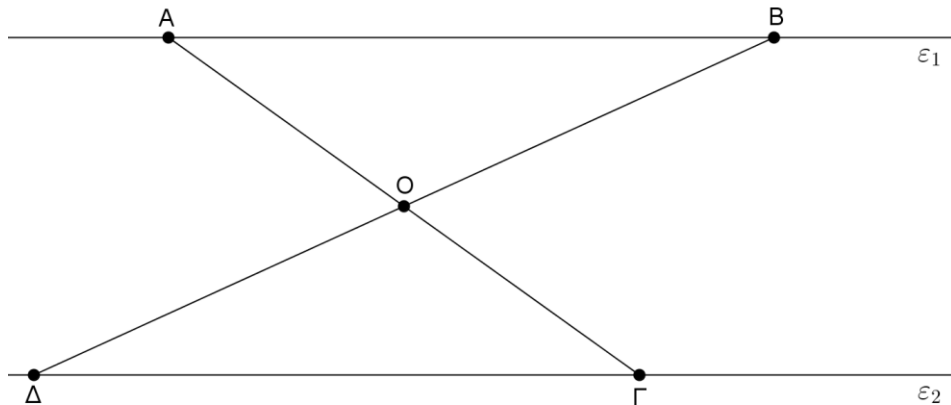
Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και το σημείο O είναι το μέσο της $B\Delta$. Να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα AOB και $\Gamma O\Delta$ είναι ίσα και να γράψετε τα στοιχεία τους.

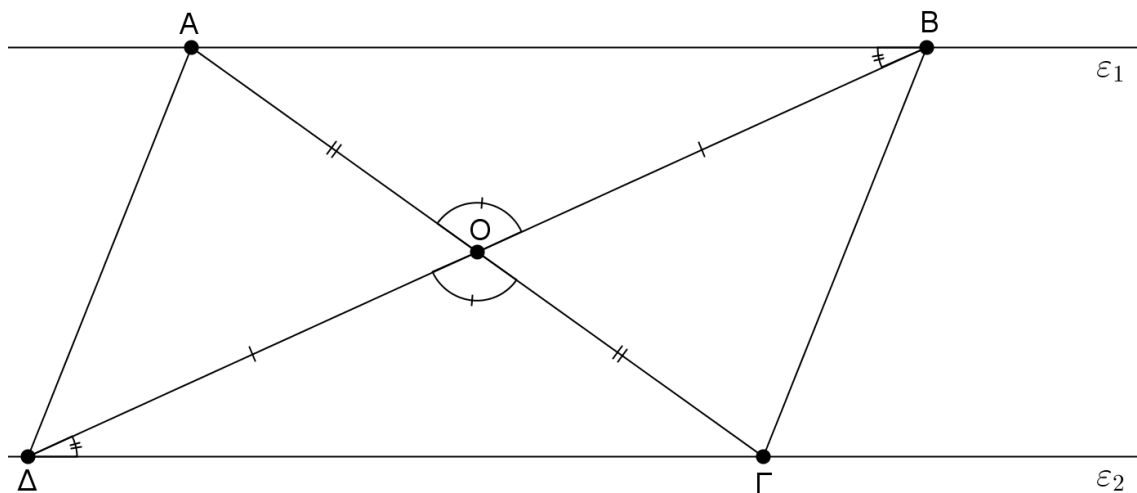
Μονάδες 12

β) το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 13



ΛΥΣΗ



α) Συγκρίνω τα τρίγωνα AOB και $\Gamma O\Delta$ τα οποία έχουν :

$OB = OD$ (από υπόθεση).

$\hat{AOB} = \hat{GOD}$ (ως κατακορυφήν γωνίες).

$\hat{ABO} = \hat{GDO}$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB και GD που τέμνονται από την BD).

Τα τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες μια προς μια ίσες, άρα θα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα.

Δηλαδή $OA = OG$, $AB = GD$ και $\hat{BAO} = \hat{DGO}$.

β) Στο τετράπλευρο $ABGD$ έχω $AB \parallel GD$ (δυο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες, άρα $ABGD$ παραλληλόγραμμο).

ΑΣΚΗΣΗ (2_5132)

Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $AB = 6$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω .

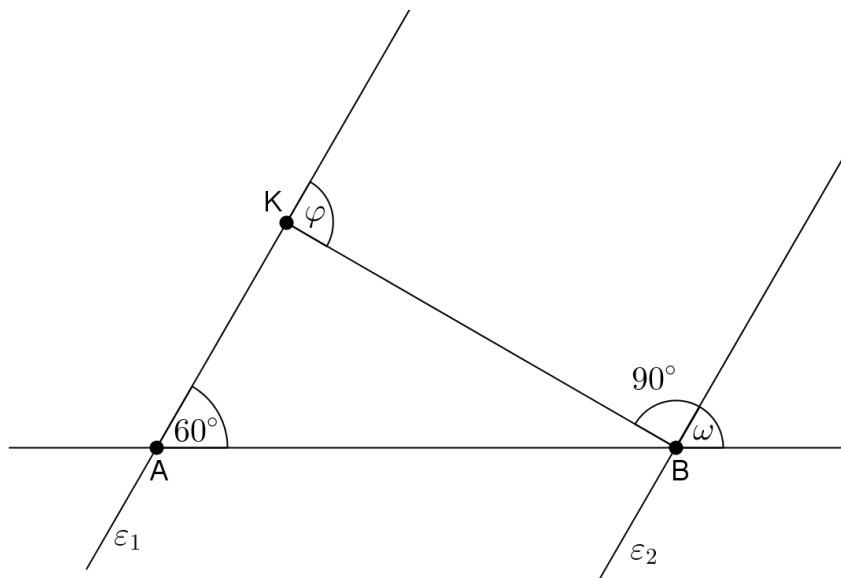
Μονάδες 10

β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ABK ως προς τις γωνίες του.

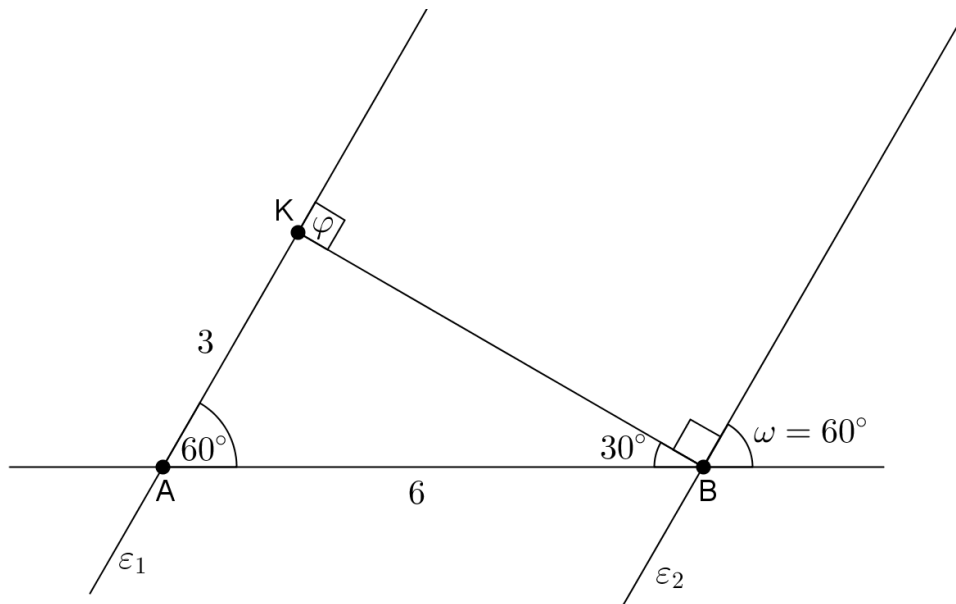
Μονάδες 7

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της AK , αιτιολογώντας την απάντησή της.

Μονάδες 8



ΛΥΣΗ



α) Είναι $\hat{\omega} = \hat{A} = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ε_1 και ε_2 που τέμνονται από την AB.

Επειδή $\hat{B} = 90^\circ$ θα είναι $BK \perp \varepsilon_2$ και αφού $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ θα είναι και $BK \perp \varepsilon_1$, άρα $\hat{\phi} = 90^\circ$

β) Επειδή $\hat{\phi} = \hat{K} = 90^\circ$ το τρίγωνο ABK είναι ορθογώνιο.

γ) Από άθροισμα γωνιών τριγώνου στο ABK έχω:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{K} = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + \hat{B} + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 30^\circ$$

Δηλαδή στο ορθογώνιο τρίγωνο ABK μια γωνία του είναι 30° , άρα η απέναντι πλευρά θα είναι το μισό της υποτείνουσας, άρα

$$AK = \frac{AB}{2} \Rightarrow AK = \frac{6}{2} \Rightarrow AK = 3.$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5142)

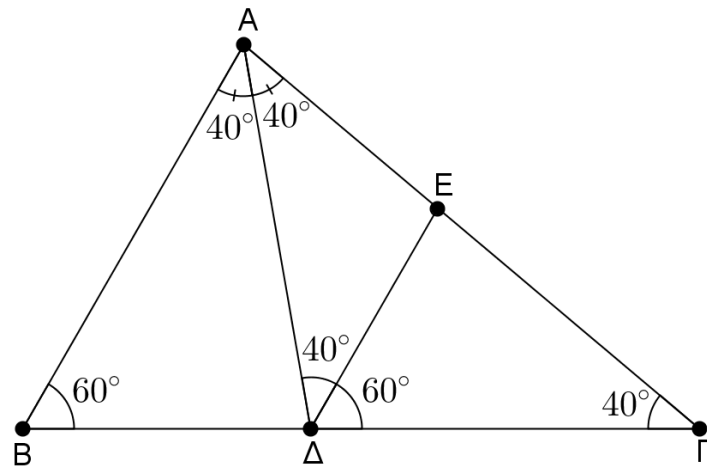
Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 80^\circ$ και $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$, και ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.
α) να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ.

Μονάδες 12

β) Φέρουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην AB, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να υπολογίσετε τις γωνίες ΑΔΕ και ΕΔΓ.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ



α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ από άθροισμα γωνιών τριγώνου έχω

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 80^\circ + 20^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 40^\circ$$

Οπότε και

$$\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{B} = 20^\circ + 40^\circ \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$$

β) Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α θα έχω

$$\hat{B}\hat{A}\Delta = \hat{\Delta A}\hat{\Gamma} = \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow \hat{B}\hat{A}\Delta = \hat{\Delta A}\hat{\Gamma} = 40^\circ$$

Είναι $\hat{A}\hat{\Delta E} = \hat{B}\hat{A}\Delta = 40^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΑΔ.

Στο τρίγωνο ΑΔΓ από άθροισμα γωνιών τριγώνου έχουμε :

$$\begin{aligned} \hat{\Delta A}\hat{\Gamma} + \hat{A}\hat{\Delta E} + \hat{\Gamma} &= 180^\circ \Rightarrow 40^\circ + \hat{A}\hat{\Delta E} + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}\hat{\Delta E} = 100^\circ \\ \Rightarrow \hat{A}\hat{\Delta E} + \hat{E}\hat{\Delta G} &= 100^\circ \Rightarrow 40^\circ + \hat{E}\hat{\Delta G} = 100^\circ \Rightarrow \hat{E}\hat{\Delta G} = 60^\circ \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5149)

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Αx της γωνίας $\hat{A}$ και από το σημείο Γ την κάθετο ΓΔ στην Αx. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

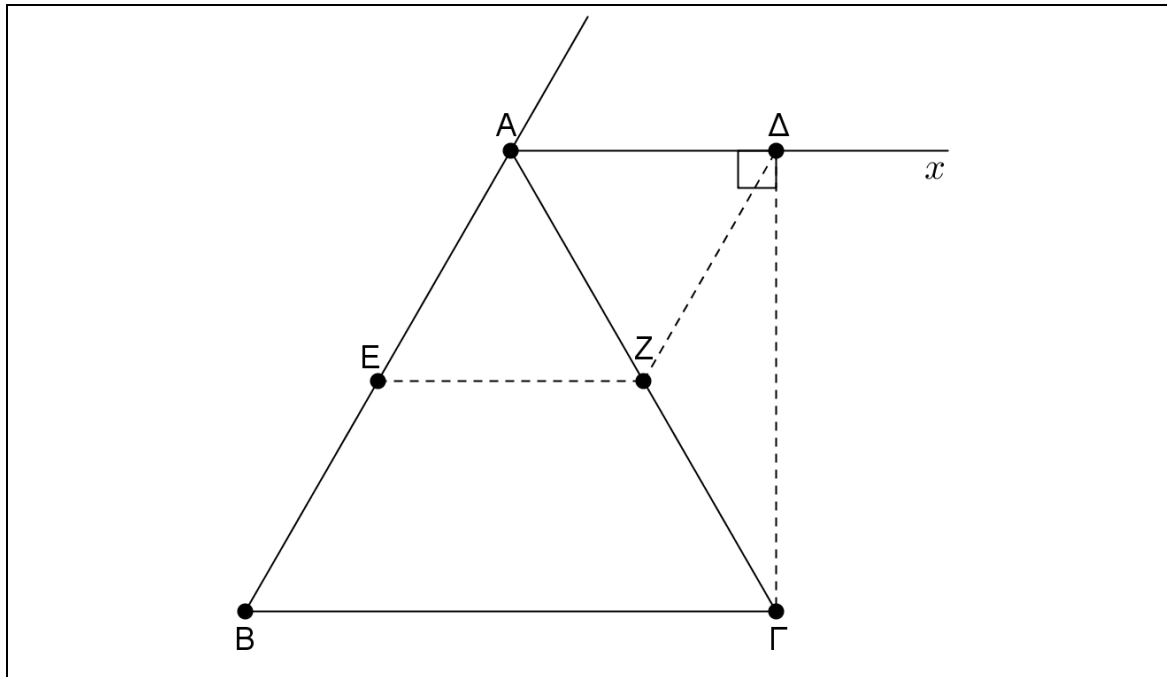
Να αποδείξετε ότι :

α) το τρίγωνο ΑΖΔ είναι ισόπλευρο.

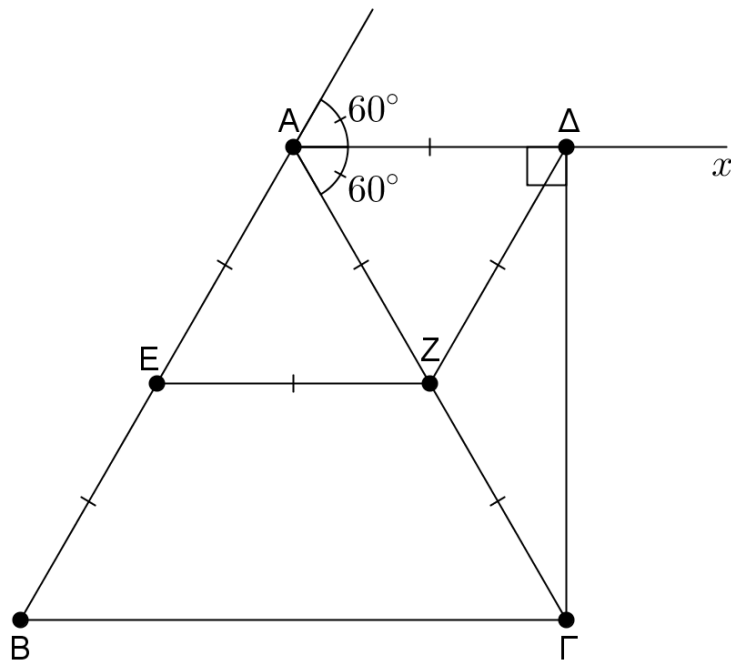
Μονάδες 12

β) το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ρόμβος.

Μονάδες 13



ΛΥΣΗ



α) Το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο, άρα $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Όμως

$$\hat{A} + \hat{A}_{εξ} = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + \hat{A}_{εξ} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_{εξ} = 120^\circ$$

Επίσης AΔ διχοτόμος της

$$\hat{xAy} = \hat{xAG} = \frac{\hat{A}_{εξ}}{2} \Rightarrow \hat{xAy} = \hat{xAG} = 60^\circ$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο AΔE ($\hat{\Delta} = 90^\circ$, αφού $\Gamma\Delta \perp Ax$) το Z είναι μέσο της AΓ άρα η ΔZ είναι διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου και θα είναι ίση με το μισό της υποτεινουσας δηλαδή

$$\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2} \Rightarrow \Delta Z = AZ = \frac{A\Gamma}{2} \quad (1)$$

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ έχω

$$\hat{x}Ay = 60^\circ \Rightarrow \hat{A}\Gamma\Delta = 30^\circ \Rightarrow A\Delta = \frac{A\Gamma}{2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχω ότι $A\Delta = \Delta Z = AZ$ οπότε το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισόπλευρο.

β) Είναι

$$\hat{B}\Gamma\Delta = \hat{B}\Gamma A + \hat{A}\Gamma\Delta = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ.$$

Δηλαδή η ΓΔ είναι κάθετη στις Αx και ΒΓ άρα $B\Gamma \parallel Ax$

Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Ε, Ζ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, οπότε $B\Gamma \parallel EZ$

Είναι $\hat{B} = \hat{E} = 60^\circ$ ως εντός, εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΒΓ, ΕΖ που τέμνονται από την ΑΒ

Επίσης $\hat{\Gamma} = \hat{Z} = 60^\circ$ ως εντός, εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΒΓ, ΕΖ που τέμνονται από την ΑΓ.

Επομένως το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο αφού έχει όλες τις γωνίες του ίσες, οπότε θα έχει και όλες τις πλευρές του ίσες. Άρα $AE = EZ = AZ$

Στο τετράπλευρο ΑΔΖΕ έχω :

$$A\Delta = \Delta Z = ZE = EA,$$

δηλαδή όλες οι πλευρές του ίσες, άρα είναι ρόμβος.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5162)

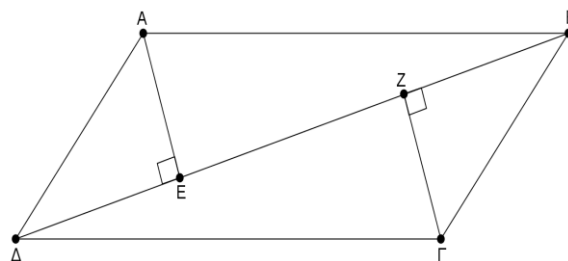
Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB > B\Gamma$ φέρουμε από τις κορυφές Α και Γ κάθετους στην διαγώνιο ΒΔ, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) $AE = \Gamma Z$.

Μονάδες 15

β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 10



ΛΥΣΗ

α) Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΔ και ΓΖΒ ($\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$) τα οποία έχουν :

$A\Delta = B\Gamma$ (ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου)

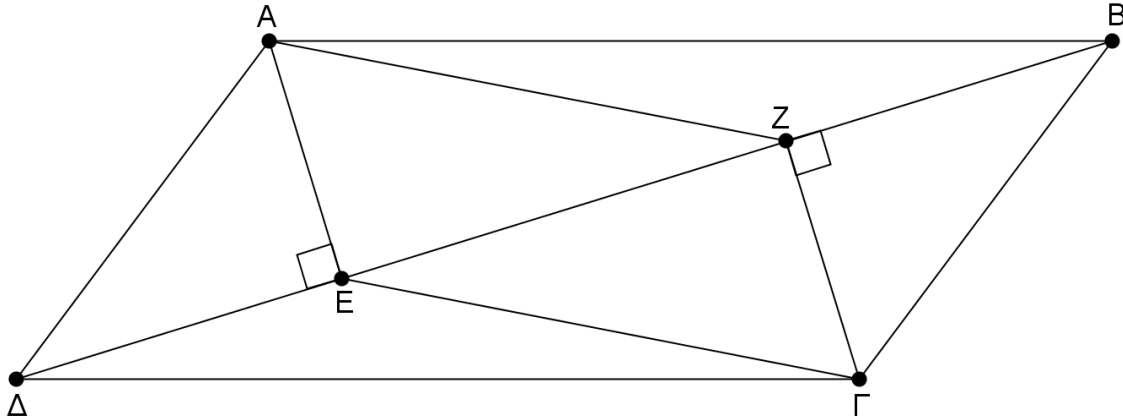
$\hat{B}\hat{Z}\hat{G} = \hat{D}\hat{E}\hat{A}$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ)

Τα τρίγωνα έχουν μια οξεία γωνία ίση και από μια κάθετη πλευρά, άρα θα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα.

Δηλαδή θα έχω

$$\Delta E = BZ, AE = \Gamma Z \text{ και } \hat{\Delta A E} = \hat{B \Gamma Z}$$

β) Οι AE, ΓZ είναι κάθετες στην ίδια ευθεία (στην ΒΔ) άρα μεταξύ τους παράλληλες και επειδή είναι και ίσες (λόγω της (1)) το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.



ΑΣΚΗΣΗ (2_5167)

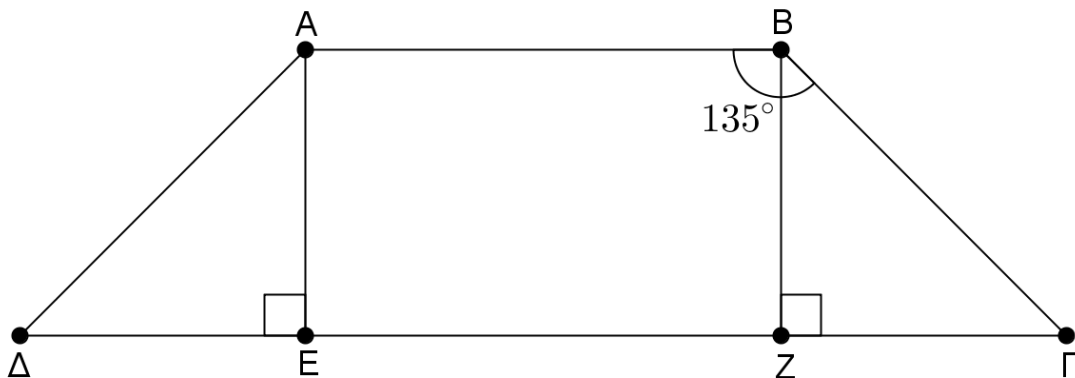
Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB > \Gamma\Delta$ και $\hat{B} = 135^\circ$. Από τις κορυφές Α και Β φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι $AE = E\Delta = BZ = \Gamma Z$

Μονάδες 15



ΛΥΣΗ

α) Επειδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές οι γωνίες των βάσεων είναι ίσες μεταξύ τους ,
οπότε $\hat{B} = \hat{A} = 135^\circ$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$

Επίσης οι γωνίες $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ είναι παραπληρωματικές (ως εντός και επί τα αυτά των
παράλληλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την ΒΔ) , άρα

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 135^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 45^\circ ,$$

οπότε και $\hat{\Delta} = 45^\circ$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΔ οι οξείες γωνίες είναι συμπληρωματικές, άρα

$$\hat{\Delta\hat{A}E} + \hat{\Delta} = 90^\circ \Rightarrow \hat{\Delta\hat{A}E} + 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow \hat{\Delta\hat{A}E} = 45^\circ,$$

οπότε στο ΑΕΔ έχω $\hat{\Delta\hat{A}E} = \hat{\Delta} = 45^\circ$, άρα ισοσκελές, επομένως $AE = ED$ (1)

Όμοια στο ορθογώνιο ΒΓΖ έχω

$$\hat{\Gamma\hat{B}Z} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma\hat{B}Z} + 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma\hat{B}Z} = 45^\circ,$$

οπότε το ΒΓΖ ισοσκελές, άρα $BZ = \Gamma Z$ (2)

Επειδή τα ΑΕ και ΒΖ είναι ύψη του τραπεζιού, θα είναι ίσα μεταξύ τους δηλαδή

$$AE = BZ \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχω

$$AE = ED = BZ = \Gamma Z$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5554)

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΓΒ. Φέρουμε από την κορυφή Α ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την (ε) στο Δ και την ΒΓ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta A = \Delta B$ και $EA = EB$.

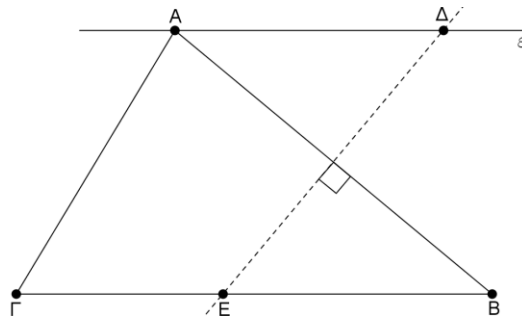
Μονάδες 6

β) Αν Μ είναι το μέσο του ΑΒ, να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ.

Μονάδες 10

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος.

Μονάδες 9



ΛΥΣΗ

α) Επειδή το Δ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ θα ισαπέχει από τα άκρα του, οπότε

$$\Delta A = \Delta B$$

Όμοια το Ε είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ άρα θα ισαπέχει από τα άκρα του, οπότε

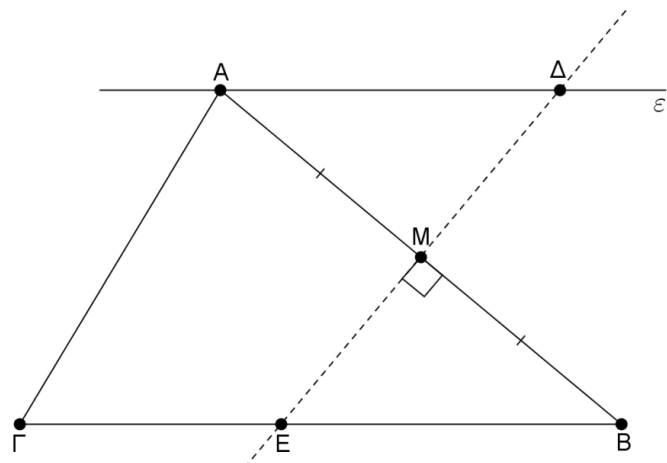
$$EA = EB$$

β) Συγκρίνω τα τρίγωνα ορθογώνια ΑΜΔ και ΕΜΒ

($\hat{A\hat{M}\Delta} = \hat{B\hat{M}E} = 90^\circ$) τα οποία έχουν :

$$AM = BM \quad (\text{διότι } M \text{ μέσον της } AB)$$

$$\hat{A\hat{\Delta}M} = \hat{A\hat{B}\Gamma} \quad (\text{ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων } A\Delta, B\Gamma \text{ που τέμνονται από την } E\Delta)$$



Τα τρίγωνα έχουν μια οξεία γωνία ίση και από μια κάθετη πλευρά, άρα θα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα.

Δηλαδή θα έχω

$$ΜΔ = ΜΕ, ΑΔ = ΒΕ \text{ και } \hat{ΜΑΔ} = \hat{ΜΒΕ}$$

γ) Επειδή $ΑΔ // ΒΕ$ το $ΑΔΒΕ$ είναι παραλληλόγραμμο στο οποίο οι διαγώνιοι του $ΑΒ$ και $ΔΕ$ τέμνονται κάθετα, άρα ρόμβος.

Β τρόπος

Είναι $ΑΔ = ΔΒ = ΒΕ = ΕΑ$, δηλαδή το $ΑΔΒΕ$ έχει όλες τις πλευρές του ίσες μεταξύ τους άρα ρόμβος.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5557)

Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει $\hat{Α} + \hat{Γ} = 120^\circ$ και $\hat{Α} = 3\hat{Γ}$.

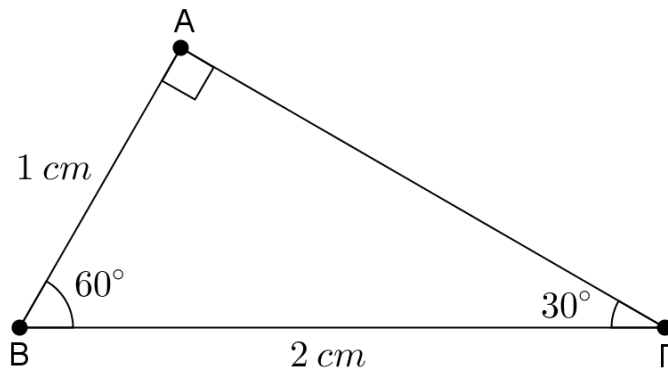
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

Μονάδες 15

β) Αν η πλευρά $ΒΓ = 2 \text{ cm}$, να βρείτε το μήκος της $ΑΒ$.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ



α) Είναι

$$\hat{Α} + \hat{Γ} = 120^\circ \Rightarrow 3\hat{Γ} + \hat{Γ} = 120^\circ \Rightarrow 4\hat{Γ} = 120^\circ \Rightarrow \hat{Γ} = 30^\circ,$$

οπότε και

$$\hat{Α} = 3\hat{Γ} \Rightarrow \hat{Α} = 3 \cdot 30^\circ \Rightarrow \hat{Α} = 90^\circ, \text{ άρα ορθογώνιο.}$$

Από άθροισμα γωνιών τριγώνου στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχω :

$$\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{Β} + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{Β} = 60^\circ$$

β) Επειδή

$$\hat{Γ} = 30^\circ \Rightarrow ΑΒ = \frac{ΒΓ}{2} \Rightarrow ΑΒ = \frac{2}{2} \Rightarrow ΑΒ = 1 \text{ cm}$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5565)

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 6$, $B\Gamma = 4$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.
 Δίνονται επίσης τα ύψη AE και BZ από τις κορυφές A και B αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.

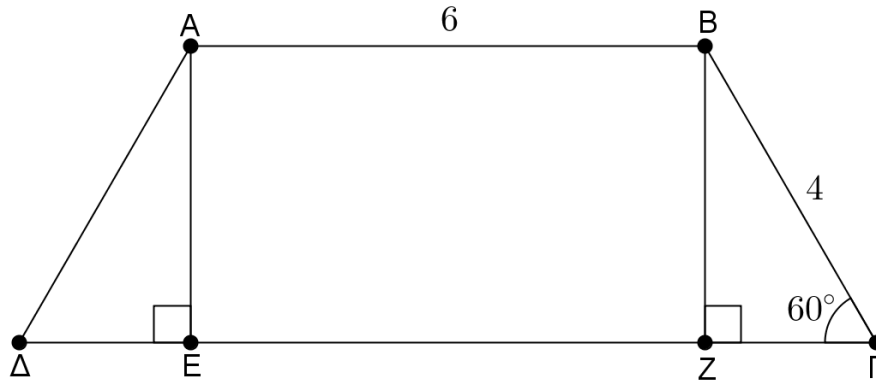
Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AE\Delta$, $BZ\Gamma$ είναι ίσα.

Μονάδες 10

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του $AB\Gamma\Delta$.

Μονάδες 9

**ΛΥΣΗ**

α) Επειδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές θα ισχύει $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$, $\hat{A} = \hat{B}$ και

$$\hat{\Gamma} + \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 120^\circ$$

(ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων AB , $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Gamma$).

Άρα $\hat{A} = \hat{B} = 60^\circ$

β) Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα $AE\Delta$ και $BZ\Gamma$ ($\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$), τα οποία έχουν :
 $AD = B\Gamma$ (ως απέναντι πλευρές ισοσκελούς τραπεζίου)

$\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ (ως γωνίες βάσης ισοσκελούς τραπεζίου)

Τα τρίγωνα έχουν μια οξεία γωνία ίση και τις υποτείνουσες ίσες, άρα θα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα.

Δηλαδή θα έχω :

$$\Delta AE = \Gamma BZ, \Delta E = \Gamma Z \text{ και } AE = BZ \text{ (είναι ίσα και ως ύψη τραπεζίου).}$$

γ) Το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ορθογώνιο αφού έχει όλες τις γωνίες ορθές, οπότε θα είναι $AB = EZ = 6$ (ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma Z$ έχω

$$\hat{\Gamma BZ} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma BZ} + 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma BZ} = 30^\circ,$$

άρα

$$\Gamma Z = \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow \Gamma Z = \frac{4}{2} \Rightarrow \Gamma Z = 2,$$

οπότε και $\Delta E = \Gamma Z = 2$

Επομένως για την περίμετρο Π του τραπεζίου θα έχω

$$\Pi = AB + BG + \Gamma\Delta + \Delta A = 4 + 6 + \Gamma Z + ZE + E\Delta + 4 = 14 + 2 + 6 + 2 = 24.$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5566)

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = BG = 4$, $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνεται επίσης το ύψος BE από την κορυφή B .

α) Να υπολογίσετε τις άλλες δυο γωνίες του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.

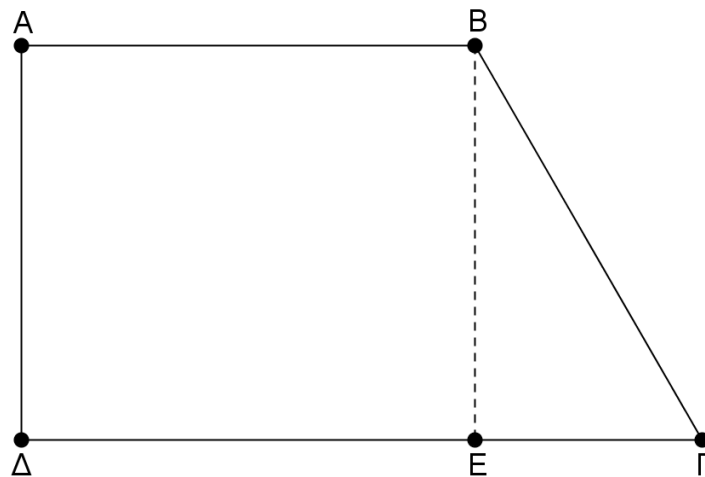
Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι $2EG = BG$.

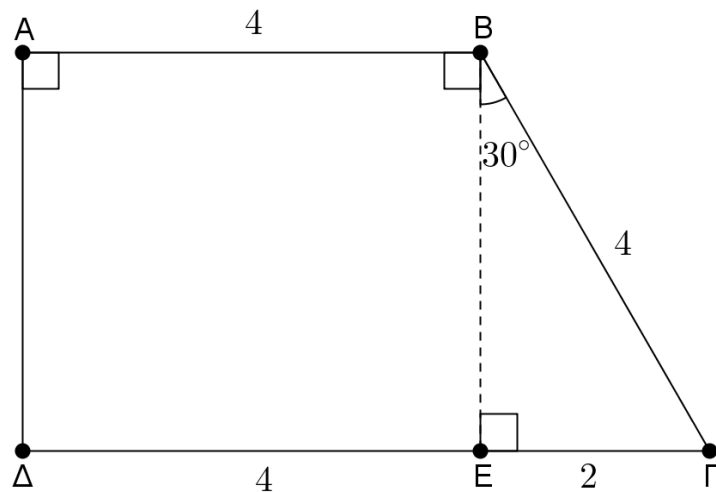
Μονάδες 9

γ) Αν M , N τα μέσα των πλευρών $A\Delta$, $B\Gamma$ αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος MN .

Μονάδες 8



ΛΥΣΗ



α) Επειδή $A\Delta \perp \Gamma\Delta$ θα είναι $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$

Από άθροισμα γωνιών τετράπλευρου έχουμε ότι

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{B} + 60^\circ + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \hat{B} = 120^\circ$$

(Β τρόπος : Στο ορθογώνιο τρίγωνο BEΓ έχω

$$\hat{\Gamma} = 60^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma BE} = 30^\circ, \text{ άρα } \hat{B} = \hat{\Gamma BE} + \hat{ABE} = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ).$$

(Γ τρόπος : Έχουμε,

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 120^\circ \text{ (ως εντός και επί τα αυτά) .}$$

β) Στο ορθογώνιο BEΓ έχω

$$\hat{\Gamma} = 60^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 = 30^\circ,$$

άρα

$$EG = \frac{BG}{2} \Rightarrow 2EG = BG$$

γ) Το ABZE είναι ορθογώνιο αφού έχει όλες τις γωνίες ορθές, οπότε θα είναι $AB = \Delta E = 4$ και από β) ερώτημα

$$EG = \frac{BG}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Οπότε

$$\Gamma\Delta = GE + E\Delta = 2 + 4 = 6$$

Επειδή τα Μ, Ν είναι μέσα των μη παράλληλων πλευρών του τραπεζίου ABΓΔ η ΜΝ θα είναι διάμεσος, οπότε :

$$MN = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{4 + 6}{2} = 5$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5568)

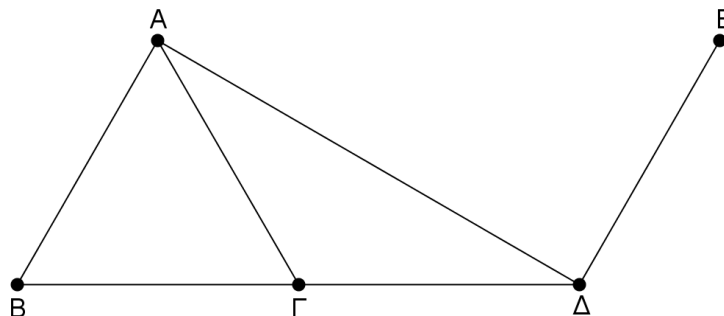
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το μέρος του Γ) θεωρούμε τμήμα ΓΔ = ΒΓ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην ΑΔ στο σημείο της Δ, τέτοιο ώστε ΔΕ = ΒΓ (Α και Ε στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ΒΔ).

α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ.

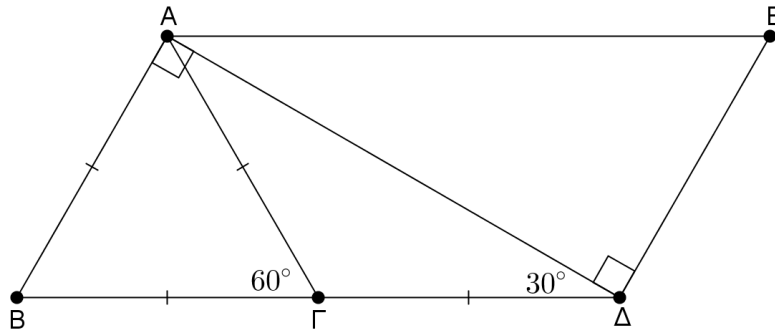
Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι ΑΒΔΕ παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 13



ΛΥΣΗ



α) Το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο , οπότε

$$\hat{B}\hat{A}\hat{G} = \hat{B} = \hat{A}\hat{G}\hat{B} = 60^0$$

Το τρίγωνο AΓΔ είναι ισοσκελές (αφού $\Gamma\Delta = B\Gamma = A\Gamma$) , άρα $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{A}$

Στο τρίγωνο AΓΔ η γωνία AΓB είναι εξωτερική , οπότε

$$\hat{A}\hat{G}\hat{B} + \hat{A}\hat{G}\hat{\Delta} = 180^0 \Rightarrow 60^0 + \hat{A}\hat{G}\hat{\Delta} = 180^0 \Rightarrow \hat{A}\hat{G}\hat{\Delta} = 120^0$$

και

$$\hat{A}\hat{G}\hat{B} = \hat{\Gamma}\hat{A}\hat{\Delta} + \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{A} \Rightarrow 2\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{\Delta} = 60^0 \Rightarrow \hat{\Gamma}\hat{A}\hat{\Delta} = 30^0 ,$$

οπότε

$$\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{A} = 30^0 .$$

β) Είναι

$$AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E , \text{ οπότε } AB // \Delta E ,$$

επομένως το ABΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5569)

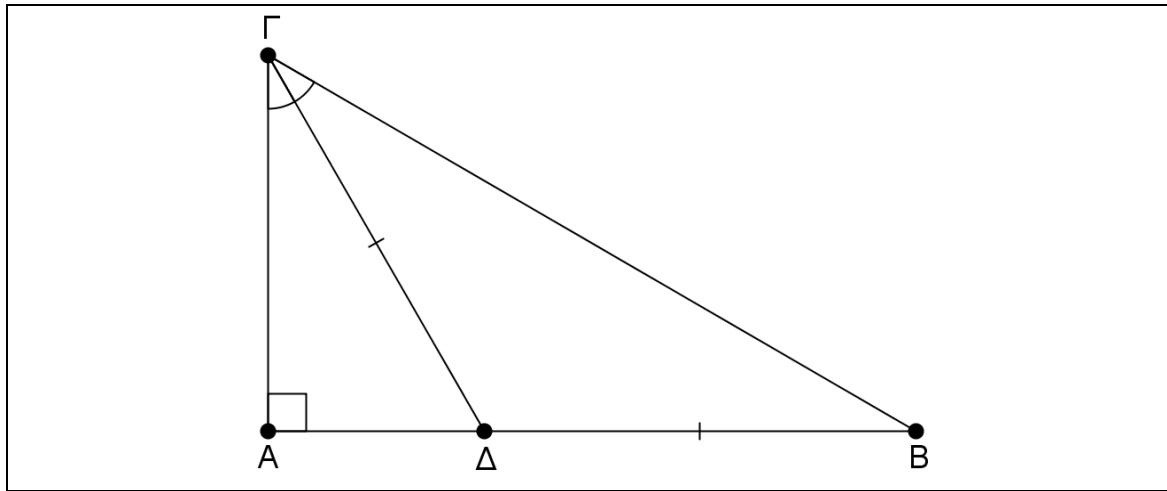
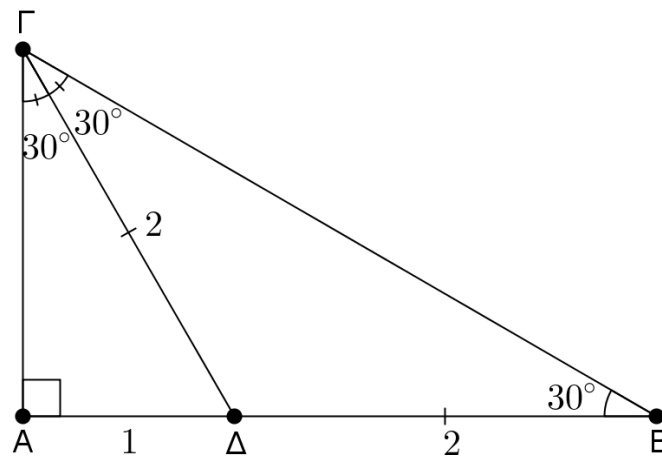
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ (με $\hat{A} = 90^0$) και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την πλευρά AC στο σημείο Δ , τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = \Delta B = 2 \text{ cm}$. Να αποδείξετε ότι :

α) $\hat{B} = 30^0$.

Μονάδες 12

β) $AB = 3 \text{ cm}$

Μονάδες 13

**ΛΥΣΗ**

α) Το τρίγωνο ΓΒΔ είναι ισοσκελές αφού έχει $\Gamma\Delta = \Delta B$, οπότε

$$\hat{B} = \hat{B\Gamma\Delta} \Rightarrow \hat{B} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow 2\hat{B} = \hat{\Gamma}$$

όμως οι οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές, οπότε

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} + 2\hat{B} = 90^\circ \Rightarrow 3\hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} = 30^\circ.$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχω

$$\hat{B} = 30^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 60^\circ \Rightarrow \hat{A\Gamma\Delta} = 30^\circ,$$

οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ θα έχω

$$A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Rightarrow A\Delta = \frac{B\Delta}{2}$$

Είναι

$$AB = A\Delta + \Delta B = \frac{B\Delta}{2} + B\Delta = \frac{3B\Delta}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3 \text{ cm}.$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5574)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει $B\Gamma = 2AB$ και έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Αν η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΜ και Ε σημείο στην προέκτασή της ώστε

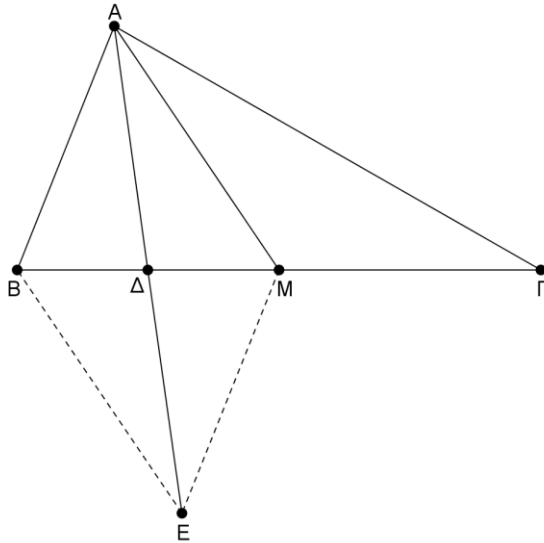
$AD = DE$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ABEM είναι παραλληλόγραμμο.

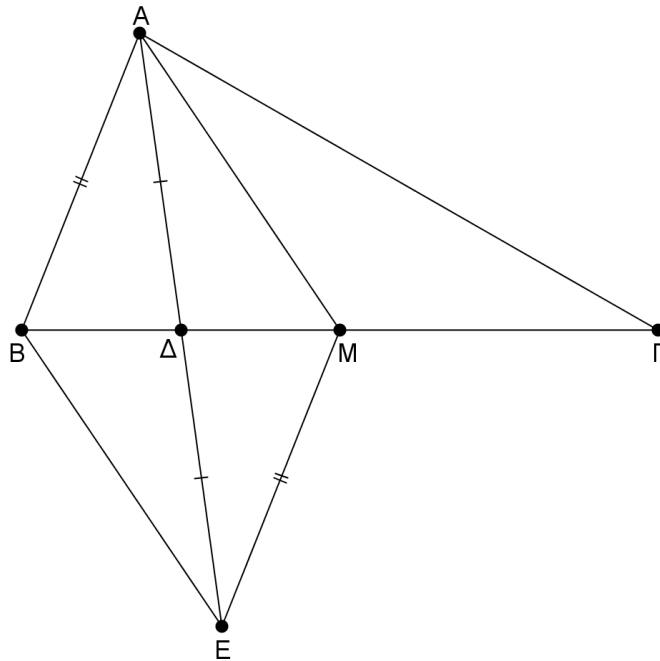
Μονάδες 12

β) $ME = MG$

Μονάδες 13



ΛΥΣΗ



α) Επειδή $AD = DE$ το Δ θα είναι μέσο της ΑΕ .

Επίσης, από υπόθεση έχω ΑΔ διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε το Δ είναι μέσο της ΒΜ.

Οπότε στο τετράπλευρο ΑΒΕΜ το Δ είναι μέσο των διαγωνίων του ΑΕ και ΒΜ, δηλαδή οι διαγώνιοι ΑΕ, ΒΜ διχοτομούνται, άρα το ΑΒΕΜ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Επειδή ΑΒΕΜ παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, δηλαδή

$$AB = ME \quad (1)$$

Επίσης το Μ είναι το μέσο της ΒΓ, άρα

$$BM = M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \quad (2)$$

Από υπόθεση όμως έχω:

$$B\Gamma = 2AB \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1),(2) έχω:

$$BM = M\Gamma = AB \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (1),(4) έχω:

$$ME = M\Gamma$$

β) Από τη σχέση (1) βρίσκουμε

$$A + \Gamma = 120^\circ \Rightarrow 3\Gamma + \Gamma = 120^\circ \Rightarrow 4\Gamma = 120^\circ \Rightarrow \Gamma = 30^\circ.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Delta\Gamma$ (αφού το $\Delta\Delta$ είναι ύψος) η γωνία $\Gamma\Delta\Delta$ είναι συμπληρωματική της $\Gamma = 30^\circ$.

Οπότε

$$\Gamma\Delta\Delta = 60^\circ.$$

Επιπλέον, η BE είναι διχοτόμος και άρα $\Delta BZ = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Delta Z$, η γωνία ΔZB είναι συμπληρωματική της $\Delta BZ = 30^\circ$ και άρα $\Delta ZB = 60^\circ$.

Όμως οι γωνίες $\Delta ZB = 60^\circ$ και AZE είναι κατακορυφήν και άρα είναι ίσες. Δηλαδή

$$AZE = 60^\circ.$$

Οπότε το τρίγωνο AZE έχει δύο γωνίες 60° , άρα και η τρίτη γωνία είναι 60° και συνεπώς είναι ισόπλευρο.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5575)

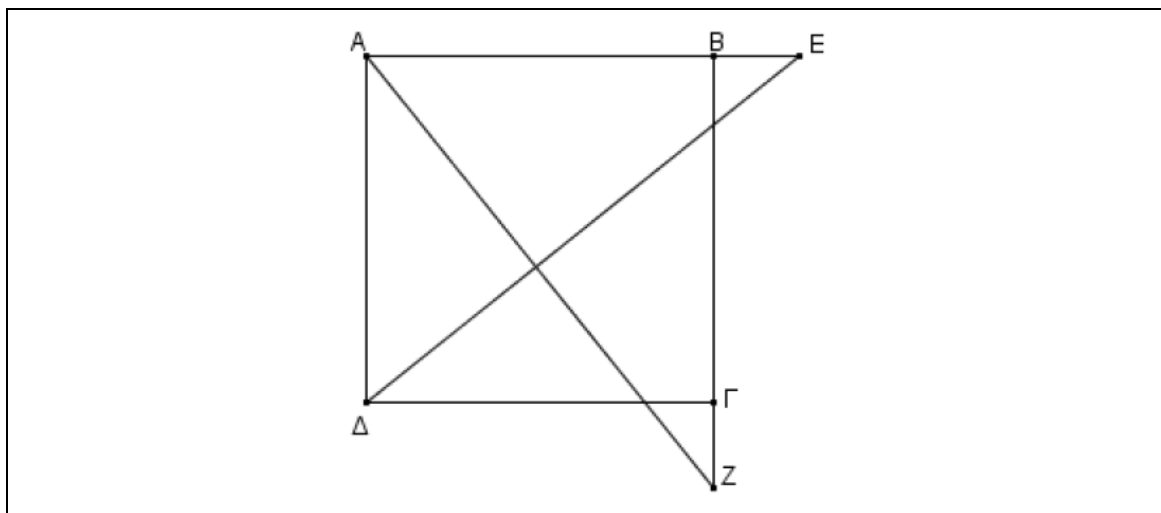
Θεωρούμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία E και Z στις προεκτάσεις των AB (προς το B) και $B\Gamma$ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABZ και $A\Delta E$ είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) Οι γωνίες $E\Delta\Gamma$ και AZB είναι ίσες.

Μονάδες 13

**Λύση**

α) Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ABZ και $AEΔ$ έχουμε:

- είναι ορθογώνια ($\angle B = \angle A = 90^\circ$ γωνίες τετραγώνου)
- $AB = AΔ$ (ως πλευρές τετραγώνου) και
- $BZ = AE$ (αφού άθροισμα ίσων πλευρών $BZ = AB$ και $ΓZ = BE$)

Συνεπώς τα ορθογώνια τρίγωνα ABZ και $AEΔ$ τις δύο κάθετες πλευρές τους ανά δύο ίσες και συνεπώς είναι ίσα.

β) Έχουμε $\angle EΔΓ = \angle AEΔ$ (1), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AE και $ΓΔ$ με τέμνουσα την DE . Επιπλέον από την ισότητα των τριγώνων ABZ και $AEΔ$ έχουμε $\angle AEΔ = \angle AZB$ (2), αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές $AΔ$ και AB αντίστοιχα. Από τις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε $\angle EΔΓ = \angle AZB$, που είναι το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5577)

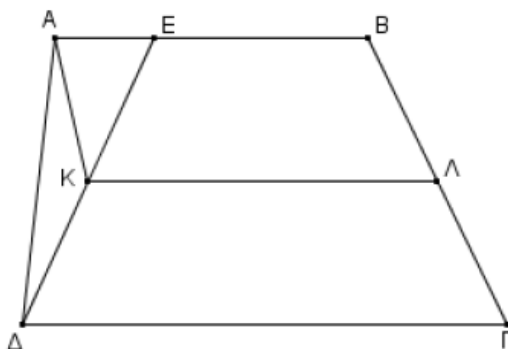
Δίνεται τραπέζιο $ABΓΔ$ ($AB // ΓΔ$) με $AB=3$, $ΓΔ=4$. Θεωρούμε σημείο E στην AB ώστε $AE=1$. Στο τραπέζιο $EBΓΔ$ θεωρούμε τα K και $Λ$, μέσα των ED και $BΓ$ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο $KΛ$ του τραπεζίου $EBΓΔ$.

Μονάδες 13

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABΛK$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 12



Λύση

α) Έχουμε,

$$ΚΛ = \frac{ΕΒ + ΔΓ}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3$$

β) Από το τραπέζιο ΕΒΛΚ η διάμεσος ΚΛ είναι παράλληλη στις βάσεις, άρα $AB \parallel ΚΛ$. Όμως $ΚΛ = 3 = AB$, οπότε στο τετράπλευρο ΑΒΛΚ έχουμε δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5581)

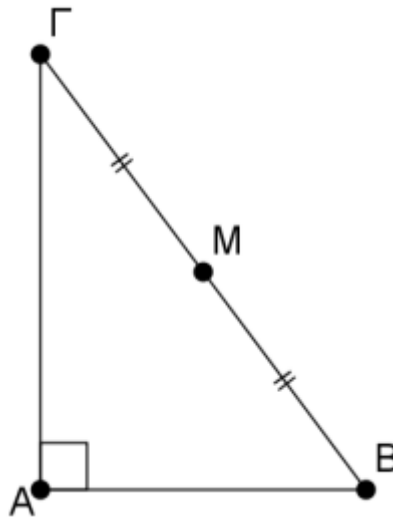
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$, $B = 35^\circ$ και Μ το μέσο της ΒΓ.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ.

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΜΒ

Μονάδες 15

Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Γ είναι συμπληρωματική της γωνίας Β. Οπότε

$$\Gamma = 90^\circ - B = 90^\circ - 35^\circ \Rightarrow \Gamma = 55^\circ$$

β) Η ΑΜ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ και συνεπώς ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή

$$AM = \frac{BG}{2} = MB$$

Δηλαδή το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές με

$$\angle MAB = B \Rightarrow \angle MAB = 35^\circ$$

Τέλος:

$$\angle MAB + B + \angle AMB = 180^\circ \Rightarrow 35^\circ + 35^\circ + \angle AMB = 180^\circ \Rightarrow \angle AMB = 110^\circ.$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5583)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$), $2\Gamma = B$ και $A\Delta$ το ύψος του.

α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

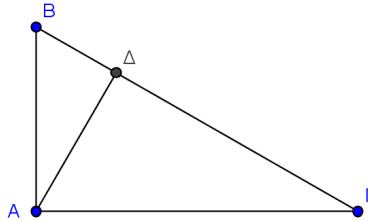
Μονάδες 9

β) Να υπολογιστεί η γωνία $BA\Delta$.

Μονάδες 7

γ) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \frac{AB}{2}$.

Μονάδες 9

**Λύση**

α) Οι οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι συμπληρωματικές. Δηλαδή έχουμε:

$$B + \Gamma = 90^\circ \xrightarrow[\text{από υπόθεση}]{2\Gamma = B} 2\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Rightarrow \Gamma = 30^\circ, \text{ οπότε } B = 60^\circ.$$

β) Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ορθογώνιο αφού το $A\Delta$ είναι ύψος. Οπότε οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές και συνεπώς

$$BA\Delta = 90^\circ - B = 90^\circ - 60^\circ \Rightarrow BA\Delta = 30^\circ.$$

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε $BA\Delta = 30^\circ$ και συνεπώς η πλευρά $B\Delta$ που βρίσκεται απέναντι από τη γωνία των 30° ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Δηλαδή

$$B\Delta = \frac{AB}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5585)

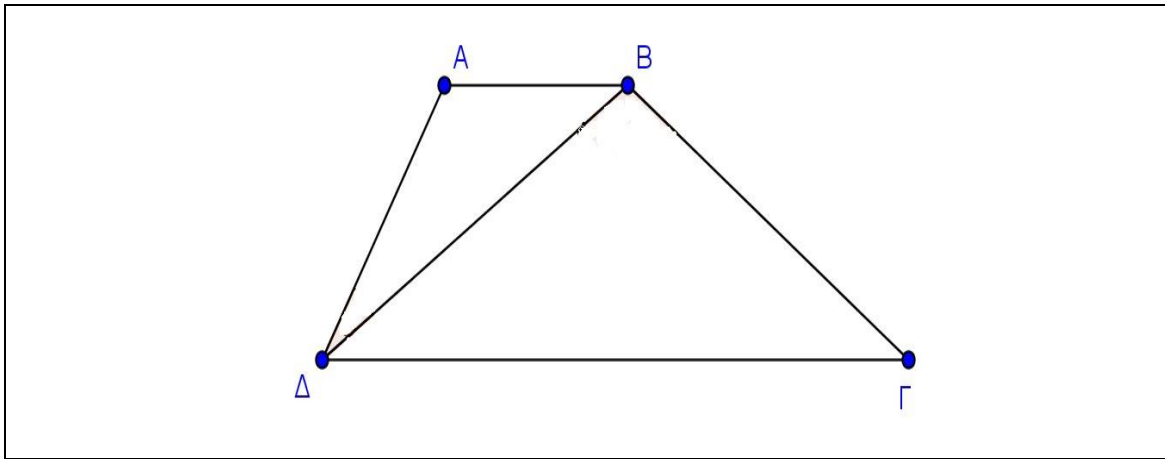
Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $B\Delta = B\Gamma$. Αν $\Delta B\Gamma = 110^\circ$ και $A\Delta B = 25^\circ$ να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία Γ .

Μονάδες 11

β) Τη γωνία A .

Μονάδες 14

**Λύση**

α) Το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές αφού από την υπόθεση $ΒΔ = ΒΓ$. Οπότε $ΒΔΓ = Γ$ (1).

Επιπλέον στο ΒΓΔ ισχύει

$$\Delta ΒΓ + ΒΔΓ + Γ = 180^\circ \Rightarrow^{(1)} 110^\circ + Γ + Γ = 180^\circ \Rightarrow 2Γ = 70^\circ \Rightarrow \boxed{Γ = 35^\circ}.$$

β) Από το πρώτο ερώτημα έχουμε $ΒΔΓ = Γ = 35^\circ$.

Επιπλέον $ΑΒΔ = ΒΔΓ = 35^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ με τέμνουσα την ΒΔ.

Οπότε στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε

$$Α + ΑΔΒ + ΑΒΔ = 180^\circ \Rightarrow Α + 25^\circ + 35^\circ = 180^\circ \Rightarrow Α = 120^\circ.$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5586)

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο ΒΓΔΕ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες

i) ΑΒΕ

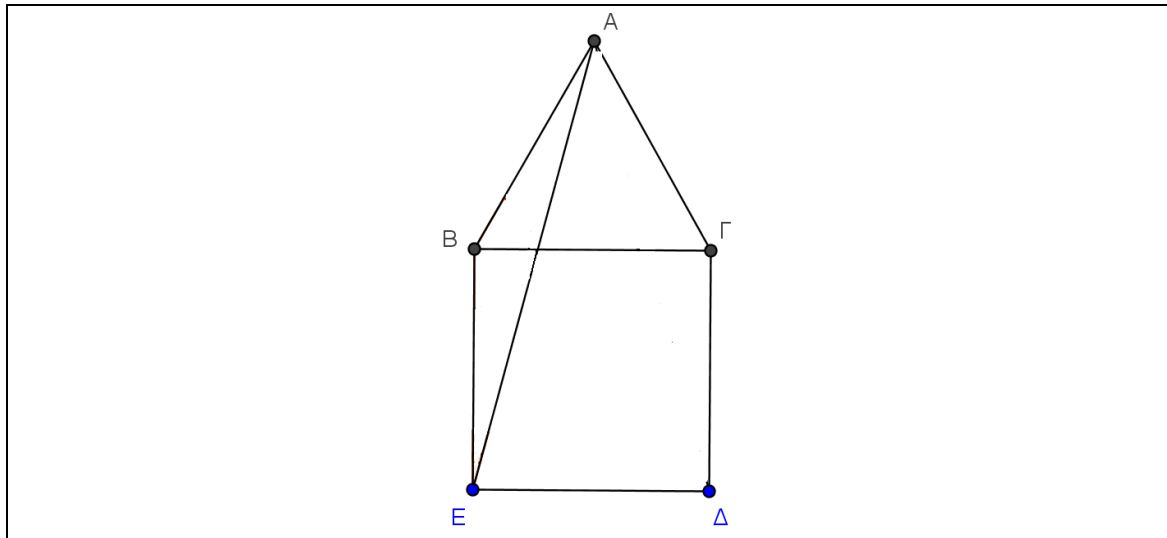
Μονάδες 8

ii) ΒΕΑ

Μονάδες 9

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 8

**Λύση**

α) i) Έχουμε

$$\angle ABE = \angle AB\Gamma + \angle \Gamma BE = 60^\circ + 90^\circ \Rightarrow \angle ABE = 150^\circ$$

αφού $\angle AB\Gamma = 60^\circ$ ως γωνία του ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ και $\angle \Gamma BE = 90^\circ$ ως γωνία του τετραγώνου $B\Gamma\Delta E$.

ii) Επειδή η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίση με την πλευρά του τετραγώνου $B\Gamma\Delta E$, έχουμε $AB = BE$. Άρα το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές με $\angle BEA = \angle BAE$ (1). Επιπλέον:

$$\begin{aligned} \angle ABE + \angle BEA + \angle BAE &= 180^\circ \Rightarrow 150^\circ + \angle BEA + \angle BAE = 180^\circ \Rightarrow \\ \angle BEA + \angle BEA &= 30^\circ \Rightarrow \angle BEA = 15^\circ \end{aligned} \quad (1)$$

β) Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ έχουμε:

- $AB = A\Gamma$ (ως πλευρές του ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$)
- $BE = \Gamma\Delta$ (ως πλευρές του τετραγώνου $B\Gamma\Delta E$) και
- $\angle ABE = \angle A\Gamma\Delta = 150^\circ$ ($\angle ABE = 150^\circ$ από το πρώτο ερώτημα και δείχνουμε με τον ίδιο τρόπο ότι)

Από το κριτήριο Π–Γ–Π τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα και συνεπώς και οι τρίτες πλευρές τους είναι ίσες. Δηλαδή $AE = AD$, που σημαίνει ότι το τρίγωνο ω είναι ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5587)

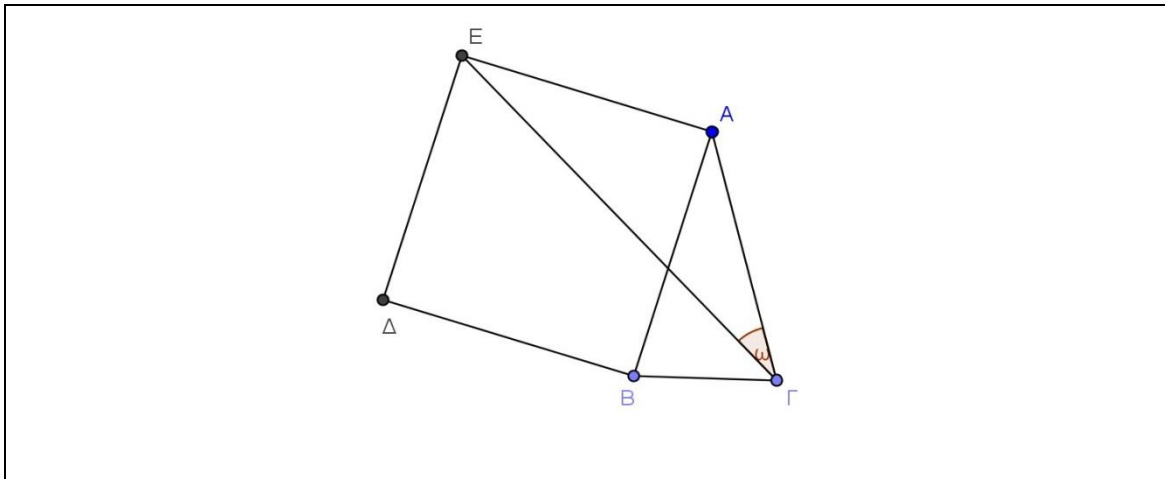
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο $AB\Delta E$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 10

β) $2\angle E\Gamma A = 90^\circ - \angle B\Gamma A$

Μονάδες 15

**Λύση**

α) Επειδή η πλευρά $ΑΓ = ΑΒ$ του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι ίση με την πλευρά του τετραγώνου $ΑΒΔΕ$, έχουμε $ΑΓ = ΑΕ$. Άρα το τρίγωνο $ΑΓΕ$ είναι ισοσκελές.

β) Από το σχήμα έχουμε

$$ΕΑΓ = ΕΑΒ + ΒΑΓ \Rightarrow ΕΑΓ = 90^\circ + ΒΑΓ \quad (1),$$

αφού $ΕΑΒ = 90^\circ$ ως γωνία του τετραγώνου $ΑΒΔΕ$. Επίσης, στο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΓΕ$ ισχύει:

$$ΕΑΓ + ΕΓΑ + ΑΕΓ = 180^\circ \xRightarrow[\text{ΕΑΓ ισοσκελές}]{ΕΓΑ = ΑΕΓ} ΕΑΓ + 2ΕΓΑ = 180^\circ \Rightarrow ΕΑΓ = 180^\circ - 2ΕΓΑ \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε

$$90^\circ + ΒΑΓ = 180^\circ - 2ΕΓΑ \Rightarrow 2ΕΓΑ = 90^\circ - ΒΑΓ.$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5588)

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο και το $ΑΓΔΕ$ είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο $Α$ είναι μέσο του $ΒΕ$.

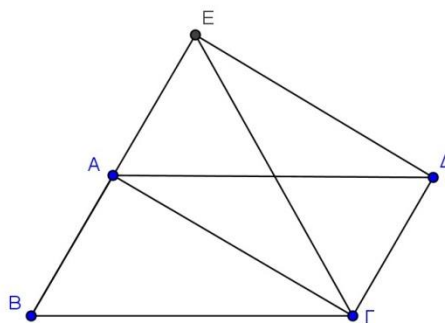
Μονάδες 8

β) Το τρίγωνο $ΒΕΓ$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 9

γ) $ΒΓΑ = ΑΔΕ$

Μονάδες 8



Λύση

α) Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και συνεπώς οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες. Οπότε $AB \parallel \Gamma\Delta$ (1).

Το τετράπλευρο $A\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο και συνεπώς οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες. Οπότε $AE \parallel \Gamma\Delta$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $AB \parallel AE$.

Συνεπώς τα ευθύγραμμα τμήματα AB και AE έχουν κοινό φορέα και αφού είναι και ίσα, προκύπτει ότι το A είναι μέσο του BE .

β) Έχουμε $A\Delta = E\Gamma$ (3) ως διαγώνιες του ορθογωνίου $A\Gamma\Delta E$. Επιπλέον $A\Delta = B\Gamma$ (4), ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Από τις σχέσεις (3) και (4) παίρνουμε $B\Gamma = E\Gamma$ και άρα το τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι ισοσκελές.

γ) Έχουμε:

- $B\Gamma A = \Gamma A \Delta$ (5) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Delta$ και $B\Gamma$ με τέμνουσα την AG .
- $\Gamma A \Delta = A \Delta E$ (6) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Gamma$ και $E\Delta$ με τέμνουσα την $A\Delta$.

Από τις σχέσεις (5) και (6) έχουμε $B\Gamma A = A \Delta E$, που είναι το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5589)

Δίνονται τα παραλληλόγραμμα $AB\Delta\Gamma$ και $B\Delta E Z$.

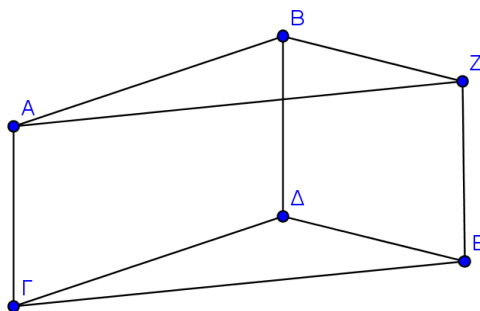
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $A\Gamma E Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 13

β) $ABZ = \Gamma \Delta E$.

Μονάδες 12

**Λύση**

α) Το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο και συνεπώς οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες. Οπότε $A\Gamma \parallel B\Delta$ (1). Το τετράπλευρο $B\Delta E Z$ είναι

παραλληλόγραμμο και συνεπώς οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες. Οπότε $ZE = // BD$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $AG = // ZE$.

Δηλαδή το τετράπλευρο $ΑΓΕΖ$ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες και άρα είναι παραλληλόγραμμο.

β) Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ABZ και $ΓΔΕ$ έχουμε:

- $AB = ΓΔ$ (ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $ABΔΓ$)
- $BZ = ΔΕ$ (ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $BΔΕΖ$) και
- $AZ = ΓΕ$ (ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $ΑΓΕΖ$)

Από το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα ABZ και $ΓΔΕ$ είναι ίσα και συνεπώς έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα. Οπότε και $ABZ = ΓΔΕ$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές AZ και $ΓΕ$ αντίστοιχα.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5590)

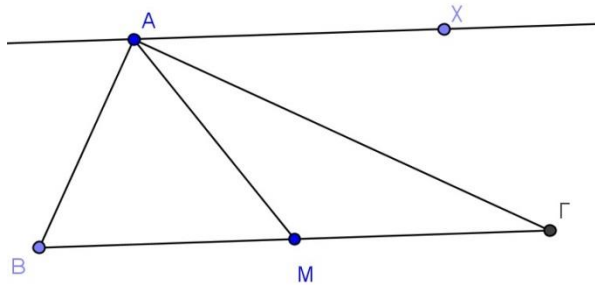
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ με τη γωνία A ορθή και M το μέσο της $BΓ$. Φέρουμε ημιευθεία Ax παράλληλη στη $BΓ$ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η AM με το σημείο $Γ$). Να αποδείξετε ότι:

α) $MAΓ = MΓA$

Μονάδες 12

β) η $ΑΓ$ είναι διχοτόμος της γωνίας MAx

Μονάδες 13



Λύση

α) Το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ορθογώνιο στην κορυφή A και αφού το M είναι το μέσο της υποτείνουσας $BΓ$, η AM είναι διάμεσος στην υποτείνουσα και συνεπώς ισούται με το μισό της.

Δηλαδή

$$AM = \frac{BΓ}{2} \Rightarrow AM = MΓ,$$

που σημαίνει ότι το τρίγωνο $AMΓ$ είναι ισοσκελές με $MAΓ = MΓA$, αφού αυτές είναι οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές $MΓ$ και AM αντίστοιχα.

β) Το τρίγωνο $AMΓ$ είναι ισοσκελές με $MAΓ = MΓA$ (1). Επιπλέον έχουμε $MΓA = ΓAχ$ (2), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $Aχ$ και $BΓ$ με τέμνουσα την $AΓ$.

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $MAΓ = ΓAχ$, που σημαίνει ότι η $AΓ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $MAχ$.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5593)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ με τη γωνία A ορθή και από το μέσο M της πλευράς $BΓ$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $MΔ$ και ME στις πλευρές AB και $AΓ$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $MΔ = ME$ τότε:

i) Τα τρίγωνα $BΔM$ και $ΓEM$ είναι ίσα.

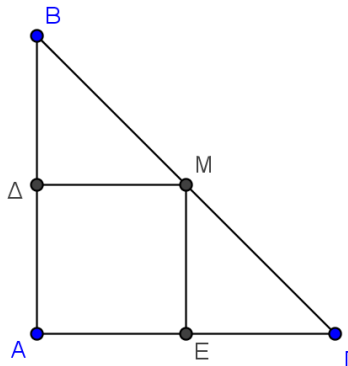
Μονάδες 8

ii) Το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 9

β) Αν $AB = AΓ$ τότε $MΔ = ME$.

Μονάδες 8



Λύση

α) i. Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $BΔM$ και $ΓEM$ έχουμε:

- είναι ορθογώνια (αφού $MΔ \perp AB$ και $ME \perp AΓ$ από την υπόθεση)
- $MΔ = ME$ (από την υπόθεση) και
- $BM = MΓ$ (αφού το M είναι μέσο της $BΓ$)

Τα ορθογώνια τρίγωνα $BΔM$ και $ΓEM$ έχουν ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά. Οπότε είναι ίσα.

ii) Έχουμε, $ΔB = ME$ (αφού το M είναι μέσο της $BΓ$ και $ME \parallel AB$ (γιατί $BA \perp AΓ$ και $ME \perp AΓ$), έχουμε ότι το E είναι μέσο της $AΓ$.

$$\text{Οπότε } ME = \frac{AB}{2} = ΔB.$$

Ισχύει ομοίως ότι το $Δ$ είναι μέσο της AB . Ομοίως και το E είναι μέσο της $AΓ$. Οπότε:

- τα Μ και Ε είναι μέσα των ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Οπότε $ME = \frac{AB}{2}$.
- τα Μ και Δ είναι μέσα των ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Οπότε $MD = \frac{AG}{2}$.

Όμως από τα ΜΔ και ΜΕ είναι ίσα από την υπόθεση.

Οπότε έχουμε

$$\frac{AG}{2} = \frac{AB}{2} \Rightarrow AG = AB$$

που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Όπως παραπάνω έχουμε ότι το Δ είναι το μέσο της ΑΒ και το Ε είναι το μέσο της ΑΓ. Αφού από την υπόθεση ισχύει $AB = AG$ και τα μισά τους θα είναι ίσα.

Δηλαδή $ΔB = ΕΓ$ (1).

Συγκρίνοντας τώρα τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουμε:

- είναι ορθογώνια (αφού $MD \perp AB$ και $ME \perp AG$ από την υπόθεση)
- $ΔB = ΕΓ$ (από τη σχέση (1)) και
- $BM = MG$ (αφού το Μ είναι μέσο της ΒΓ)

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά.

Οπότε είναι ίσα. Άρα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ίσες.

Δηλαδή $MD = ME$.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5601)

Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε τις διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ.

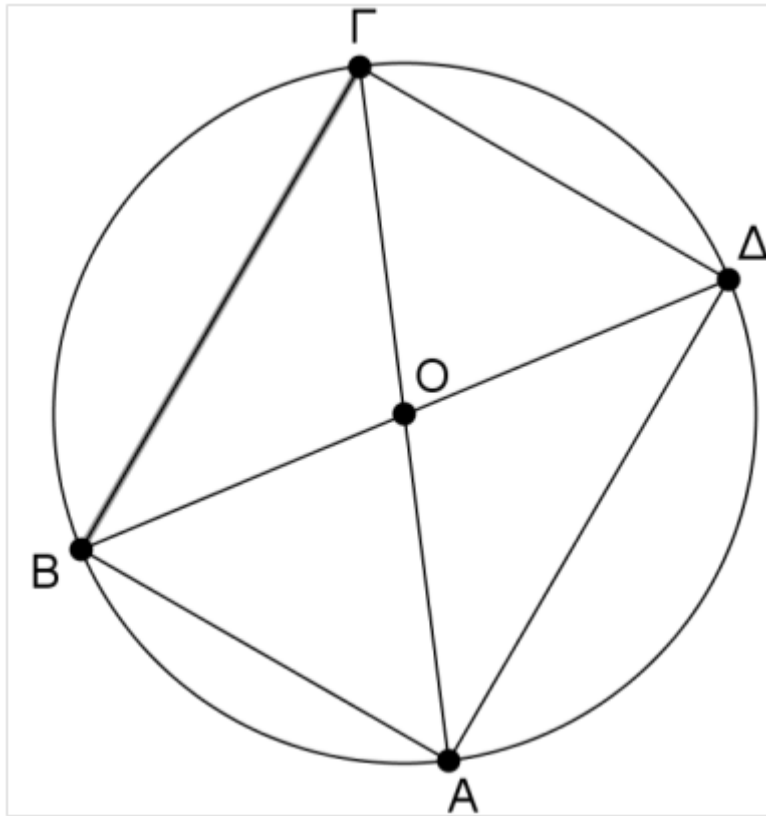
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 13

β) Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 12

Λύση



α) Το τετράπλευρο ABΓΔ έχει $AO = OΓ$ και $BO = OΔ$ ως ακτίνες του κύκλου. Οπότε οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και άρα είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον όμως οι διαγώνιοί του AG και BD είναι ίσες ως διάμετροι του κύκλου και συνεπώς το παραλληλόγραμμο ABΓΔ είναι ορθογώνιο.

β) Για να είναι το ορθογώνιο ABΓΔ τετράγωνο, πρέπει να έχει ίσες πλευρές. Επειδή ίσες χορδές αντιστοιχούν σε ίσα τόξα και ίσα τόξα σε ίσες επίκεντρες γωνίες, για να είναι οι πλευρές AB, BΓ, ΓΔ και ΔΑ ίσες, πρέπει οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες AOB, BOΓ, ΓΟΔ και ΔΟΑ να είναι ίσες, έστω ω η καθεμία.

Τότε:

$$AOB + BOΓ + ΓΟΔ + ΔΟΑ = 360^\circ \Rightarrow 4\omega = 360^\circ \Rightarrow \omega = 90^\circ.$$

Δηλαδή πρέπει οι διάμετροι AG και ω να τέμνονται κάθετα.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5612)

Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$) θεωρούμε τα μέσα Δ, E και Z των πλευρών του AB, AG και BΓ αντίστοιχα.

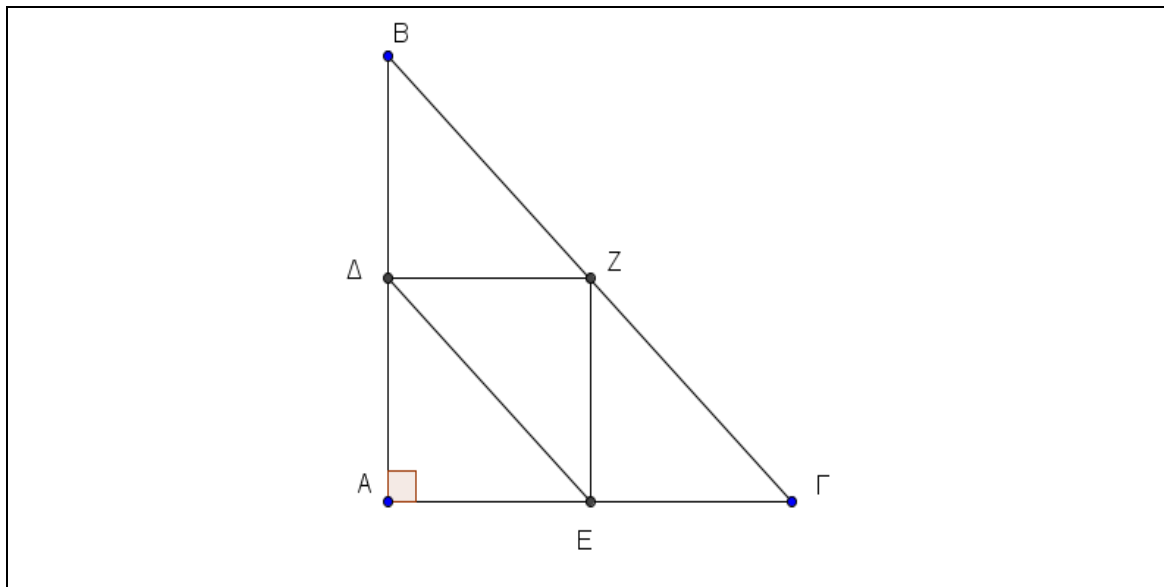
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο AEZΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 12

β) Το τετράπλευρο EΔBΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 13

**Λύση**

α) Είναι γνωστό ότι: «το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίση με το μισό της».

Επειδή: Δ μέσο της AB

και Z μέσο της BG, συμπεραίνουμε:

$$\Delta Z // A\Gamma \quad (1) \text{ και}$$

$$\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2} \quad (2).$$

Από την (1) προκύπτει

$\Delta Z // A\Gamma$ (A, E, Γ συνευθειακά).

και από την (2) $\Delta Z = AE$ (E μέσο AG)

Το τετράπλευρο AEZΔ έχει τις δύο απέναντι πλευρές του ΔZ και AE ίσες και παράλληλες άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Επίσης Δ μέσο της AB και E μέσο της AG άρα $\Delta E // B\Gamma$ και $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$ (3).

Η AZ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου οπότε

ισούται με το μισό της. $AZ = \frac{B\Gamma}{2}$ (4).

Από τις σχέσεις (3), (4) προκύπτει $AZ = \Delta E$, δηλαδή το παραλληλόγραμμο AEZΔ έχει τις διαγώνιές του ίσες, άρα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

β) Το ΔBΓE έχει $E\Delta // B\Gamma$ και $E\Gamma \nparallel B\Delta$ (επειδή οι προεκτάσεις τους τέμνονται στο A). Άρα έχει **μόνο** δύο πλευρές παράλληλες επομένως είναι τραπέζιο και οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες $B\Delta = E\Gamma$ ως μισά των ίσων πλευρών AB, AG του ABΓ, οπότε είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5615)

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB = AG$ και M το μέσο της πλευράς BG. Στα σημεία B και Γ φέρουμε κάθετες στη BG προς το ίδιο μέρος, και θεωρούμε σε αυτές σημεία Δ και E αντίστοιχα, τέτοια ώστε $M\Delta = ME$.

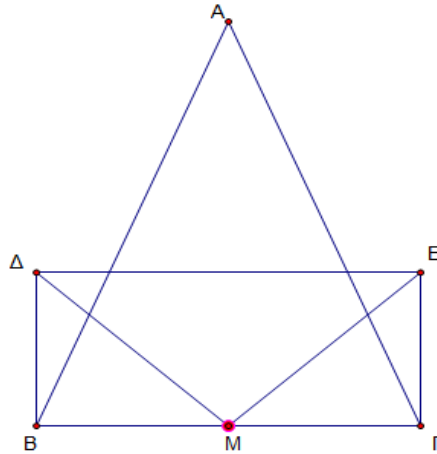
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα $ΒΔ$ και $ΓΕ$ είναι ίσα.

Μονάδες 13

β) Το τετράπλευρο $ΒΔΕΓ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 12



Λύση

α) Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $ΜΒΔ$ και $ΜΓΕ$ έχουμε:

- είναι ορθογώνια (αφού από την υπόθεση είναι $ΒΔ \perp ΒΓ$ και $ΓΕ \perp ΒΓ$)
- $ΜΔ = ΜΕ$ (από την υπόθεση) και
- $ΜΒ = ΜΓ$ (αφού το $Μ$ είναι μέσο του $ΒΓ$)

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΜΒΔ$ και $ΜΓΕ$ έχουν ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά και συνεπώς είναι ίσα.

β) Έχουμε:

$ΒΔ \perp ΒΓ$ (από υπόθεση)

$ΓΕ \perp ΒΓ$ (από υπόθεση)

άρα,

$ΒΔ \parallel ΓΕ$ και $ΒΔ = ΓΕ$ από την ισότητα των τριγώνων $ΜΒΔ$ και $ΜΓΕ$

οπότε, $ΒΔ \parallel ΓΕ$.

Δηλαδή το τετράπλευρο $ΒΔΕΓ$ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες και άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον έχει μία ορθή γωνία ($ΜΒΔ = 90^\circ$ αφού $ΒΔ \perp ΒΓ$) και συνεπώς είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5617)

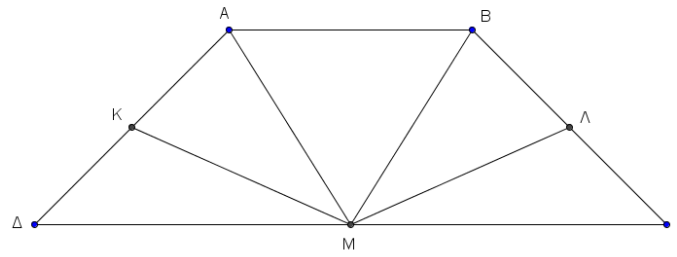
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$, το σημείο $Μ$ είναι το μέσο της πλευράς $ΔΓ$ και τα σημεία $Κ$ και $Λ$ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του $ΑΔ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα $ΚΜ$ και $ΛΜ$ είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) Τα τμήματα $ΑΜ$ και $ΒΜ$ είναι ίσα.

Μονάδες 12

**Λύση**

α) Συγκρίνω τα τρίγωνα $\triangle M\Delta K$ και $\triangle M\Gamma\Lambda$.

Έχουν:

- $M\Delta = M\Gamma$ (M μέσο $\Gamma\Delta$),
- $\Delta K = \Gamma\Lambda$ (μισά ίσων πλευρών $\triangle A, \triangle B\Gamma$)
- $\Delta = \Gamma$ (γωνίες βάσης ισοσκελούς τραπέζιου).

Άρα από κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα, συνεπώς $\boxed{MK = ML}$

β) Συγκρίνω τα τρίγωνα $\triangle MA\Delta$ και $\triangle MB\Gamma$.

Έχουν,

- $M\Delta = M\Gamma$ (M μέσο $\Gamma\Delta$)
- $\Delta A = \Gamma B$ ($\triangle AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τραπέζιο) και
- $\Delta = \Gamma$ (γωνίες της βάσης ισοσκελούς τραπέζιου)

Άρα από κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα, συνεπώς $\boxed{AK = MB}$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5621)

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και $B = 30^\circ$. Αν τα σημεία E και Δ είναι τα μέσα των AB και BΓ αντίστοιχα με $ED = 1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:

α) $AG = \dots\dots\dots$

Μονάδες 8

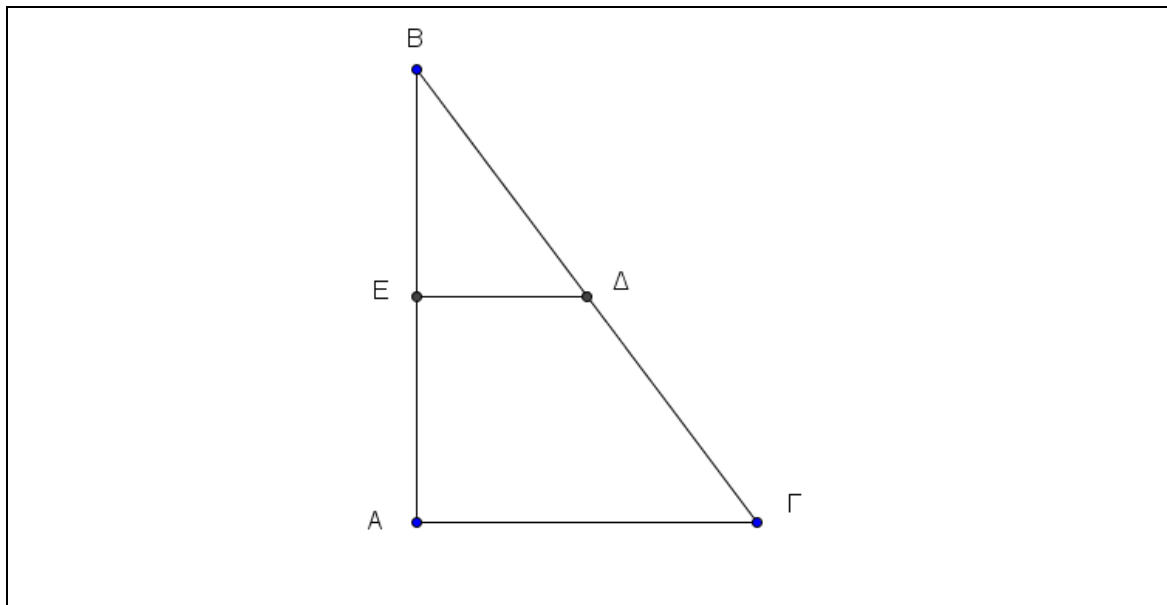
β) $B\Gamma = \dots\dots\dots$

Μονάδες 9

γ) $AD = \dots\dots\dots$

Μονάδες 8

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

**Λύση**

α) Ισχύει: «το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίση με το μισό της».

Το σημείο E είναι το μέσο της AB ενώ το Δ είναι το μέσο της BΓ, επομένως

$$ΔΕ = \frac{ΑΓ}{2} \Rightarrow ΑΓ = 2ΕΔ \Rightarrow ΑΓ = 2$$

β) Ισχύει: «αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του είναι 30° τότε η απέναντι κάθετη πλευρά του ισούται με το μισό της υποτείνουσας»)

$$B = 30^\circ \Rightarrow ΑΓ = \frac{BΓ}{2} \Rightarrow BΓ = 2ΑΓ \Rightarrow BΓ = 4$$

(γ) Ισχύει: «Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το μισό της».

Η ΑΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως:

$$ΑΔ = \frac{BΓ}{2} \Rightarrow ΑΔ = 2$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5635)

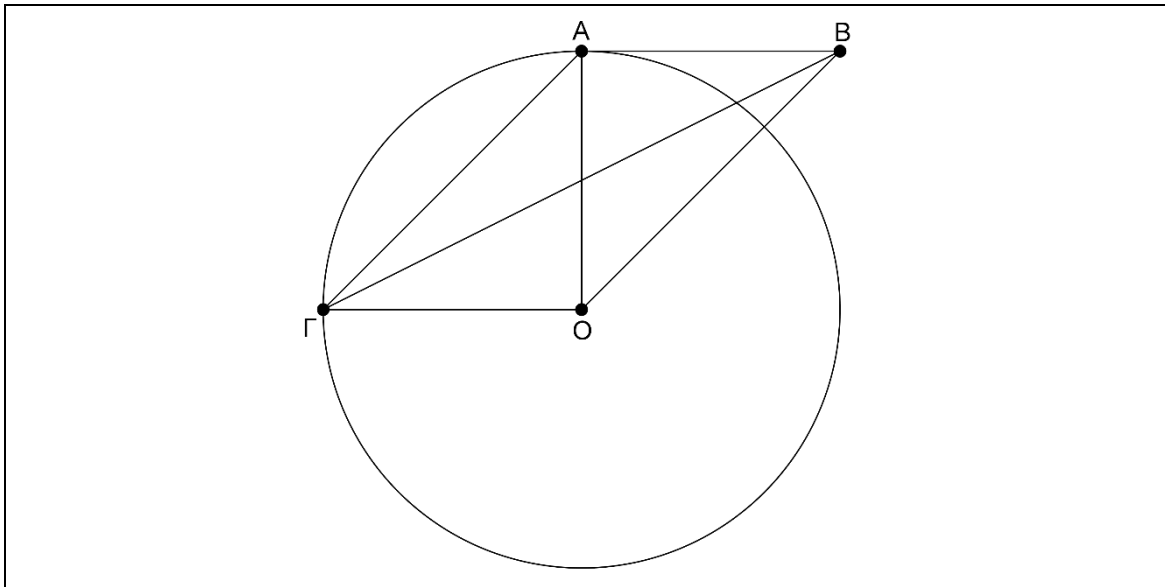
Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ. Θεωρούμε κάθετες ακτίνες OA, OΓ και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα AB με $AB = OΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AO και BΓ διχοτομούνται.

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ABOΓ.

Μονάδες 15

**Λύση**

α) Δύο ευθείες κάθετες σε μία άλλη ευθεία σε διαφορετικά της σημεία είναι μεταξύ τους παράλληλες

Οπότε :

$$AB \perp AO \text{ και } OG \perp AO \text{ άρα } AB \parallel OG \text{ (1)}$$

Ακόμα $AB = OG = r$ (2) επομένως το ΑΒΟΓ είναι παραλληλόγραμμο εφόσον δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες επομένως οι διαγώνιες του ΑΟ, ΒΓ διχοτομούνται.

β) Το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Άρα $\angle A\Gamma O = 45^\circ$ οπότε και $\angle OBA = 45^\circ$ (απέναντι γωνίες παραλληλόγραμμου)

$$\angle \Gamma AB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \text{ και } \angle \Gamma OB = 135^\circ.$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5637)

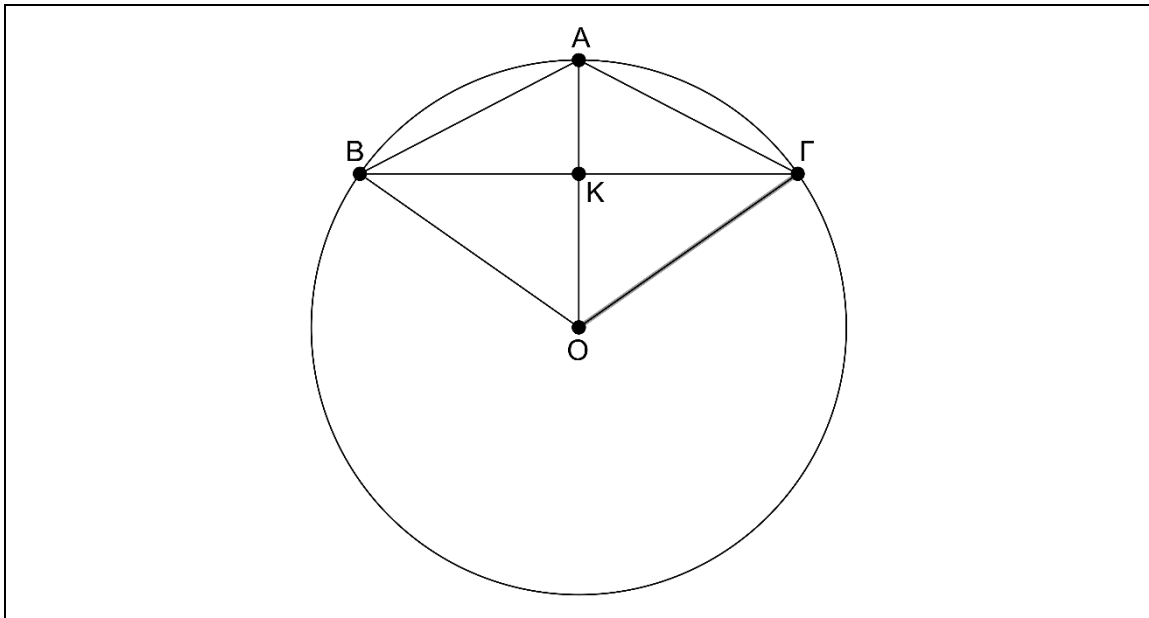
Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα r . Θεωρούμε την ακτίνα ΟΑ και τη χορδή ΒΓ κάθετη στην ΟΑ στο μέσο της Μ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΟΒ είναι ρόμβος.

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΓΟΒ.

Μονάδες 15

**Λύση**

α) Η ευθεία ΒΓ είναι μεσοκάθετος της ΟΑ διότι Μ μέσο της ΟΑ και οι ΒΓ,ΟΑ τέμνονται κάθετα με βάση τα δεδομένα της άσκησης.

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του, δηλαδή

$$BO = BA = \rho \text{ και } \Gamma A = \Gamma O = \rho.$$

Άρα το τετράπλευρο ΑΒΟΓ είναι ρόμβος εφόσον έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

β) Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΓΑΟ είναι ισόπλευρα επομένως $B = \Gamma = 60^\circ$.

Το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι $(2n - 4) \cdot 90^\circ$

Άρα

$$A + \Gamma + O + B = 360^\circ \Rightarrow A + O = 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ \Leftrightarrow A + O = 240^\circ$$

Και επειδή $A = O$ ως απέναντι γωνίες ρόμβου άρα καθεμία είναι 120°

*Θεωρώ Α,Γ,Ο,Β τις εσωτερικές γωνίες του ρόμβου.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5638)

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma = (AB = A\Gamma)$. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το Α φέρνουμε τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $BD = GE$

Μονάδες 10

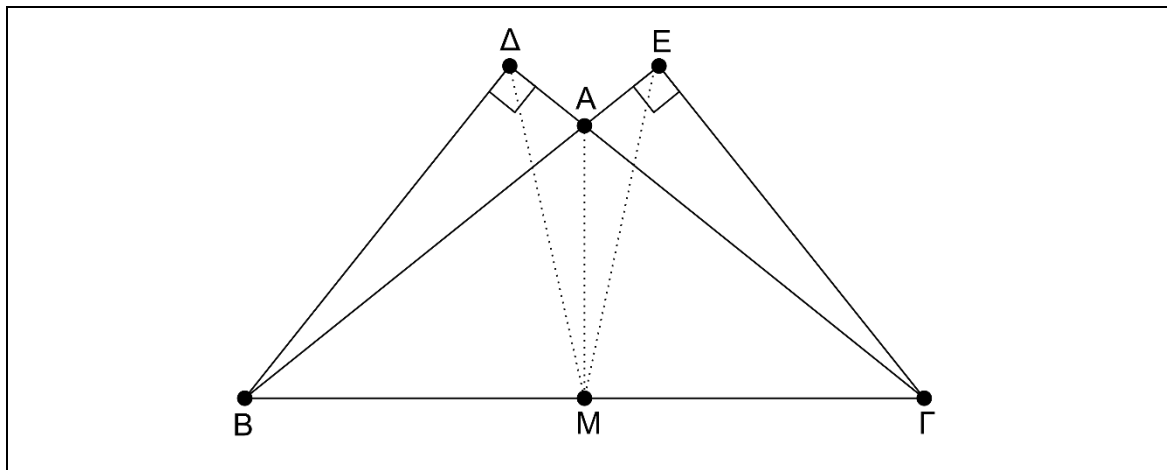
β) Αν Μ το μέσο της ΒΓ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $MD = ME$.

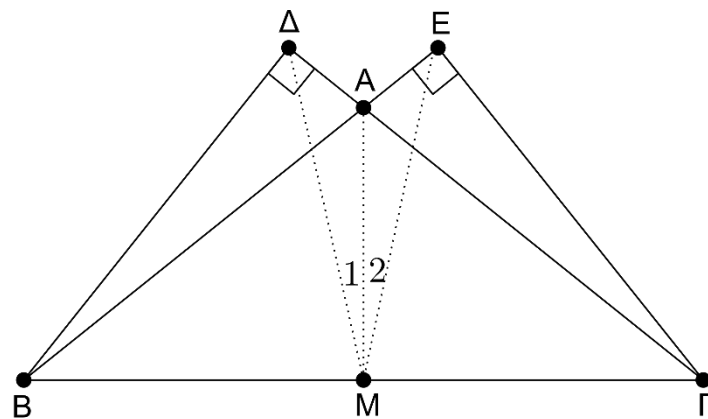
Μονάδες 8

ii. Να αποδείξετε ότι η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία ΔΜΕ

Μονάδες 7



Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΓΔΒ και ΒΕΓ έχουν:

(1^ο στοιχείο) ΓΒ = ΓΒ κοινή πλευρά(2^ο στοιχείο) Γ = Β προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς.

Έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία

Άρα είναι ίσα επομένως $\boxed{B\Delta = \Gamma E}$

β) (i) Στο ορθογώνιο ΒΔΓ η ΔΜ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα

ΒΓ άρα ισούται με το μισό της δηλαδή $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2}$ (1)

Επίσης στο ορθογώνιο ΓΕΒ η ΕΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα οπότε

$$EM = \frac{B\Gamma}{2} \cdot (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε

$$\Delta M = EM.$$

ii) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΔΑΜ και ΕΑΜ τα οποία έχουν

(1^ο στοιχείο) ΑΜ=ΑΜ κοινή πλευρά(2^ο στοιχείο) ΔΜ=ΕΜ (συμπέρασμα του προηγούμενου ερωτήματος)(3^ο στοιχείο) ΔΑ=ΕΑ (διαφορές ίσων ευθυγράμμων τμημάτων)Εξήγηση του (3^{ου} στοιχείου)

$\Delta\Gamma = EB$ (από τη σύγκριση των τριγώνων στο (α) ερώτημα) και $A\Gamma = AB$ ($AB\Gamma$ ισοσκελές με βάση $B\Gamma$) άρα και $\Delta\Gamma - A\Gamma = EB - AB$ δηλαδή $A\Delta = EA$

Άρα από κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε $M_1 = M_2$ οπότε η AM διχοτομεί τη γωνία ΔME

Β-τρόπος για β(ii)

- ii) Συγκρίνω τα τρίγωνα $BM\Delta$ και $ME\Gamma$ τα οποία έχουν
 (1^ο στοιχείο) $B\Delta = \Gamma E$ (από συμπέρασμα προηγούμενου ερωτήματος)
 (2^ο στοιχείο) $\Delta M = EM$ (από συμπέρασμα προηγούμενου ερωτήματος)
 (3^ο στοιχείο) $BM = M\Gamma$ (M μέσο της $B\Gamma$)

Άρα από κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα επομένως $M_1 = M_4$

Η AM είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ άρα είναι και ύψος επομένως

$$AMB = AM\Gamma \Leftrightarrow M_1 + M_2 = M_3 + M_4$$

και επειδή

$$M_1 = M_4 \text{ άρα } M_2 = M_3$$

οπότε η AM διχοτομεί τη γωνία ΔME

ΑΣΚΗΣΗ (2_5641)

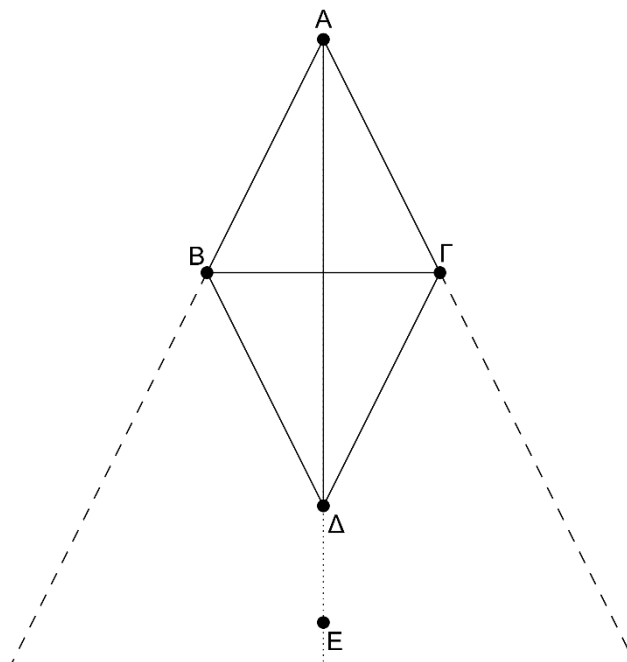
Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$. Στην προέκταση της διαγωνίου $A\Delta$ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο E ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ (προς το μέρος των B και Γ αντίστοιχα).

Μονάδες 10

β) Το σημείο E ισαπέχει από τα σημεία B και Γ .

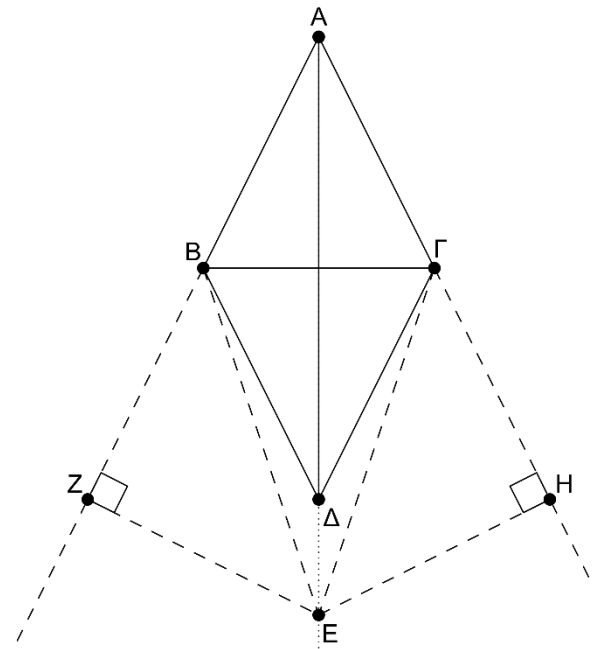
Μονάδες 15



Λύση

[lisari – team](#)

«Β Θέματα»



α) Είναι γνωστό ότι σε κάθε ρόμβο οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες.
 Άρα η AD διχοτόμος της γωνίας BAG .
 Επειδή κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και το E είναι ένα τέτοιο σημείο άρα το E ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών AB και AG .

β) Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται άρα η AD είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος $BΓ$.
 Γνωρίζουμε ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του και επειδή το E ανήκει στην μεσοκάθετο του $BΓ$ άρα $EB=EG$.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5644)

Έστω τρίγωνο $ABΔ$ με $A = 120^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα AEB και $AZΔ$.

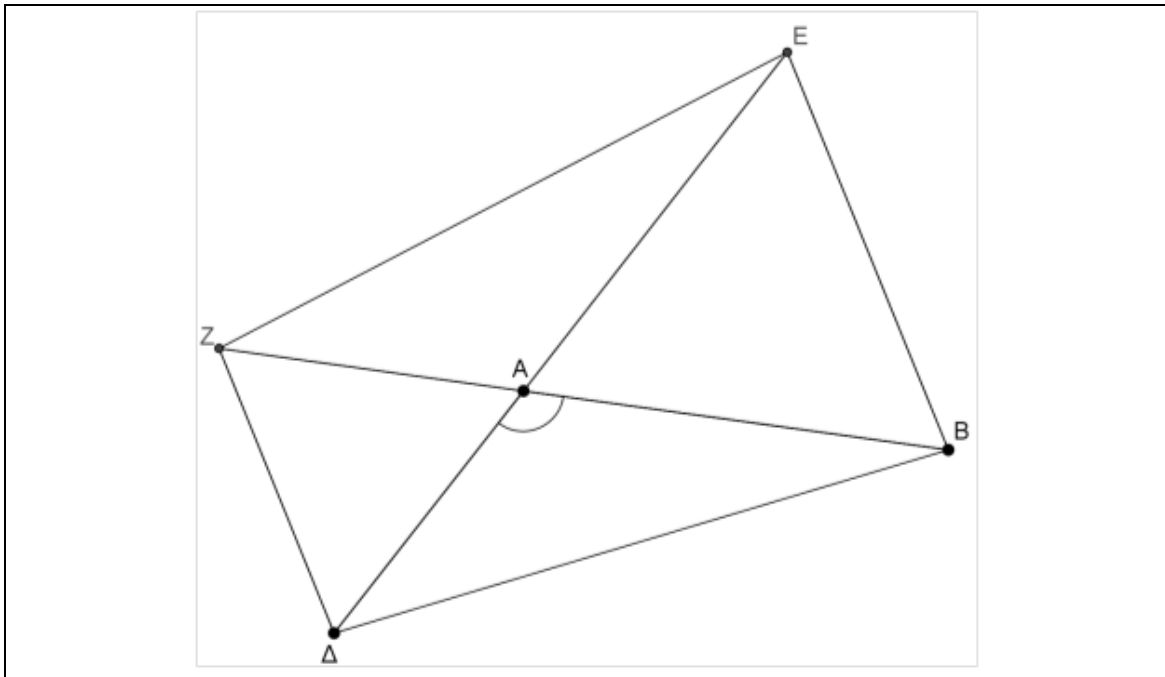
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AEZ και $ABΔ$ είναι ίσα.

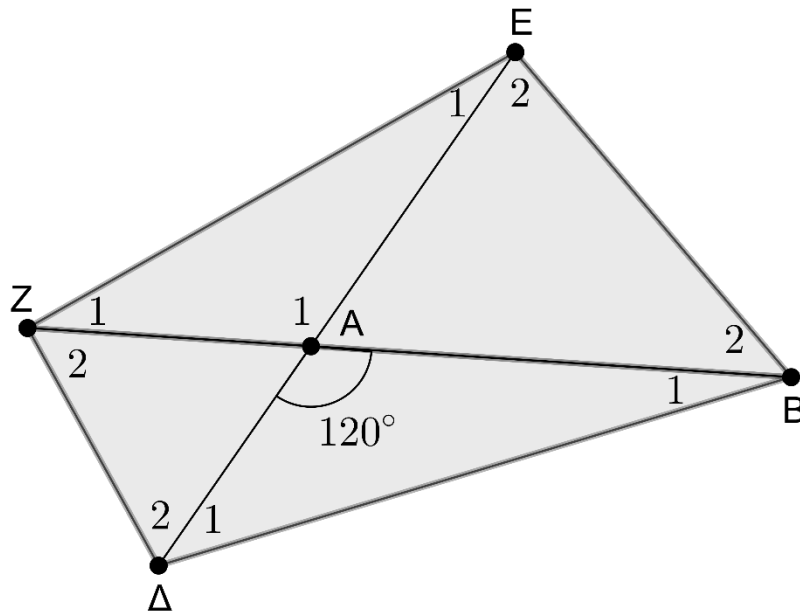
Μονάδες 12

β) Το τετράπλευρο $BΔZE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 13



Λύση



α) Τα τρίγωνα $\triangle AEZ$ και $\triangle A\Delta B$ έχουν
 (1° στοιχείο) $A\Delta = AZ$ ($\triangle AZ\Delta$ ισόπλευρο)
 (2° στοιχείο) $AB = AE$ ($\triangle AEB$ ισόπλευρο)
 (3° στοιχείο) $\angle A\Delta B = \angle ZAE$ (κατακορυφήν)
 Άρα από κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα

β) Από την σύγκριση προκύπτει ότι $\boxed{ZE = \Delta B}$ (1)

Ισχύει $\angle B_2 = \angle Z_2 = 60^\circ$ (γωνίες ισοπλεύρων τριγώνων) δηλαδή η EB με την $Z\Delta$ τεμνόμενες από την ZB σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες άρα $EB \parallel Z\Delta$
 Οπότε το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ έχει δύο πλευρές παράλληλες άρα είναι τραπέζιο και λόγω της (1) οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες άρα είναι ισοσκελές τραπέζιο .

Εξήγηση γιατί οι ZE και ΔB δεν είναι παράλληλες

Το τρίγωνο ABΓ είναι τυχαίο όπως προκύπτει από την εκφώνηση της άσκησης
 άρα τα ισόπλευρα τρίγωνα κατασκευάστηκαν από τις άνισες πλευρές του τριγώνου
 ABA οπότε οι διαγώνιοι του EBAZ δεν διχοτομούνται οπότε οι ZE και ΔB δεν
 μπορεί να είναι παράλληλες .

ΑΣΚΗΣΗ (2_5646)

Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε δύο διαμέτρους του AB και ΓΔ.

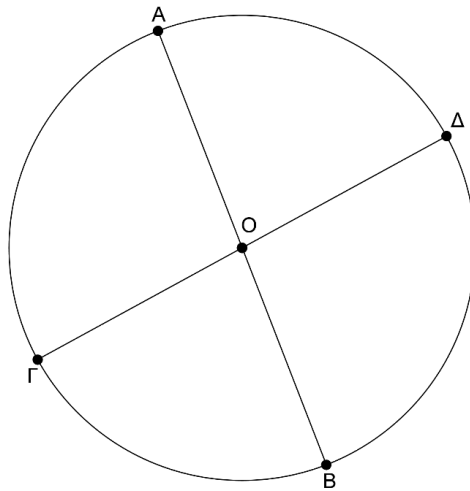
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι χορδές AΓ και BΔ του κύκλου είναι ίσες.

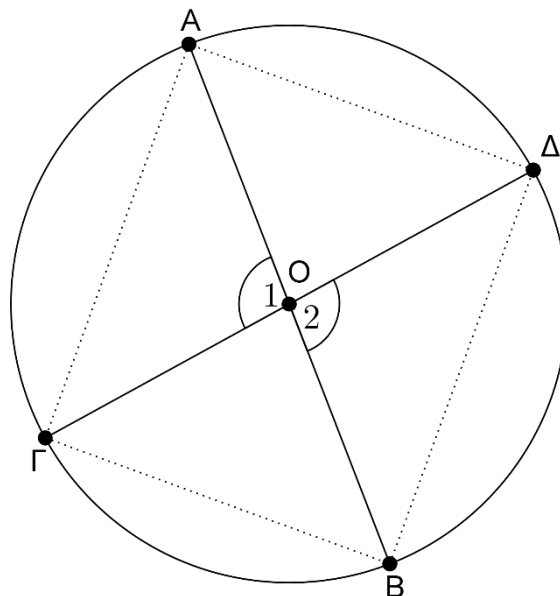
Μονάδες 13

β) Το τετράπλευρο AΓBΔ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 12



Λύση



α) Ισχύει $O_1 = O_2$ κατακορυφήν άρα και τα τόξα στα οποία βαίνουν οι γωνίες αυτές είναι ίσα όπως επίσης και οι αντίστοιχες χορδές δηλαδή $AΓ = BΔ$

β) Στο τετράπλευρο AΔΓB οι διαγώνιες του διχοτομούνται στο O
 «B Θέματα»

($AO=OB=OD=OG$ =ακτίνες του κύκλου) και είναι ίσες ως διαμέτροι του ίδιου κύκλου

$$AB = \Gamma\Delta = 2 \cdot \text{ακτίνα}$$

Άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5653)

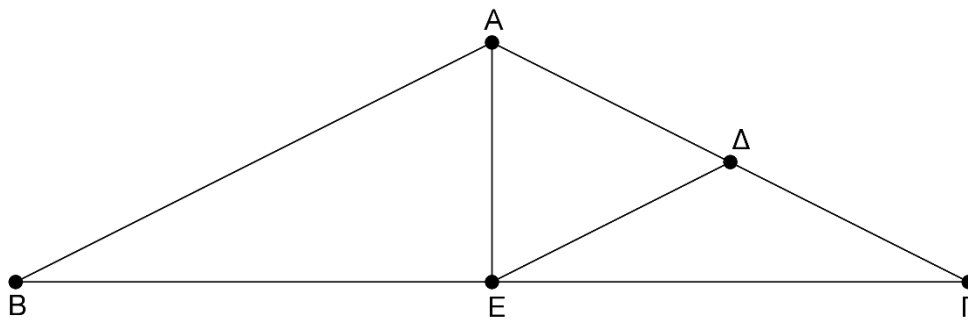
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, και γωνία $B = 30^\circ$. Θεωρούμε Δ και E τα μέσα τν $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

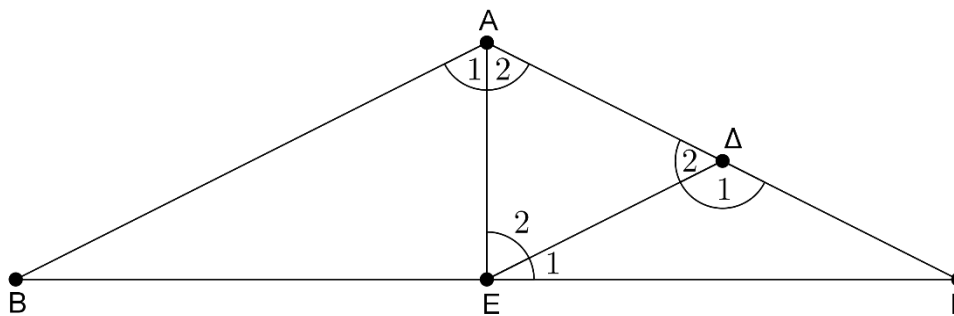
Μονάδες 16

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 9



Λύση



α) Το ευθύγραμμο τμήμα $E\Delta$ ενώνει τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα του τριγώνου $AB\Gamma$ άρα $\Delta E \parallel AB$ και $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$ όμως $AB = A\Gamma$ άρα

$$\Delta E = \frac{AB}{2} \Rightarrow \Delta E = \Delta\Gamma \text{ (εφόσον } \Delta \text{ μέσο του } A\Gamma)$$

άρα $E\Delta\Gamma$ ισοσκελές .

$B = E_1$ ως εντός –εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔE και AB που τέμνονται από την $B\Gamma$
και επειδή

$$B = 30^\circ$$

άρα

$$E_1 = 30^\circ (1)$$

και εφόσον $E\Delta\Gamma$ ισοσκελές $\Gamma = 30^\circ (2)$

Άρα

$$E_1 + \Gamma + \Delta_1 = 180^\circ \Rightarrow 30^\circ + 30^\circ + \Delta_1 = 180^\circ \Rightarrow \Delta_1 = 120^\circ$$

Άρα

$$\Delta_1 = 120^\circ \quad (3)$$

Από (1), (2) και (3) υπολογίστηκαν οι γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ .

β) Η γωνία Δ_2 είναι εξωτερική του τριγώνου ΔΕΓ άρα

$$\Delta_2 = E_1 + \Gamma \Leftrightarrow \Delta_2 = 30^\circ + 30^\circ \Leftrightarrow \Delta_2 = 60^\circ$$

Ισχύει $E\Delta = \Delta\Gamma$ και $\Delta\Gamma = \Delta B$ (Δ μέσο της ΑΓ) άρα $E\Delta = \Delta B$ άρα $E_2 = A_2$

Επομένως στο τρίγωνο ΑΕΔ ισχύει

$$A_2 + \Delta_2 + E_2 = 180^\circ \Rightarrow A_2 + 60^\circ + E_2 = 180^\circ \Rightarrow A_2 + E_2 = 120^\circ$$

και επειδή $E_2 = A_2$ άρα $E_2 = A_2 = 60^\circ$ επομένως το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισόπλευρο .

ΑΣΚΗΣΗ (2_5654)

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ (προς το Α) και την πλευρά ΔΓ (προς το Γ) κατά τμήματα $AE = AB$ και $\Gamma Z = \Delta\Gamma$.

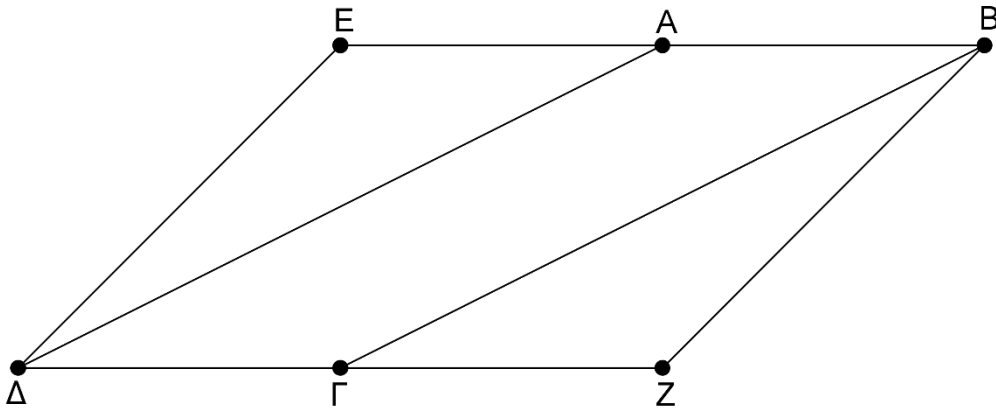
Να αποδείξετε ότι:

α) $BZ = E\Delta$

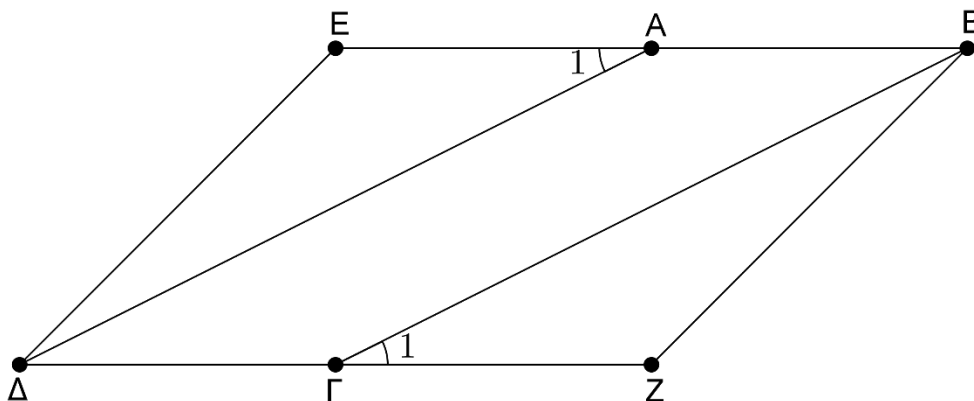
Μονάδες 13

β) Το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 12



Λύση



α) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ.

(1° στοιχείο) $AD = BG$ (απέναντι πλευρές παραλληλόγραμμου)

(2° στοιχείο) $AE = GZ$ (ίσες προεκτάσεις των ίσων πλευρών AB , GD αντίστοιχα του παραλληλογράμμου $ABGD$)

(3° στοιχείο) $\angle A_1 = \angle G_1$ (παραπληρωματικές των ίσων γωνιών A, G του παραλληλογράμμου $ABGD$).

Άρα $\Pi - \Gamma - \Pi$ ισχύει $\boxed{BZ = ED}$.

β) Ισχύει $EB = EA + AB = 2 \cdot AB$ (1) $\Delta Z = \Delta G + GZ = 2 \cdot GD$ (2)

και εφόσον $AB = GD$ από (1) και (2) προκύπτει $EB = \Delta Z$

Άρα το τετράπλευρο $EBZD$ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες ανά δύο οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

ΑΣΚΗΣΗ (2_6580)

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\angle A = 90^\circ$ και $B > \Gamma$ φέρουμε το ύψος του AD και την διάμεσο AM στην πλευρά $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

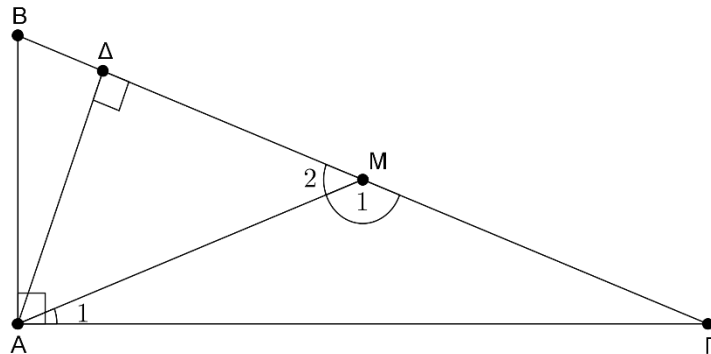
α) Οι γωνίες B και ΓAD είναι ίσες.

Μονάδες 12

β) $AM = 2 \cdot \Gamma$

Μονάδες 13

Λύση



α) Η γωνία ΓAD είναι συμπληρωματική της Γ στο τρίγωνο

$$\Delta A\Gamma: \Gamma + \Gamma AD = 90^\circ \quad (1)$$

Η γωνία B είναι συμπληρωματική της Γ στο τρίγωνο $AB\Gamma$:

$$\Gamma + B = 90^\circ \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει : $\boxed{\Gamma AD = B}$

(2ος τρόπος)

Οι γωνίες $\Gamma AD, B$ είναι ίσες ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες ,

Οι AG και η AD σχηματίζουν την ΓAD ενώ AB και η $B\Gamma$ σχηματίζουν την B

και ισχύει $ΑΓ \perp ΑΒ$, $ΑΔ \perp ΒΓ$

β) Η M_2 είναι εξωτερική του τριγώνου $ΑΜΓ$ άρα $M_2 = A_1 + \Gamma$ (1), όμως η $ΑΜ$ διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα $ΒΓ$ του ορθογωνίου τριγώνου άρα ισούται με το μισό της δηλαδή

$$ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΑΜ = ΜΓ \Leftrightarrow A_1 = \Gamma, \text{ άρα } ΑΜΔ = 2 \cdot \Gamma.$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_6582)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με $B = 60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη $ΑΕ$ και $ΒΖ$ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία $ΔΓ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma Z = \frac{ΑΔ}{2}.$

Μονάδες 8

β) Το τρίγωνο $ΑΔΕ$ είναι ίσο με το τρίγωνο $ΒΓΖ$

Μονάδες 9

γ) Το τετράπλευρο $ΑΒΖΕ$ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 8

Λύση



α) Έχουμε,

$\Gamma_1 = B$ εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ΑΒ, ΔΓ$ οι οποίες τέμνονται από την $ΒΓ$

άρα $\Gamma_1 = 60^\circ$.

Στο

ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΓΖ$:

$$\Gamma_1 + B_1 = 90^\circ \Leftrightarrow B_1 = 90^\circ - 60^\circ \Leftrightarrow B_1 = 30^\circ$$

Άρα εφόσον στο ορθογώνιο τρίγωνο $B_1 = 30^\circ$ τότε

$$\Gamma Z = \frac{ΒΓ}{2}$$

όμως $B\Gamma = A\Delta$ (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου) οπότε $\Gamma Z = \frac{A\Delta}{2}$

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ έχουν

(1° στοιχείο) $A\Delta = B\Gamma$ (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου)

(2° στοιχείο) $\Delta = \Gamma_1$ (εντός –εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $A\Delta, B\Gamma$ που τέμνονται από την $\Delta\Gamma$)

Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες και μια οξεία γωνία ίσες μία άρα είναι ίσα

γ) Από την προηγούμενη σύγκριση προκύπτει $AE = BZ$ επίσης ισχύει $AE \parallel BZ$ διότι είναι κάθετες στην ίδια ευθεία άρα το τετράπλευρο $AEBZ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο εφόσον έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες και μια ορθή γωνία .

ΑΣΚΗΣΗ (2_6583)

Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία N και K των AB $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AN = K\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) τα τρίγωνα $AN\Delta$ και $B\Gamma K$ είναι ίσα,

Μονάδες 8

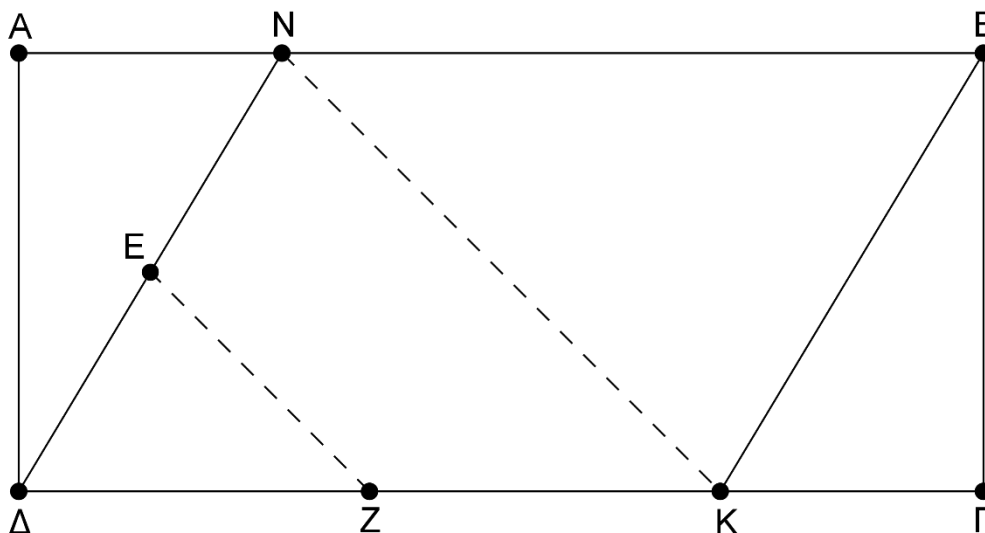
ii) το τετράπλευρο $NBK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 8

β) Αν E και Z είναι τα μέσα των $N\Delta$ και ΔK αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $NKZE$ είναι τραπέζιο.

Μονάδες 9

Λύση



α) (i) Τα τρίγωνα $AN\Delta$ και $B\Gamma K$ έχουν

(1° στοιχείο) $A = \Gamma = 90^\circ$ (γωνίες του ορθογωνίου παραλληλογράμμου)

(2° στοιχείο) $AD=BG$ (απέναντι πλευρές του ορθογωνίου παραλληλογράμμου)

(3° στοιχείο) $AN=KG$ (δεδομένο της εκφώνησης)

Άρα από κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα

(ii) Ισχύει

$$\begin{cases} AB = GD \\ AN = GK \end{cases} \Rightarrow AB - AN = GD - GK \Rightarrow BN = KD \quad (1)$$

Επίσης από την προηγούμενη σύγκριση των τριγώνων προκύπτει $DN=KB$ (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $NBKD$ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες επομένως είναι παραλληλόγραμμο.

β) Στο τρίγωνο DNK το ευθύγραμμο τμήμα EZ ενώνει τα μέσα των πλευρών DN και NK αντίστοιχα του τριγώνου DNK οπότε $EZ \parallel NK$.

Επίσης $NE \nparallel ZK$ διότι οι προεκτάσεις τους τέμνονται στο σημείο Δ .

Άρα το τετράπλευρο $NEZK$ έχει μόνο 2 πλευρές παράλληλες άρα είναι τραπέζιο.

ΑΣΚΗΣΗ (2_6585)

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 8$ και $\Delta\Gamma = 12$. Αν AH και $B\Theta$ τα ύψη του τραpezίου,

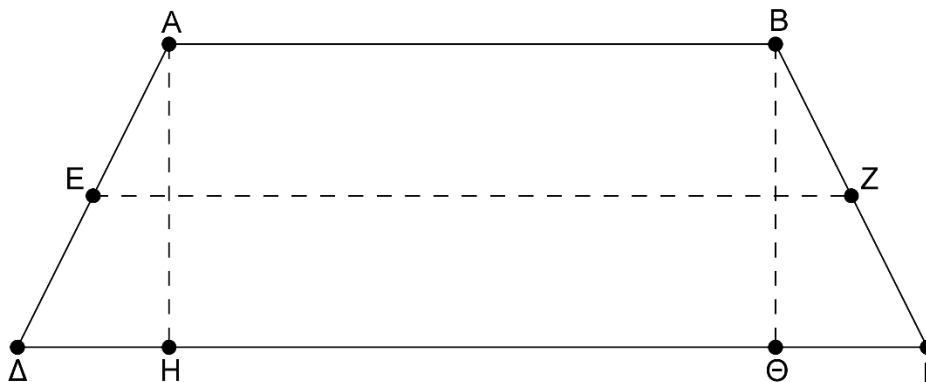
α) Να αποδείξετε ότι $\Delta H = \Theta\Gamma$.

Μονάδες 12

β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραpezίου..

Μονάδες 13

Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta H$ και $B\Theta\Gamma$ έχουν

(1° στοιχείο) $AD=BG$ (μη παράλληλες πλευρές ισοσκελούς τραpezίου)

(2° στοιχείο) $\Gamma = \Delta$ (προσκειμένες γωνίες ισοσκελούς τραpezίου)

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες και μια οξεία γωνία ίσες μια προς μία άρα είναι ίσα, οπότε και $\Delta H = \Theta\Gamma$.

β) Ως γνωστό η διάμεσος του τραpezίου ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων του δηλαδή

$$EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \Rightarrow EZ = \frac{12 + 8}{2} \Rightarrow EZ = 10$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_6590)

Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος έχουμε $AB = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$, $\Delta = 60^\circ$ και M το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$.

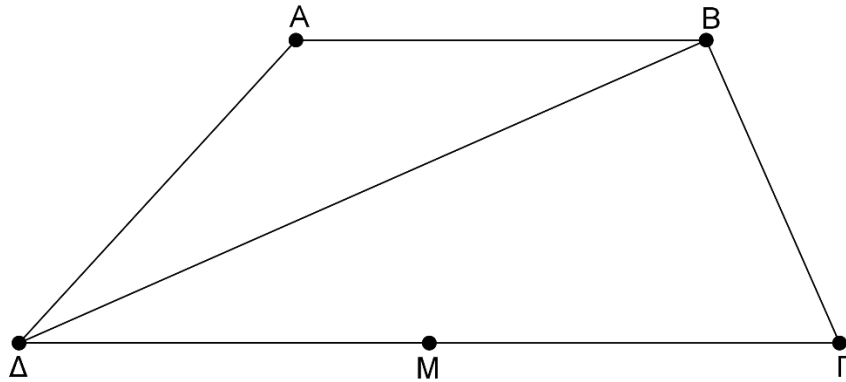
Να αποδείξετε ότι:

α) Η ΔB είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .

Μονάδες 9

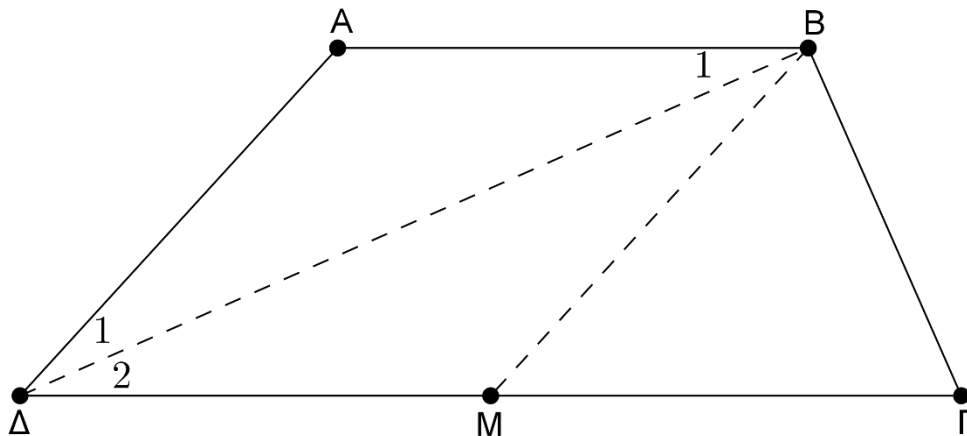
β) Η BM χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

Μονάδες 9

**Λύση**

α) Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές εφόσον ($AB = A\Delta$) άρα $\Delta_1 = B_1$ (1)

Επίσης $\Delta_2 = B_1$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Delta$. Από τις (1), (2) προκύπτει $\Delta_1 = \Delta_2$ δηλαδή η $B\Delta$ διχοτόμος της γωνίας Δ .



β) Φέρνουμε τη BM . Στο τετράπλευρο $ABM\Delta$ ισχύουν : $AB = \Delta M$

διότι από υπόθεση $AB = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ και Μ μέσο της $\Gamma\Delta$.

Επίσης $AB \parallel \Delta M$ εφόσον $AB\Gamma\Delta$ τραπέζιο άρα το τετράπλευρο $ABM\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο εφόσον έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες.

Όμως $AB = A\Delta$ (υπόθεση), δηλαδή έχει και δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες άρα είναι ρόμβος.

Η γωνία $BM\Gamma = \Delta = 60^\circ$ εντός –εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $A\Delta$, BM (απέναντι πλευρές ρόμβου) που τέμνονται από την $\Delta\Gamma$.

Επίσης $BM = M\Gamma$ δηλαδή το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές και η γωνία της κορυφής του είναι 60° άρα για τις προσκείμενες γωνίες οι οποίες είναι ίσες περισσεύουν 120° για να μοιραστούν άρα όλες οι γωνίες είναι 60° επομένως το τρίγωνο είναι ισόπλευρο

ΑΣΚΗΣΗ (2_6882)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και Μ το μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $M\Delta = MA$. Από το Α φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι :

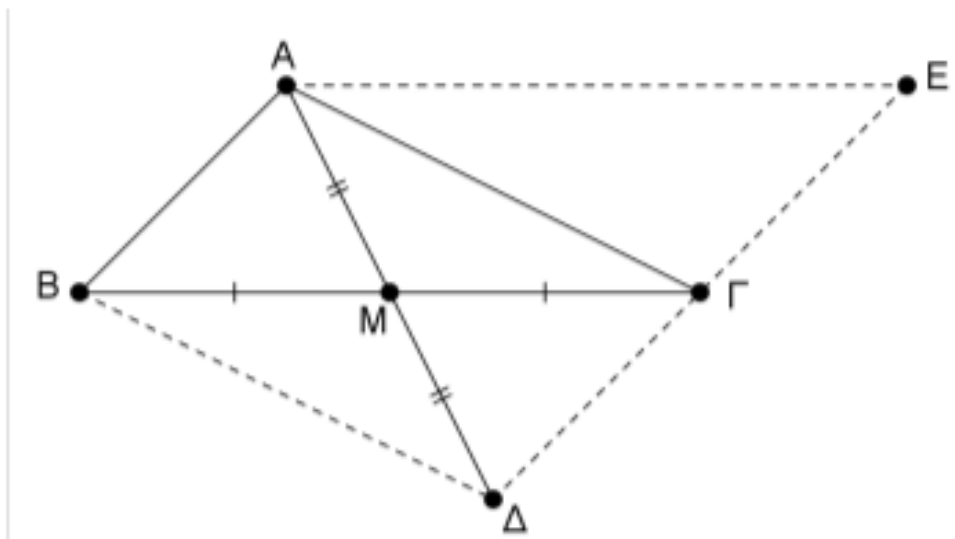
α) το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο,

(Μονάδες 12)

β) $BM = \frac{AE}{2}$

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ



α) Επειδή $AM = M\Delta$ και $BM = M\Gamma$, τότε στο τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ οι διαγώνιοι διχοτομούνται, οπότε το $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Επειδή $AB\Delta\Gamma = \text{παρ/μο}$, τότε $\Delta\Gamma \parallel AB$, οπότε θα έχουμε επίσης και $\Gamma E \parallel AB$.

Άρα $AB\Gamma E$ παραλληλόγραμμο, οπότε,

$$B\Gamma = AE \Rightarrow 2BM = AE \Rightarrow BM = \frac{AE}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_6885)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma < AB$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = A\Gamma$ και στην προέκταση της BA (προς το A) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι :

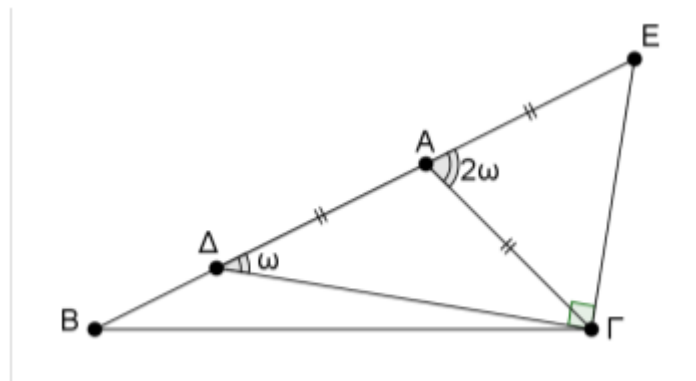
α) $\Delta\Gamma \perp E\Gamma$

(Μονάδες 12)

β) η γωνία EAG είναι διπλάσια της γωνίας $A\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ



α) Στο τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ έχουμε,

$$A\Gamma = A\Delta = AE \Rightarrow A\Gamma = \frac{\Delta E}{2} \Rightarrow E\Gamma\Delta = 90^\circ \Rightarrow \Delta\Gamma \perp E\Gamma$$

β) Επειδή

$$A\Gamma = A\Delta, \text{ τότε } A\Gamma\Delta = A\Delta\Gamma \text{ (1).}$$

Όμως η γωνία EAG είναι εξωτερική του τριγώνου $A\Gamma\Delta$, οπότε

$$EAG = A\Gamma\Delta + A\Delta\Gamma \stackrel{(1)}{\Rightarrow} EAG = 2 A\Delta\Gamma$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_7452)

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{B} = 120^\circ$ και $\Delta E \perp B\Gamma$. Έστω EZ η διάμεσος του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

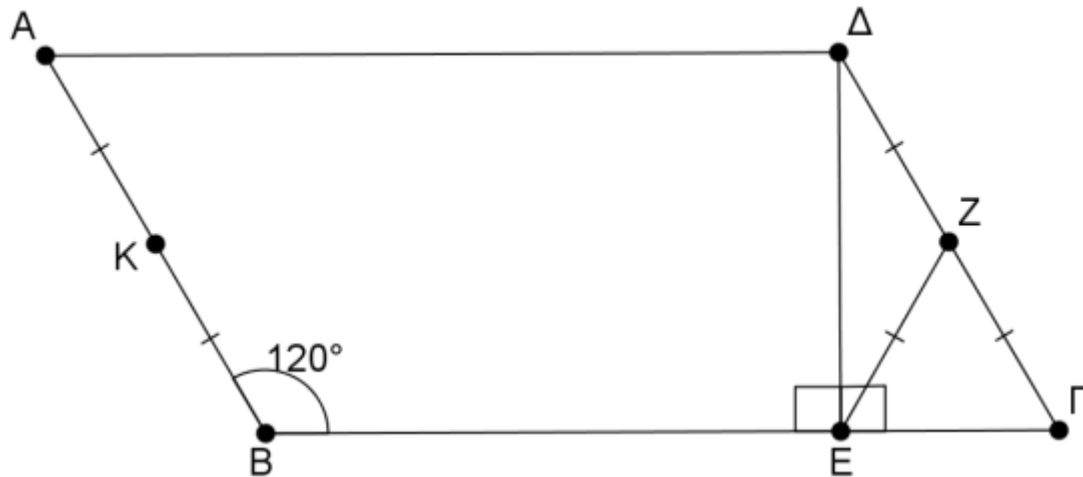
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες A και Γ του παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 8)

β) Αν K είναι το μέσο της πλευράς AB , να αποδείξετε ότι $EZ = AK$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $EZ\Gamma$.

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι $\hat{A} = 180^\circ - \hat{B}$ ως παραπληρωματική στο παραλληλόγραμμο ABΓΔ, οπότε

$$\hat{A} = 60^\circ$$

Επίσης ισχύει $\hat{\Gamma} = \hat{A} = 60^\circ$ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΓ έχουμε ότι η ΕΖ αποτελεί τη διάμεσο προς την ΔΓ, οπότε,

$$EZ = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = AK$$

γ) Επειδή $EZ = \frac{\Delta\Gamma}{2} = Z\Gamma$ συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΕΖΓ είναι ισοσκελές.

Άρα ισχύει,

$$\hat{Z\epsilon\Gamma} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$$

και κατά συνέπεια :

$$\hat{EZ\Gamma} = 180^\circ - \hat{\Gamma} - \hat{Z\epsilon\Gamma} \Rightarrow \hat{EZ\Gamma} = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ \Rightarrow \hat{EZ\Gamma} = 60^\circ.$$

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

Κεφάλαιο 6ο

Εγγεγραμμένα σχήματα



ΑΣΚΗΣΗ (2_3413)

Στο ακόλουθο σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με την πλευρά ΑΒ.

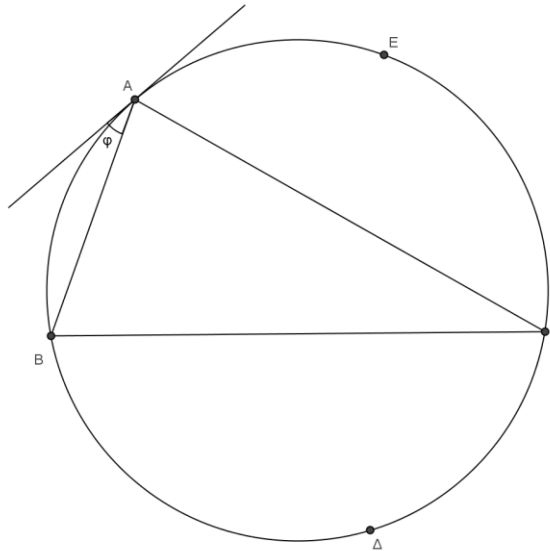
Αν το μέτρο του τόξου ΒΔΓ είναι 160° ,

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 18

β) να βρείτε το μέτρο του τόξου ΑΕΓ

Μονάδες 7

**ΛΥΣΗ**

α) Η $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $B\Delta\Gamma = 160^\circ$ οπότε

$$\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ \Leftrightarrow \boxed{\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 80^\circ}$$

Η γωνία $\varphi = 30^\circ$ είναι γωνία χορδής ΑΒ και της εφαπτόμενης και άρα θα ισούται με κάθε εγγεγραμμένη που βαίνει στην χορδή, άρα

$$\hat{\Gamma} = \hat{\varphi} = 30^\circ \Leftrightarrow \boxed{\hat{\Gamma} = 30^\circ}$$

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

$$\widehat{B\hat{A}\Gamma} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \boxed{\hat{B} = 70^\circ}$$

β) Η $\hat{B} = 70^\circ$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο ΑΕΓ οπότε

$$\hat{B} = \frac{\text{ΑΕΓ}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\text{ΑΕΓ} = 140^\circ}$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5009)

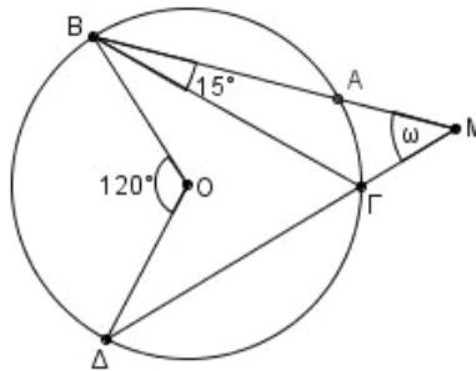
Στο ακόλουθο σχήμα η επίκεντρη γωνία ΒΟΔ είναι 120° και η γωνία ΓΒΑ είναι 15°

α) Να υπολογίσετε την γωνία ΒΓΔ

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ω είναι 45°

Μονάδες 13

**Λύση**

α) Η γωνία $B\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο ίδιο τόξο με την επίκεντρη γωνία $BO\Delta$ οπότε είναι

$$B\Gamma\Delta = \frac{BO\Delta}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

β) Η $B\Gamma\Delta$ είναι εξωτερική γωνία της $B\Gamma M$ στο τρίγωνο $BM\Gamma$ οπότε έχουμε

$$B\Gamma\Delta = BM\Gamma + \Gamma BM \Rightarrow 60^\circ = \omega + 15^\circ \Rightarrow \omega = 45^\circ$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5012)

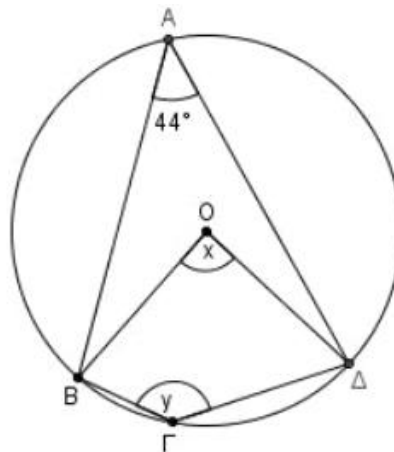
Σε κύκλο κέντρου O δίνονται οι χορδές AB και AD τέτοιες ώστε η γωνία $BA\Delta$ να είναι 44° . Θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου και σχηματίζουμε τετράπλευρο $B\Gamma\Delta O$

α) Να υπολογίσετε την γωνία x

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία y είναι 136°

Μονάδες 13

**Λύση**

α) Η γωνία x είναι επίκεντρη και βαίνει στο ίδιο τόξο $B\Delta$ που βαίνει και η εγγεγραμμένη γωνία $BA\Delta$ άρα είναι

$$x = 2\text{BA}\Delta = 2 \cdot 44^\circ = 88^\circ$$

β) Αφού $x = 88^\circ$ είναι $\text{B}\Gamma\Delta = 88^\circ$ άρα $\text{BA}\Delta = 360^\circ - \text{B}\Gamma\Delta = 360^\circ - 88^\circ = 272^\circ$

Η $\text{B}\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\text{BA}\Delta$ άρα

$$\text{B}\Gamma\Delta = \frac{\text{BA}\Delta}{2} = \frac{272^\circ}{2} = 136^\circ$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_5037)

Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε τρεις διαδοχικές ίσες γωνίες AOB , $\text{BO}\Gamma$ και GOA .

α) Να αποδείξετε ότι η προέκταση της ακτίνας AO διχοτομεί τη γωνία $\text{BO}\Gamma$.

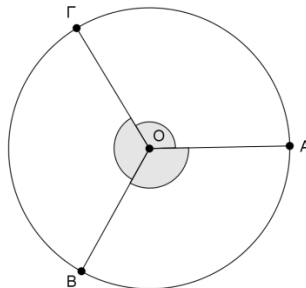
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $\text{AB}\Gamma$ ως προς τις πλευρές του.

(Μονάδες 8)

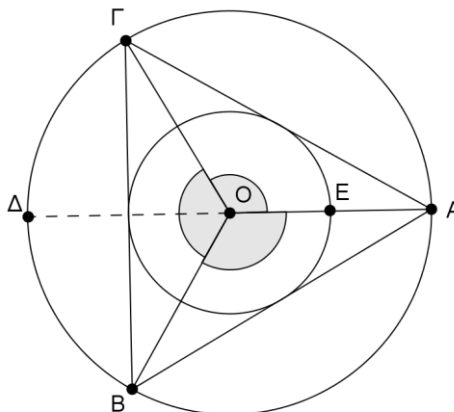
γ) Αν με κέντρο O και ακτίνα OK όπου K το μέσο της ακτίνας OA , γράψουμε έναν άλλο κύκλο που θα τέμνει τις ακτίνες OB και $\text{O}\Gamma$ στα σημεία Λ και M αντίστοιχα, τότε τα τόξα KM και AB είναι ίσα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Έστω Δ είναι το σημείο που η προέκταση της OA τέμνει τον κύκλο τότε οι γωνίες $\text{GO}\Delta$ και ΔOB είναι ίσες ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\text{AO}\Gamma$ και BOA αντίστοιχα. Άρα η $\text{O}\Delta$ διχοτομεί τη γωνία $\text{BO}\Gamma$.



β) Τα τόξα AB, BG, AG είναι ίσα γιατί και οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες είναι ίσες. Όμως σε ίσα τόξα αντιστοιχούν και ίσες χορδές άρα $AB = BG = GA$ δηλαδή το τρίγωνο ABG είναι ισόπλευρο.

γ) Τα τόξα AB και KM έχουν τις αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες ίσες. Όμως οι κύκλοι στους οποίους βρίσκονται αυτές οι γωνίες δεν είναι ίσοι, άρα τα τόξα δεν είναι ίσα.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5153)

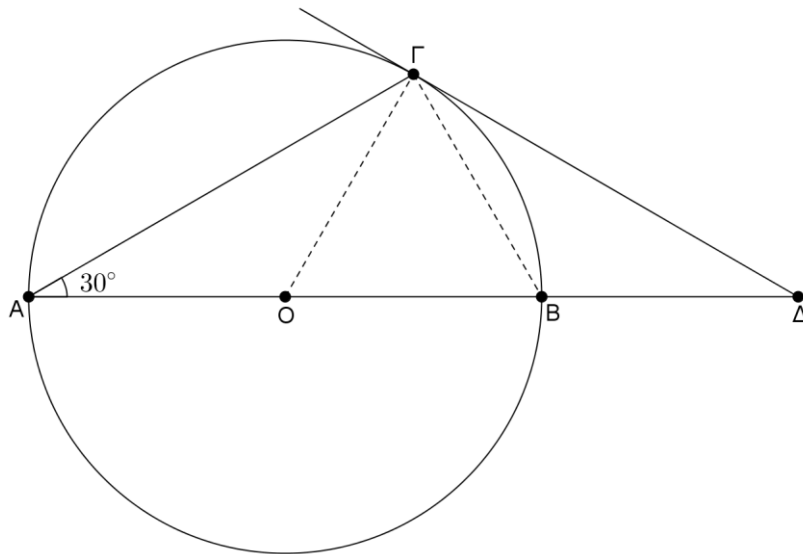
Δίνεται κύκλος (O, R) διαμέτρου AB , χορδή AG τέτοια ώστε $\widehat{BAG} = 30^\circ$. Στο σημείο G φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου AB (προς το B) στο σημείο Δ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $OΓΔ$.

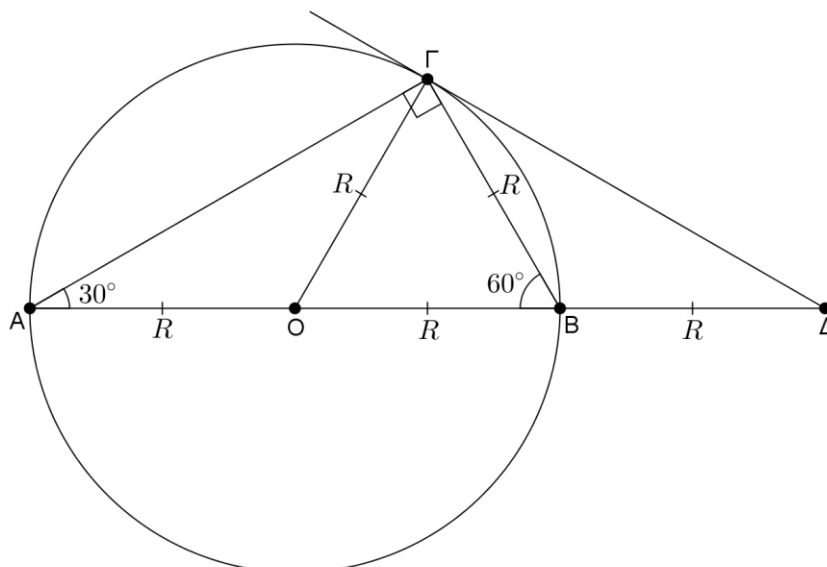
Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΟΓ$ και $ΓΒΔ$ είναι ίσα.

Μονάδες 13



ΛΥΣΗ



α) Η γωνία $\hat{A}\hat{G}B$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, οπότε είναι ορθή, δηλαδή $\hat{A}\hat{G}B = 90^\circ$, συνεπώς το τρίγωνο $A\Gamma B$ είναι ορθογώνιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Gamma B$ από άθροισμα γωνιών τριγώνου έχω :

$$\hat{A} + \hat{A}\hat{G}B + \hat{A}\hat{B}\Gamma = 180^\circ \Rightarrow 30^\circ + 90^\circ + \hat{A}\hat{B}\Gamma = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}\hat{B}\Gamma = 60^\circ$$

Επειδή $OA = OG = R$, το τρίγωνο OAG είναι ισοσκελές, άρα $\hat{A} = \hat{A}\hat{G}O = 30^\circ$ (1)

Επίσης στο τρίγωνο OAG η γωνία $\hat{G}\hat{O}\Delta$ είναι εξωτερική, άρα

$$\hat{G}\hat{O}\Delta = \hat{A} + \hat{A}\hat{G}O = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$$

Η OG είναι ακτίνα στο σημείο επαφής της εφαπτομένης $\Gamma\Delta$, άρα

$$OG \perp \Gamma\Delta \Rightarrow \hat{O}\hat{G}\Delta = 90^\circ$$

Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ από άθροισμα γωνιών τριγώνου έχουμε :

$$\hat{G}\hat{O}\Delta + \hat{O}\hat{G}\Delta + \hat{\Delta} = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + 90^\circ + \hat{\Delta} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Delta} = 30^\circ$$

β) Είναι

$$\hat{A}\hat{G}B = 90^\circ \Rightarrow \hat{A}\hat{G}O + \hat{O}\hat{G}B = 90^\circ \Rightarrow 30^\circ + \hat{O}\hat{G}B = 90^\circ \Rightarrow \hat{O}\hat{G}B = 60^\circ$$

και επειδή $\hat{G}\hat{O}\Delta = 60^\circ$, το τρίγωνο $O\Gamma B$ είναι ισόπλευρο, οπότε $OG = \Gamma B = OB = R$ (2)

Επίσης

$$\hat{O}\hat{G}\Delta = 90^\circ \Rightarrow \hat{O}\hat{G}B + \hat{B}\hat{G}\Delta = 90^\circ \Rightarrow 60^\circ + \hat{B}\hat{G}\Delta = 90^\circ \Rightarrow \hat{B}\hat{G}\Delta = 30^\circ$$
 (3)

Είναι

$$\hat{G}\hat{O}\Delta + \hat{A}\hat{O}\Gamma = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + \hat{A}\hat{O}\Gamma = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}\hat{O}\Gamma = 120^\circ$$
 (4)

Όμοια

$$\hat{B}\hat{G}\Delta + \hat{A}\hat{B}\Gamma = 180^\circ \Rightarrow \hat{B}\hat{G}\Delta + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B}\hat{G}\Delta = 120^\circ$$
 (5)

Συγκρίνω τα τρίγωνα $AO\Gamma$ και $\Gamma B\Delta$ τα οποία έχουν :

$$OG = \Gamma B = R \text{ (λόγω της (2))}$$

$$\hat{A}\hat{O}\Gamma = \hat{B}\hat{G}\Delta = 120^\circ \text{ (λόγω των (4) και (5))}$$

$$\hat{A}\hat{G}O = \hat{B}\hat{G}\Delta = 30^\circ \text{ (λόγω των (1) και (3))}$$

Τα τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες μια προς μια ίσες, άρα θα είναι ίσα.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5608)

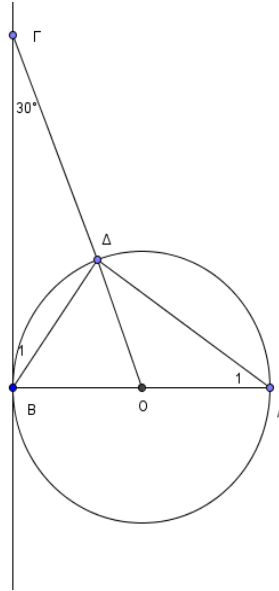
Θεωρούμε κύκλο (O, ρ) και διάμετρο του AB . Στην εφαπτομένη του κύκλου στο B θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε, η γωνία $B\hat{G}O$ να είναι ίση με 30° . αν η OG τέμνει τον κύκλο στο Δ να αποδείξετε ότι:

α) $OG = 2OA$

Μονάδες 12

β) $B\Gamma = A\Delta$

Μονάδες 13

**Λύση**

α) Είναι γνωστό ότι: «η ακτίνα ενός κύκλου είναι κάθετη στην εφαπτομένη του στο σημείο επαφής».

Δηλαδή $OB \perp GB$ άρα το τρίγωνο $BO\Gamma$ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την $O\Gamma$.

Επειδή $\Gamma_1 = 30^\circ$ (αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του είναι 30° τότε η απέναντι κάθετη πλευρά του ισούται με το μισό της υποτείνουσας) τότε $OB = \frac{1}{2}O\Gamma$ και επειδή

$OA = OB$ (ακτίνες του ίδιου κύκλου) ,προκύπτει $OA = \frac{1}{2}O\Gamma \Leftrightarrow \boxed{2OA = O\Gamma}$

β) Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $OB\Gamma$ και $A\Delta B$ έχουμε:

- είναι ορθογώνια ($OB \perp BG$ και $A\Delta B = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο)
- $OB = B\Delta = \rho$ (η $B\Delta$ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου

$OB\Gamma$ και άρα $B\Delta = \frac{O\Gamma}{2} = \frac{2\rho}{2} = \rho$) και

- $O\Gamma = AB = 2\rho$ (διάμετροι του κύκλου)

Τα ορθογώνια τρίγωνα $OB\Gamma$ και $A\Delta B$ έχουν ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά και συνεπώς είναι ίσα. Οπότε και οι τρίτες πλευρές τους είναι ίσες. Δηλαδή $B\Gamma = A\Delta$.

ΑΣΚΗΣΗ (2_5623)

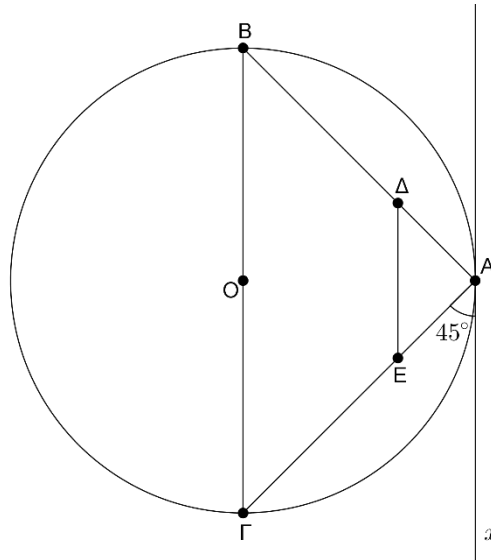
Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου $B\Gamma$. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του A ώστε να σχηματίζει με τη χορδή $A\Gamma$ γωνία 45° . Φέρουμε επίσης μια παράλληλη ευθεία στη $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Δ και την $A\Gamma$ στο E .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $BA\Gamma$.

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

Μονάδες 15

**Λύση**

α) Θεωρούμε A, B, Γ τις εσωτερικές γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ και A, Δ, E τις εσωτερικές γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$.

Η $BA\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο ($B\Gamma$ διάμετρος του κύκλου) επομένως

$$BA\Gamma = 90^\circ$$

Η γωνία ΓAx σχηματίζεται από τη χορδή $A\Gamma$ του κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο A της χορδής και η γωνία B εγγεγραμμένη στο τόξο $A\Gamma$.

Άρα

$$\Gamma Ax = B = 45^\circ$$

Οι γωνίες B, Γ είναι συμπληρωματικές οπότε

$$\begin{cases} B + \Gamma = 90^\circ \\ B = 45^\circ \end{cases} \Rightarrow \Gamma = 45^\circ$$

β) Το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο διότι $B\Gamma \parallel \Delta E$ (από τα δεδομένα) και $B\Delta, \Gamma E$ δεν είναι παράλληλες διότι οι προεκτάσεις τους τέμνονται στο A . Οι γωνίες B, Γ που είναι προσκείμενες στη βάση $B\Gamma$ του τραπεζίου είναι ίσες επομένως το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

Ακόμα $\Gamma = E$ (εντός εκτός και επί τα αυτά των παράλληλων $\Delta E, B\Gamma$ όπου τέμνονται από την $A\Gamma$). Άρα $E = 45^\circ$, επομένως $\Delta = 45^\circ$ εφόσον το τρίγωνο $A\Delta E$ ορθογώνιο στο A .

Οι γωνίες $\Delta E\Gamma, E\Delta B$ είναι παραπληρωματικές των ίσων γωνιών E, Δ επομένως

$$\Delta E\Gamma = E\Delta B = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_6587)

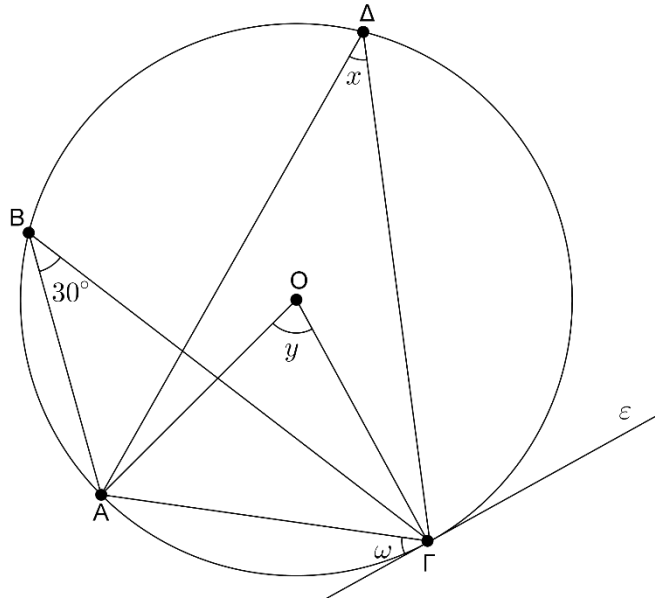
Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου (O, ρ) στο σημείο Γ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες x , y και ω δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

Μονάδες 15

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου OAG ως προς τις πλευρές.

Μονάδες 10

**Λύση**

α) Οι γωνίες $\Delta\Delta\Gamma$, $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένες του κύκλου και βαίνουν στο τόξο AG επομένως είναι ίσες, δηλαδή $x = 30^\circ$.

Η γωνία $AO\Gamma$ είναι επίκεντρη γωνία του κύκλου και βαίνει επίσης στο τόξο AG . Είναι γνωστό ότι «κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτή»

Άρα

$$\Delta\Delta\Gamma = \frac{1}{2} AO\Gamma \Rightarrow x = \frac{1}{2} y \Rightarrow y = 2 \cdot x \Rightarrow y = 60^\circ$$

Η γωνία ω που σχηματίζεται από τη χορδή AG και από την εφαπτομένη στο άκρο Γ της χορδής ισούται με κάθε εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής δηλαδή το AG . Άρα $\omega = 30^\circ$

β) Το τρίγωνο OAG είναι ισοσκελές διότι $OA=OG$ ως ακτίνες του κύκλου, όμως η γωνία της κορυφής του η y είναι ίση με 60° άρα $OA\Gamma + O\Gamma A = 120^\circ$ και επειδή $OA\Gamma = O\Gamma A$, προσκείμενες στη βάση AG του ισοσκελούς τριγώνου άρα $OA\Gamma = O\Gamma A = 60^\circ$ οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

ΑΣΚΗΣΗ (2_6588)

Έστω κύκλος κέντρου K , μια διάμετρος του $B\Gamma$ και σημείο A του κύκλου τέτοιο ώστε $BA = K\Gamma$. Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των B και Γ ,

Να αποδείξετε ότι:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BKA είναι ισόπλευρο.

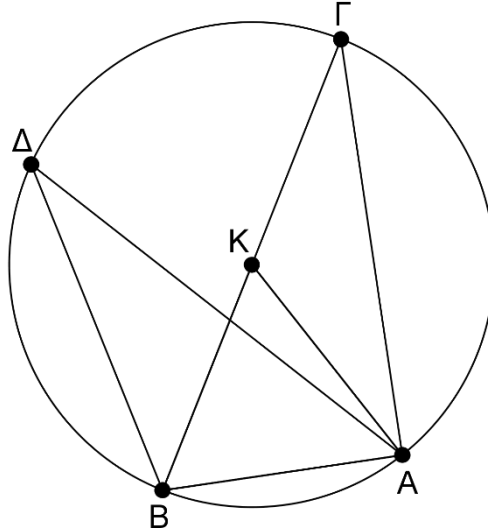
Μονάδες 7

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $B\Delta A$.

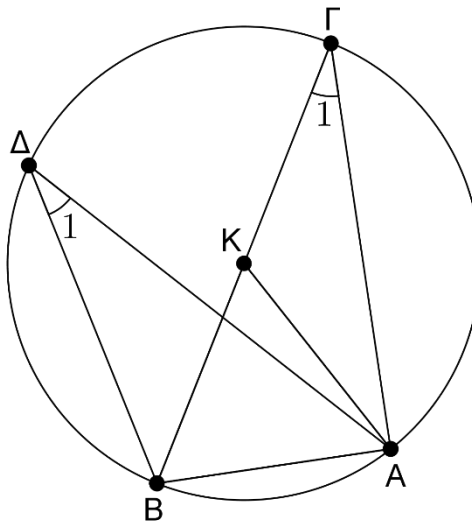
Μονάδες 9

γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες 9



Λύση



α) Έστω ρ η ακτίνα του δοθέντος κύκλου.

Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει ότι $AB = K\Gamma = \rho$ και επειδή $KB = KA = \rho$ το τρίγωνο KBA έχει τις πλευρές του ίσες επομένως είναι ισόπλευρο .

β) Η γωνία $B\Delta A$ είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο και βαίνει στο τόξο AB . Η γωνία BKA είναι επίκεντρη και βαίνει στο ίδιο τόξο . Ως γωνία ισοπλεύρου τριγώνου η γωνία BKA είναι 60° και επειδή η εγγεγραμμένη γωνία ενός κύκλου ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο άρα $B\Delta A = 30^\circ$

γ) Οι γωνίες Δ_1, Γ_1 είναι ίσες διότι είναι εγγεγραμμένες του ίδιου κύκλου και βαίνουν στο τόξο $A\Gamma$ επομένως $\Delta_1 = \Gamma_1 = 30^\circ$

Η $B\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου επομένως το τόξο $B\Gamma$ είναι ημικύκλιο.

Η εγγεγραμμένη γωνία $BA\Gamma$ βαίνει σε ημικύκλιο άρα είναι ορθή δηλαδή $BA\Gamma = 90^\circ$

Συνοψίζοντας $BA\Gamma = 90^\circ$, $\Gamma_1 = 30^\circ$ και $\Gamma BA = 60^\circ$ (γωνία του ισοπλεύρου τριγώνου KBA .)