

Γεωμετρία

Α' Λυκείου

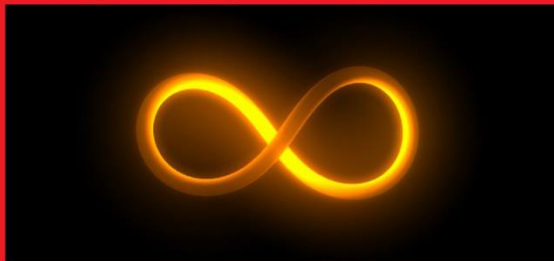
Τράπεζα

lisari team



Θεμάτων

Εκφωνήσεις-Λύσεις



η καλύτερη ομάδα λόγω team_ής

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς
των συνεργατών του δικτυακού τόπου

<http://lisari.blogspot.gr>

Έκδοση: 13 – 03 – 2015 (συνεχής ανανέωση)

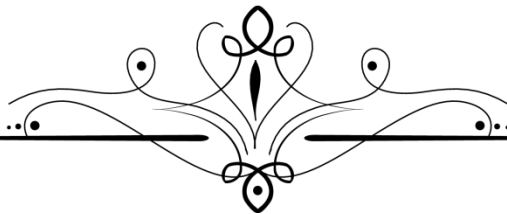
Το βιβλίο διατίθεται **αποκλειστικά**
από το μαθηματικό blog

<http://lisari.blogspot.gr>

Περιεχόμενα – «Δ θέματα»

Σελίδες

• Πρόλογος:	4
• Η ομάδα εργασιών	6
• Κεφάλαιο 3ο: Τρίγωνα	7
• Κεφάλαιο 4ο: Παράλληλες ευθείες	22
• Κεφάλαιο 5ο: Παραλληλόγραμμα – Τραπεζίες	36
• Κεφάλαιο 6ο: Εγγεγραμμένα σχήματα	220



Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο δίνονται όλες οι ασκήσεις της **Τράπεζας Θεμάτων** που αφορούν στην **Γεωμετρία της Α' Λυκείου** μαζί με τις λύσεις τους. Η παρουσίαση των λύσεων είναι κατά το δυνατόν αναλυτική έτσι, ώστε το αρχείο να μπορεί να διαβαστεί και να μελετηθεί εύκολα από τους μαθητές. Σε αρκετές περιπτώσεις οι λύσεις συνοδεύονται με αναφορές σε παρόμοιες ασκήσεις του σχολικού βιβλίου ή της τράπεζας θεμάτων καθώς και με κάποια στοιχεία θεωρίας ή ακόμα και μεθοδολογίας.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε από μια **διαδικτυακή** (και όχι μόνο) **ομάδα μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος. Η ομάδα συγκροτήθηκε από τους μαθηματικούς που ανταποκρίθηκαν στο κάλεσμα που απεύθυνε μέσα από το blog <http://lisari.blogspot.gr> ο ακούραστος **Μάκης Χατζόπουλος**. Εργάστηκε με μεράκι, κάτω από πίεση χρόνου, για να προσφέρει στην εκπαιδευτική κοινότητα, μαθητές και καθηγητές, το συγκεκριμένο υλικό.

Επιθυμία όλων μας είναι να συμβάλλουμε, έστω και ελάχιστα, στην **βελτίωση της διδασκαλίας** των μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, μέσα από την παροχή υποστηρικτικού υλικού στην ελληνική εκπαιδευτική κοινότητα.

Μετά την αρχική συγγραφή των λύσεων έγιναν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις για την όσο το δυνατό **ποιοτικότερη παρουσίαση**. Ζητούμε συγγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες οι οποίες ενδεχομένως θα έχουν διαλάβει της προσοχής μας, κάτι αναπόδραστο στην εκπόνηση μιας εργασίας τέτοιας έκτασης σε τόσο στενά περιθώρια χρόνου. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου το υλικό θα βελτιωθεί. Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

Η ομάδα του lisari

30 – 11 – 2014

lisari team

Αντωνόπουλος Νίκος (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου Κατεύθυνση - Άργος)
Αυγερινός Βασίλης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου ΔΙΑΤΑΞΗ - Ν. Σμύρνη και Νίκαια)
Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο ΒΕΛΑΩΡΑΣ - Λιβαδειά Βοιωτίας)
Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο Ευθύνη - Ρέθυμνο)
Γιαννόπουλος Μιχάλης (Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)
Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο Αστρολάβος - Άρτα)
Δούδης Δημήτρης (3^ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)
Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια Πουκαμισάς Γλυφάδας)
Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο Ώθηση - Αργυρούπολη)
Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο Παπαπαναγιώτου – Παπαπαύλου - Σέρρες)
Κανάβης Χρήστος (Διδακτορικό στο ΕΜΠ – 2ο ΣΔΕ φυλακών Κορυδαλλού)
Καρδαμίτσης Σπύρος (Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων)
Κοπάδης Θανάσης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίων 19+ - Πολύγωνο)
Κουλούρης Αντρέας (3^ο Λύκειο Γαλατσίου)
Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο Στόχος - Περιστερί)
Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο Ρηγάκης - Κοζάνη)
Μαρούγκας Χρήστος (3^ο ΓΕΛ Κηφισιάς)
Νάννος Μιχάλης (1^ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)
Νικολόπουλος Θανάσης (Λύκειο Κατασταρίου, Ζάκυνθος)
Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο Φάσμα - Αγρίνιο)
Παντούλας Περικλής (Φροντιστήρια Γούλα-Δημολένη - Ιωάννινα)
Παπαδομανωλάκη Μαρία (Ιδιοκτήτρια Πρότυπου Κέντρου Μάθησης ΔΙΑΚΡΙΣΙΣ - Ρέθυμνο)
Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός Ρόμβος)
Πορίχης Λευτέρης (Γυμνάσιο Λιθακιάς – Ζάκυνθος)
Ράπτης Γιώργος (6^ο ΓΕΛ Βόλου)
Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο Μπαχαράκης - Θεσσαλονίκη)
Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1^ο Λύκειο Χαλκίδας)
Σπλήνης Νίκος (Φροντιστήριο ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ - Ηράκλειο Κρήτης)
Σπυριδάκης Αντώνης (Γυμνάσιο Βιάννου - Λασιθί)
Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)
Σταυρόπουλος Σταύρος (Γραμματέας Ε.Μ.Ε Κορινθίας - Γυμνάσιο Α.Τ. Λέχαιου Κορινθίας)
Τηλέγραφος Κώστας (Φροντιστήριο Θεμέλιο - Αλεξανδρούπολη)
Τρύφων Παύλος (1^ο Εσπερινό ΕΠΑΛ Περιστερίου)
Φιλίππιδης Χαράλαμπος (Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί)
Χαραλάμπους Σταύρος (Μουσικό Σχολείο Λαμίας)
Χατζόπουλος Μάκης (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων)

Τράπεζα Θεμάτων Γεωμετρία Α' τάξης

20 Δεκεμβρίου 2014

Λύτες

Έλεγχος

Συντονιστής

Εξώφυλλο

Επιμελητής

Γιάννης Βελαώρας

Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης

Δημήτρης Δούδης

Βασίλης Κακαβάς

Γιάννης Κάκτανος

Σπύρος Καρδαμίτσης

Ανδρέας Κουλούρης

Χρήστος Κουσιέρης

Θόδωρος Παγώνης

Χρήστος Σίσινας

Κώστας Τηλέγραφος

Πάυλος Τρύφων

Σταύρος Χαραλάμπους

Μάκης Χατζόπουλος

Μιχάλης Νάννος

Χρήστος Μαρούγκας

Ανδρέας
Κουλούρης

Θανάσης

Νικολόπουλος

Μιχάλης Νάννος

Πρόλογος

Ανδρέας Κουλούρης

Μάκης

Χατζόπουλος

lisari team

η καλύτερη ομάδα λόγω team_ής!

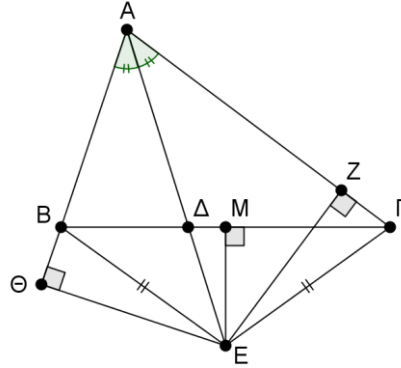
ΑΣΚΗΣΗ (4_2787)

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, η κάθετη από το μέσο M της $B\Gamma$ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου AD στο σημείο E . Αν Θ , Z είναι οι προβολές του E στις AB , AG , να αποδείξετε ότι :

α) Το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

β) Τα τρίγωνα ΘBE και ZGE είναι ίσα. (Μονάδες 8)

γ) $\hat{A}\Gamma E + \hat{A}\beta E = 180^\circ$ (Μονάδες 12)

**ΛΥΣΗ**

α) Επειδή στο τρίγωνο $B\Gamma E$ η ME αποτελεί την διάμεσο και το ύψος του τριγώνου, τότε συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

β) Για τα τρίγωνα ΘBE και ZGE ισχύει :

$$\left. \begin{array}{l} BE = GE \left(\hat{B}\hat{\Gamma}E : \text{ισοσκελές} \right) \\ \hat{B}\hat{\Theta}E = \hat{\Gamma}\hat{Z}E = 90^\circ \\ \Theta E = EZ \left(E : \text{σημείο διχοτ. } AE \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B}\hat{\Theta}E = \hat{\Gamma}\hat{Z}E$$

γ) Αφού αποδείξαμε ότι $\hat{B}\hat{\Theta}E = \hat{\Gamma}\hat{Z}E$ τότε θα ισχύει $\hat{A}\hat{\Gamma}E = \hat{A}\hat{\beta}E$ (1)

Άρα

$$\hat{A}\hat{\Gamma}E + \hat{A}\hat{\beta}E = \hat{\Theta}\hat{\beta}E + \hat{A}\hat{\beta}E = \hat{\Theta}\hat{\beta}A = 180^\circ.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ :

Για το α) ερώτημα χρησιμοποιούμε το πόρισμα iii) στη σελίδα 37.

Για το β) ερώτημα χρησιμοποιούμε το θεώρημα ii) στη σελίδα 45.

Παρόμοια άσκηση βιβλίου : Ασκήσεις Αποδεικτικές/σελ. 48.

ΑΣΚΗΣΗ (4_2788)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 50^\circ$, το ύψος του AD και σημείο E στην AD ώστε $DE = BA$. Το σημείο Z είναι η προβολή του Γ στην AE .

α) Να αποδείξετε ότι :

i) Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 6)

ii) $\hat{\Gamma\hat{A}E} = 10^\circ$

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ZΓΕ.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) i) Στο τρίγωνο ABE έχουμε την ΑΔ να είναι διάμεσος και ύψος, οπότε το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

ii) Επειδή το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές, τότε:

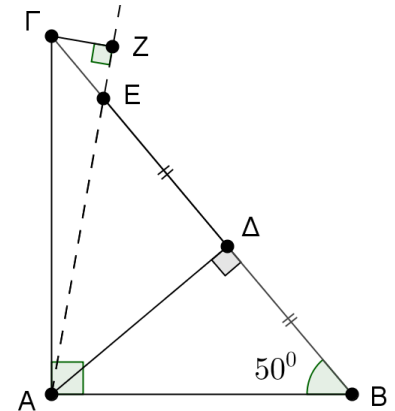
$$\hat{B} = \hat{AEB} = 50^\circ$$

Οπότε θα ισχύει :

$$\hat{EAB} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{AEB} \Leftrightarrow \hat{EAB} = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$$

Άρα θα έχουμε

$$\hat{\Gamma\hat{A}E} = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$$



β) Στο τρίγωνο ZΓΕ ισχύει :

$$\hat{\Gamma\hat{E}Z} = \hat{A\hat{E}\Gamma} = 50^\circ \quad (1) \quad (\text{ως κατακορυφήν})$$

Επίσης θα ισχύει :

$$\hat{E\hat{\Gamma}Z} = 180^\circ - \hat{Z} - \hat{\Gamma\hat{E}Z} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{E\hat{\Gamma}Z} = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ \Leftrightarrow \hat{E\hat{\Gamma}Z} = 40^\circ.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ :

Για το α) ερώτημα i) χρησιμοποιούμε το πόρισμα iii) στη σελίδα 37, ii) χρησιμοποιούμε το άθροισμα γωνιών τριγώνου.

ΑΣΚΗΣΗ (4_2796)

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο, και έστω ΑΒ μια διάμετρος του, Γ το μέσο του ενός ημικυκλίου ότι και Δ τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της ΔΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε ώστε ΒΕ = ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι :

i) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα.

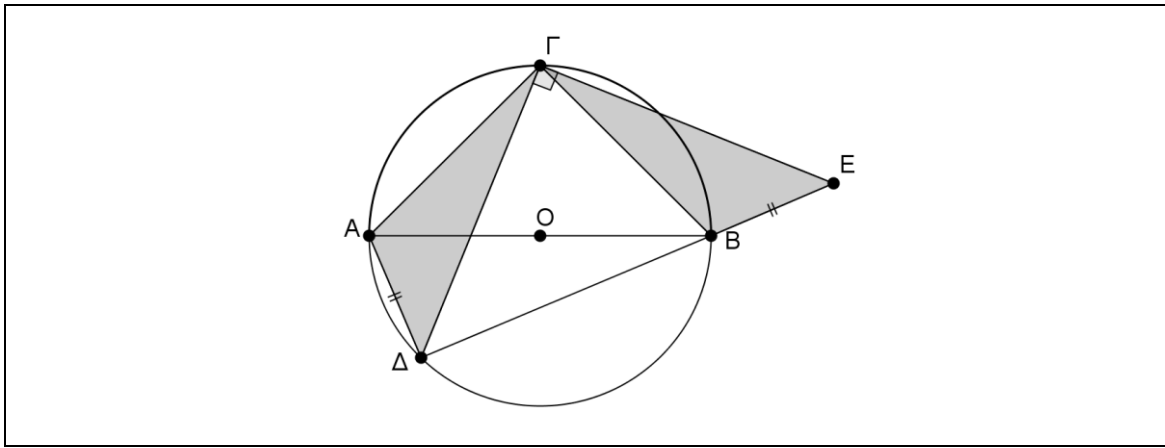
(Μονάδες 8)

ii) Η ΓΔ είναι κάθετη στην ΓΕ.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι το αντιδιαμετρικό του Γ, η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

(Μονάδες 9)

**ΛΥΣΗ**

α) i) Έχουμε ότι το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι εγγράψιμο, οπότε κάθε εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική, δηλ.

$$\widehat{\Gamma\beta\epsilon} = \widehat{\Gamma\alpha\Delta} \quad (1)$$

Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΓΒΕ έχω:

$$\left. \begin{array}{l} \text{ΑΔ} = \text{ΒΕ} \text{ (υπόθ.)} \\ \text{ΑΓ} = \text{ΒΓ} \text{ (ΑΓ} = \text{ΒΓ)} \\ \widehat{\Gamma\beta\epsilon} = \widehat{\Gamma\alpha\Delta} \text{ (1)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \widehat{\text{ΑΔΓ}} = \widehat{\text{ΒΕΓ}}$$

ii) Από την ισότητα τριγώνων ΑΔΓ, ΒΕΓ, έχουμε

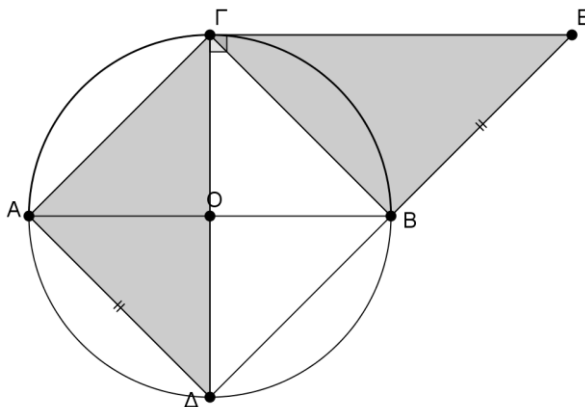
$$\widehat{\text{ΒΓΕ}} = \widehat{\text{ΑΓΔ}} \quad (2)$$

Οπότε :

$$\widehat{\text{ΔΓΕ}} = \widehat{\text{ΔΓΒ}} + \widehat{\text{ΒΓΕ}} \stackrel{(2)}{=} \widehat{\text{ΔΓΒ}} + \widehat{\text{ΑΓΔ}} = \widehat{\text{ΑΓΒ}} = 90^\circ \text{ (βαίνει σε ημικύκλιο)} \Leftrightarrow \text{ΔΓ} \perp \text{ΓΕ}.$$

β) Όταν τα Γ και Δ γίνονται αντιδιαμετρικά, τότε η ΟΓ αποτελεί ακτίνα του κύκλου.

Επιπλέον έχουμε ότι : $\text{ΔΓ} \perp \text{ΓΕ}$ οπότε η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου.



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ : Για το αι)ερώτημα χρησιμοποιούμε το 1^ο κριτήριο ισότητας τριγώνων στη σελ. 36. Παρόμοια άσκηση βιβλίου : αι) Ασκήσεις εμπέδωσης, αποδεικτικές /σελ. 38.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3694)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) και η διχοτόμος AD . Φέρουμε από το B κάθετη στην AD που τέμνει την AD στο E και την πλευρά $A\Gamma$ στο H . Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ABH είναι ισοσκελές.

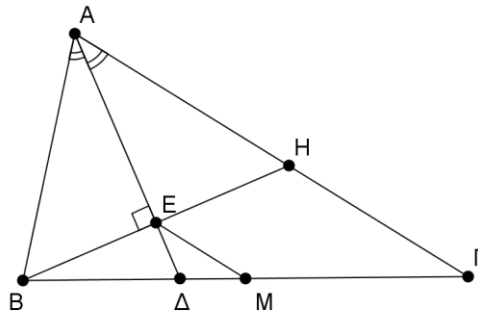
Μονάδες 9

β) $EM \parallel H\Gamma$

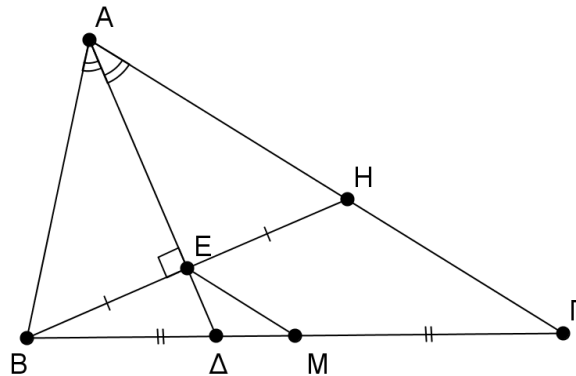
Μονάδες 8

γ) $EM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$

Μονάδες 8

**ΛΥΣΗ**

α) Στο τρίγωνο ABH η AE είναι ύψος και διχοτόμος, επομένως είναι ισοσκελές



β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ABH η AE είναι και διάμεσος, άρα το E είναι και μέσο της πλευράς BH . Στο τρίγωνο $BH\Gamma$ τα σημεία E και M είναι μέσα των πλευρών του επομένως είναι $EM \parallel H\Gamma$

γ) Στο τρίγωνο $HB\Gamma$ είναι

$$EM = \frac{H\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma - AH}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2}, \text{ αφού είναι } AH = AB$$

εφόσον το τρίγωνο ABH είναι ισοσκελές από το πρώτο ερώτημα.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3695)

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις πλευρές AG και AB αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές $AB = AG$, τότε τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες 10

β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να αποδείξετε ότι ισχύει.

Μονάδες 10

γ) Να διατυπώσετε την πρόταση Π και την αντίστροφή της ως ενιαία πρόταση.

Μονάδες 5

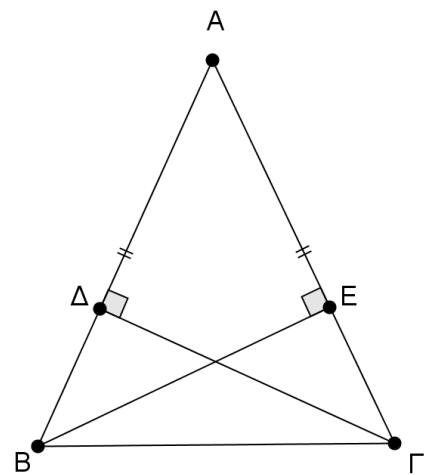
ΛΥΣΗ

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και ΓEB έχουν, την πλευρά $B\Gamma$ κοινή και τις γωνίες $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, εφόσον το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, επομένως είναι ίσα και θα είναι και $BE = \Gamma\Delta$, δηλαδή τα ύψη του ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

β) Αντίστροφη πρόταση « Αν σ' ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ τα ύψη του BE και $\Gamma\Delta$ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$ »

Απόδειξη της πρότασης:

Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και ΓEB έχουν την πλευρά υπόθεση, άρα είναι ίσα, τότε θα είναι και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, συνεπώς το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$.



γ) Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν, και μόνο αν, δύο ύψη του είναι ίσα.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3696)

Δίνεται οξεία γωνία $\hat{xOy}$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Ox στα σημεία K, A και την Oy στα Λ, B αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $AL = BK$.

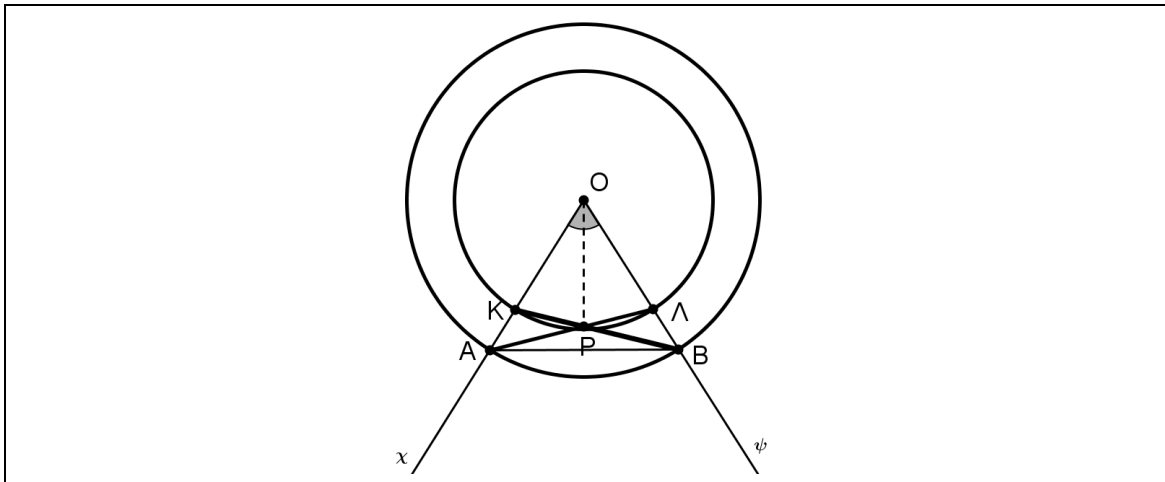
Μονάδες 8

β) Το τρίγωνο APB είναι ισοσκελές, όπου P το σημείο τομής των AL και BK .

Μονάδες 8

γ) Η OP διχοτομεί την γωνία $\hat{xOy}$.

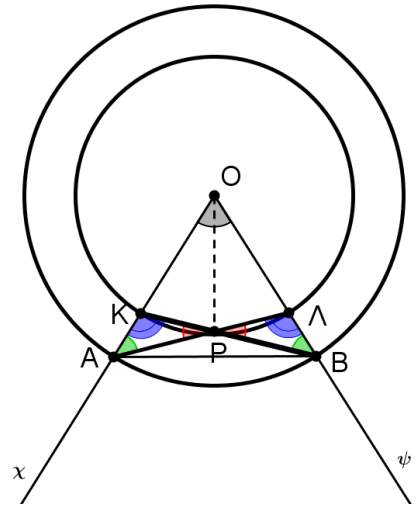
Μονάδες 9



ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΟΚΒ και ΟΑΛ έχουν, $ΟΑ = ΟΛ = \rho_1$ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, $ΟΒ = ΟΑ = \rho_2$ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου και την γωνία Ο κοινή γωνία. Επομένως είναι ίσα, τότε θα είναι και $ΑΛ = ΒΚ$.

β) Τα τρίγωνα ΚΑΡ και ΡΒΛ έχουν, $ΑΚ = ΒΛ$ ως διαφορά των ακτινών $ρ_1$ και $ρ_2$ των κύκλων, $\hat{\omega} = \hat{\phi}$, από την ισότητα των τριγώνων ΟΑΛ και ΟΚΒ του προηγούμενου ερωτήματος. Επιπλέον σε κάθε ένα από τα τρίγωνα ΚΑΡ και ΡΒΛ ισχύουν οι σχέσεις: $\hat{\omega} + \hat{P}_1 + \hat{K}_1 = \hat{\phi} + \hat{P}_2 + \hat{L}_1 = 180^\circ$ (εφόσον σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι 180°) είναι ακόμη $\hat{P}_1 = \hat{P}_2$ (ως κατά κορυφή) και $\hat{\omega} = \hat{\phi}$ οπότε από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΚΑΡ και ΡΒΛ είναι ίσα οπότε $ΡΑ = ΡΒ$, ισοσκελές.



γ) Τα τρίγωνα OAP και OBP έχουν, $OB = OA = \rho_2$, $PA = PB$ αφού από το προηγούμενο ερώτημα το τρίγωνο APB είναι ισοσκελές και η πλευρά OP είναι κοινή, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, επομένως θα είναι $\widehat{KOP} = \widehat{POL}$, επομένως είναι η OP διχοτόμος της γωνίας $\widehat{xOy}$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3721)

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε τις διαμέσους BA και AE . Μία ευθεία ε παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα Z και H αντίστοιχα και τις διαμέσους BA και AE στα σημεία Θ και K αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

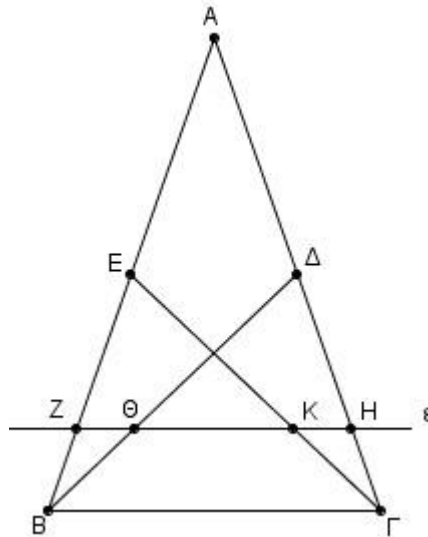
$$\alpha) \mathbf{BZ} = \mathbf{\Gamma H}$$

Μονάδες 8

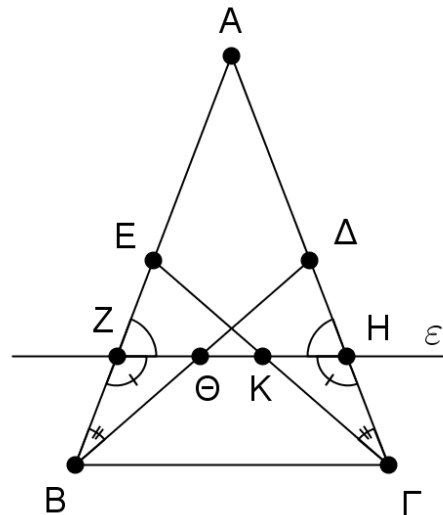
β) τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $HK\Gamma$ είναι ίσα.

Μονάδες 9

$$\gamma) \text{ ZK} = \mathbf{H}\Theta$$

**ΛΥΣΗ**

α) Αφού είναι $\varepsilon \parallel BG$ τότε $\hat{B} = \hat{AZH}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{AHZ}$, αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, θα είναι και $\hat{AZH} = \hat{AHZ}$, συνεπώς το τρίγωνο AZH είναι επίσης ισοσκελές άρα $AZ = AH$, τότε $BZ = \Gamma H$ ως διαφορές ίσων ευθυγράμμων τμημάτων.



β) Αρχικά τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AE\Gamma$ είναι ίσα γιατί έχουν την γωνία A κοινή,
 $AB = A\Gamma$ αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές
και $AE = A\Delta$ ως μισά των ίσων τμημάτων AB και $A\Gamma$,
τότε θα είναι και $Z\hat{B}\Theta = H\hat{\Gamma}K$

Τέλος συγκρίνοντας τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $KH\Gamma$ διαπιστώνουμε ότι έχουν:
 $BZ = H\Gamma$ από το α ερώτημα ,
 $Z\hat{B}\Theta = H\hat{\Gamma}K$ και $B\hat{Z}\Theta = K\hat{H}\Gamma$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $A\hat{Z}H$, $A\hat{H}Z$,
επομένως τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $KH\Gamma$ είναι ίσα.

γ) Από την ισότητα των τριγώνων ZBΘ και KHΓ είναι:

$$ZΘ = KH \Rightarrow ZΘ + ΘΚ = KH + ΘΚ \Rightarrow ZK = HΘ$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3726)

Θεωρούμε δύο σημεία A και B τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία (ε), τέτοια ώστε η ευθεία AB δεν είναι κάθετη στην (ε). Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία (ε).

α) Αν η A'B τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο O, να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία (ε) διχοτομεί την γωνία AOA'.

Μονάδες 6

ii. Οι ημιευθείες OA και OB σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία (ε).

Μονάδες 6

β) Αν K είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία (ε), να αποδείξετε ότι:

i. $KA = KA'$

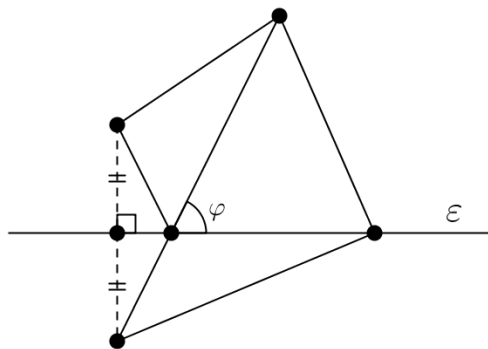
Μονάδες 6

ii. $KA + KB > AO + OB$

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) i. Έστω M το σημείο τομής της AA' με την ευθεία (ε). Αφού το σημείο A' είναι το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία (ε), αυτή είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος AA', επομένως $OA = OA'$, άρα το τρίγωνο AOA' είναι ισοσκελές, συνεπώς το ύψος του OM είναι και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του, δηλαδή η ευθεία (ε) διχοτομεί την γωνία AOA'.



ii. Αν ονομάσουμε $\hat{\phi}$ την οξεία γωνία που σχηματίζει η OB με την (ε) τότε είναι:

$$\hat{MOA} = \hat{\phi} \text{ ως κατά κορυφήν γωνίες}$$

$$\hat{AOM} = \hat{MOA'} \text{ από το α ερώτημα}$$

επομένως θα είναι και $\hat{AOM} = \hat{\phi}$, δηλαδή οι ημιευθείες OA και OB σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία (ε).

β) i. Αφού η ευθεία (ε) είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος AA' και το σημείο K είναι σημείο της ευθείας, τότε $KA = KA'$.

ii. Στο τρίγωνο ABK με βάση την τριγωνική ανισότητα, έχουμε:

$$KA' + KB > BA' \Rightarrow (\text{αφού } KA = KA') \Rightarrow KA + KB > AO + OB$$

$$KA + KB > BA' \Rightarrow$$

$$KA + KB > OA' + OB \Rightarrow (\text{αφού } OA = OA')$$

$$KA + KB > OA + OB$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3728)

Έστω ότι ο κύκλος (O, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου PGE στα σημεία A, Δ και B .

α) Να αποδείξετε ότι:

I. $PG = \Gamma\Delta + AP$

Μονάδες 6

II. $PG - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$

Μονάδες 8

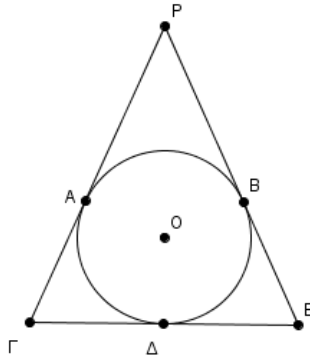
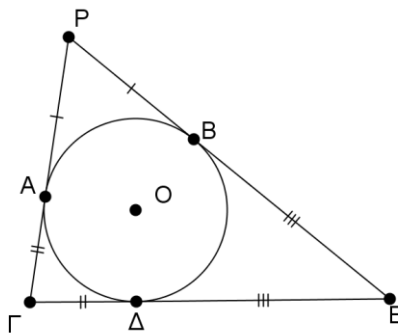
β) Αν $AG = BE$, να αποδείξετε ότι

I. Το τρίγωνο PGE είναι ισοσκελές.

Μονάδες 6

II. Τα σημεία P, O και Δ είναι συνευθειακά.

Μονάδες 5

**ΛΥΣΗ**

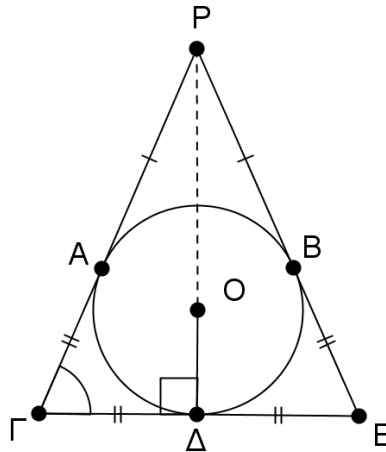
α) I. Είναι $\Gamma A = \Gamma\Delta$ ως εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Γ στο κύκλο (O, ρ) τότε
 $PG = \Gamma A + AP = \Gamma\Delta + AP$

II. Είναι $PA = PB$ και $BE = \Delta E$ ως εφαπτόμενα τμήματα από τα σημεία P και E στο κύκλο (O, ρ) τότε

$$PG = \Gamma\Delta + AP \Rightarrow PG - \Gamma\Delta = AP \Rightarrow PG - \Gamma\Delta = PB \Rightarrow PG - P\Delta = PE - BE \Rightarrow$$

$$PG - P\Delta = PE - \Delta E$$

β) I. Αν $AG = BE$ έχουμε το παρακάτω σχήμα.



Επιπλέον είναι $PA = PB$, τότε προσθέτοντας τις σχέσεις ισότητας κατά μέλη προκύπτει ότι

$$PA + AG = PB + BE \Rightarrow PG = PE$$

δηλαδή το τρίγωνο PGE είναι ισοσκελές.

II. Το ευθύγραμμο τμήμα PO είναι διχοτόμος και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου PGE , επομένως είναι $PO \perp GE$ (1). Η ακτίνα OD του κύκλου (O, ρ) είναι κάθετη στην εφαπτομένη GE στο σημείο επαφής Δ , επομένως είναι $OD \perp GE$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι τα σημεία P , O και Δ ανήκουν σε ευθεία κάθετη της GE στο σημείο Δ , δηλαδή είναι σημεία συνευθειακά.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3729)

Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και εξωτερικό σημείο του P . Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα PA και PB . Η διακεντρική ευθεία PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ . Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα PA και PB στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $P\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 10

β) $\Gamma A = \Delta B$

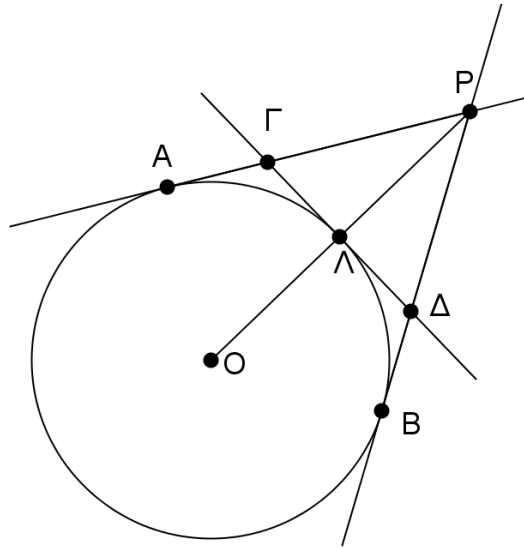
Μονάδες 8

γ) Η περίμετρος του τριγώνου $P\Gamma\Delta$ είναι ίση με $PA + PB$

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Η ακτίνα OL του κύκλου είναι κάθετη στην εφαπτομένη $\Gamma\Delta$ στο σημείο επαφής Λ , και η PO διχοτομεί τη γωνία APB . Έτσι λοιπόν αφού η PL είναι διχοτόμος και ύψος του τριγώνου $P\Gamma\Delta$ έχουμε ότι αυτό είναι ισοσκελές.



β) Αφού το τρίγωνο $P\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές έχουμε ότι $P\Gamma = P\Delta$. Επιπλέον $PA = PB$ ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το σημείο P, οπότε $\Gamma A = B\Delta$ ως διαφορά ίσων τμημάτων.

γ) Είναι $\Gamma\Lambda = \Gamma A$ ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το σημείο Γ και $\Delta\Lambda = \Delta B$ ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το σημείο Δ.

Έτσι έχουμε.

$$\Pi_{\triangle P\Gamma\Delta} = P\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta P = P\Gamma + \Gamma\Lambda + \Lambda\Delta + \Delta P$$

δηλαδή,

$$\Pi_{\triangle P\Gamma\Delta} = \underbrace{P\Gamma + \Gamma A}_{PA} + \underbrace{\Delta B + \Delta P}_{PB} = PA + PB$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3767)

Δίνεται κύκλος (O, K) και μια επίκεντρη γωνία του $\widehat{AOB}$ ίση με 120° . Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B τέμνονται στο σημείο P. Θεωρούμε σημείο M του τόξου AB και φέρουμε τις χορδές AM και BM, οι οποίες προεκτεινόμενες τέμνουν τις PB και PA και στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο APB είναι ισόπλευρο.

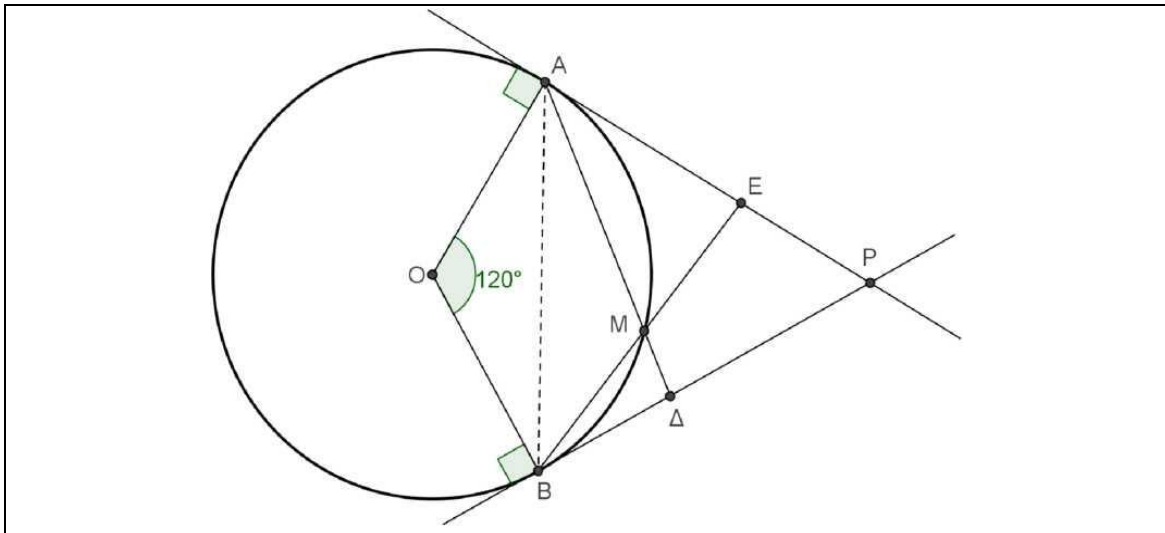
Μονάδες 8

β) $\widehat{MAB} + \widehat{MBA} = 60^\circ$.

Μονάδες 8

γ) Τα τρίγωνα ABAΔ και PEB είναι ίσα.

Μονάδες 9



Λύση

α) Είναι $OA=OB$ (ως ακτίνες κύκλου) άρα το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές

Οπότε $OA = OB$

Όμως στο τρίγωνο OAB είναι

$$\angle OAB + \angle OBA + \angle AOB = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle OAB + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle OAB = 60^\circ \Leftrightarrow \angle OAB = 30^\circ$$

Άρα

$$\angle OAB = \angle OBA = 30^\circ$$

Ἔτσι λοιπόν

$$\text{PAB} = 90^\circ - \text{OAB} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \text{ και } \text{PBA} = 90^\circ - \text{OBA} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Στο τρίγωνο ΡΑΒ είναι

$$\angle PAB + \angle PBA + \angle APB = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + 60^\circ + \angle APB = 180^\circ \Leftrightarrow \angle APB = 60^\circ$$

Ἄρα

$$\angle PAB = \angle PBA = \angle APB = 60^\circ$$

οπότε το τρίγωνο PAB είναι ισόπλευρο

β) Η $\angle AMB$ βαίνει στο τόξο $AB = 240^\circ$ άρα

$$\text{AMB} = \frac{240^\circ}{2} = 120^\circ$$

Στο τρίγωνο AMB είναι

$$\text{MAB} + \text{MBA} + \text{AMB} = 180^\circ \Leftrightarrow \text{MAB} + \text{MBA} + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \text{MAB} + \text{MBA} = 60^\circ$$

γ) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΔΑ και ΡΕΒ

1) $AB=PB$ (το τρίγωνο APB είναι ισόπλευρο)

2) $\angle B\Delta = \angle P\Delta = 60^\circ$

3) EBP = MAB

Από Γ-Π-Γ λοιπόν $B \overset{\Delta}{\Delta} A = P \overset{\Delta}{E} B$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4741)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Στην προέκταση της AB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $AE = A\Gamma$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta = AB$. Αν τα τμήματα ΔE και $B\Gamma$ τέμνονται στο K και η προέκταση της AK τέμνει την $E\Gamma$ στο M , να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = \Delta E$

(Μονάδες 6)

β) $BK = K\Delta$

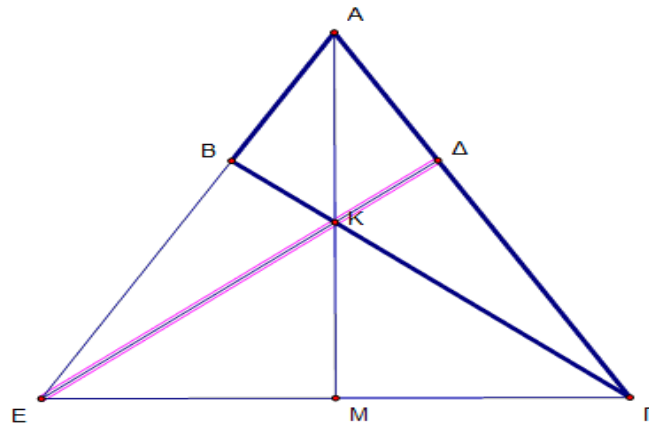
(Μονάδες 7)

γ) Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας A

(Μονάδες 6)

δ) Η AM είναι μεσοκάθετος της $E\Gamma$.

(Μονάδες 6)

**ΛΥΣΗ**

i) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $AB\Gamma$ που έχουν:

- $AE = A\Gamma$ (εκ κατασκευής)
- $A\Delta = AB$ (εκ κατασκευής)
- $\angle A$ κοινή

άρα σύμφωνα με το κριτήριο Π-Γ-Π είναι ίσα, άρα και $B\Gamma = \Delta E$ ως αντίστοιχες πλευρές ίσων τριγώνων.

ii) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $B\Delta E$ που έχουν:

- $B\Delta$ κοινή πλευρά
- $B\Gamma = \Delta E$ (από (i))
- $BE = AE - AB = A\Gamma - AB = A\Gamma - A\Delta = \Delta\Gamma$

επομένως σύμφωνα με το κριτήριο Π-Π-Π είναι ίσα, άρα $\angle B\Delta\Gamma = \angle B\Delta E$ ως αντίστοιχες γωνίες ίσων τριγώνων. Επομένως το τρίγωνο $BK\Delta$ ισοσκελές, άρα $K\Delta = BK$.

iii) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AEK και $AK\Gamma$ που έχουν:

- AK κοινή πλευρά

- $AE=AG$ (από υπόθεση)
- $EK=BG-BK=KG$, αφού $EK=ED-KD$ και $ED=BG$, $KD=BK$ (από (ii))

επομένως σύμφωνα με το κριτήριο Π-Π-Π είναι ίσα, άρα $EAK=ΓAK$ ως αντίστοιχες γωνίες ίσων τριγώνων, άρα η AK διχοτόμος της γωνίας A .

iv) Το τρίγωνο $AEΓ$ είναι ισοσκελές και η AM είναι διχοτόμος (από (iii)) της A άρα και ύψος και διάμεσος και μεσοκάθετος της βάσης $ΕΓ$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4806)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB=AG$), και την ευθεία ϵ της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας A . Η κάθετη στην πλευρά AB στο B τέμνει την ϵ στο K και την ευθεία AG στο Z . Η κάθετη στην πλευρά AG στο $Γ$ τέμνει την ϵ στο Λ και την ευθεία AB στο E .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AZ=AE$

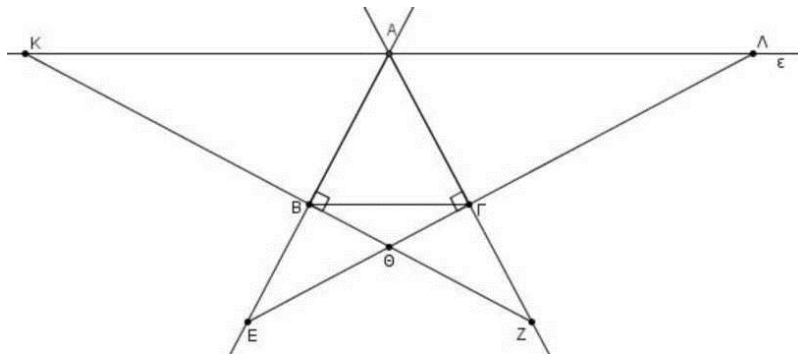
Μονάδες 8

ii. $AK=AL$

Μονάδες 9

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η $AΘ$ είναι διχοτόμος της γωνίας A του τριγώνου $ABΓ$, όπου $Θ$ το σημείο τομής των KZ και EL . Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 8



Λύση

α) i. Θα δείξουμε ότι $BΘ=ΘΓ$.

Έχουμε,

$$\begin{cases} ABΓ = AGB \\ ABΘ = AGΘ = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow ABΘ - ABΓ = AGΘ - AGB \Rightarrow ΓBΘ = BGΘ \Rightarrow \overset{\Delta}{ΘBΓ} \text{ ισοσκελές}$$

Τα τρίγωνα $BEΘ$, $ΘΓZ$ είναι ίσα, γιατί

- $B=Γ=90^\circ$
- $Θ_1=Θ_2$ (κατακορυφήν)
- $BΘ=ΘΓ$

άρα $BE = \Gamma Z$, οπότε $AE = AZ$ ως άθροισμα ίσων τμημάτων.

ii. Έχουμε, $\triangle AKZ = \triangle AE\Lambda$ γιατί

- $E = Z$ (από την προηγούμενη σύγκριση τριγώνων)
- $A_{1,2} = A_{2,3}$ (αφού $A_2 = A_3$ ως μισά ίσων γωνιών)
- $ZA = AE$

άρα $AK = A\Lambda$

β) Είναι σωστή η παρατήρηση του μαθητή!

Τα σημεία A και Θ ανήκουν στη μεσοκάθετο του $B\Gamma$, αφού ισαπέχουν από τα άκρα B και Γ , οπότε το $A\Theta$ είναι η μεσοκάθετος του $B\Gamma$. Επομένως στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $A\Theta$ διχοτόμος της γωνίας $BA\Gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3825)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο του AK και σε τυχαίο σημείο της E φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο AK , η οποία τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Z και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓB στο σημείο H . Να αποδείξετε ότι:

α) $\angle Z\Delta\Gamma = 90^\circ + \frac{A}{2}$

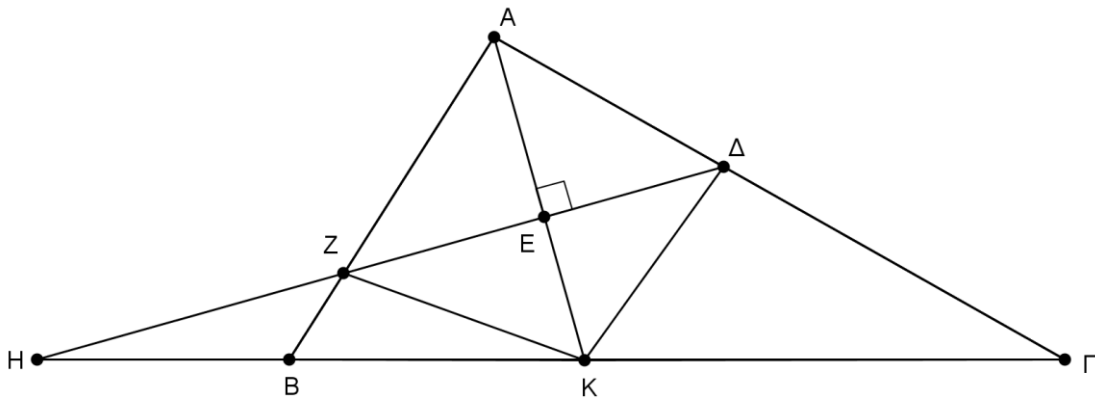
Μονάδες 7

β) $ZK = K\Delta$

Μονάδες 8

γ) $\angle ZH\Gamma = \frac{B - \hat{\Gamma}}{2}$

Μονάδες 10



Λύση

α) Η $\angle Z\Delta\Gamma$ είναι εξωτερική του τριγώνου $AE\Delta$, έτσι είναι:

$$\angle Z\Delta\Gamma = 90^\circ + \angle A\Delta E \Leftrightarrow \angle Z\Delta\Gamma = 90^\circ + \frac{A}{2}$$

β) Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές αφού η AE είναι διχοτόμος και ύψος, έτσι

$$AZ = A\Delta \quad (1)$$

Τα τρίγωνα AZK και $A\Delta K$ είναι είσαι αφού έχουν:

$$AZ = A\Delta \text{ από την (1),}$$

AK κοινή πλευρά και

$$\angle ZAE = \angle \Delta AE = \frac{A}{2},$$

άρα και $ZK = K\Delta$

γ) Από το τρίγωνο $ZH\Delta$ είναι:

$$\begin{aligned} \angle ZH\Gamma &= 180^\circ - \angle Z\Delta\Gamma - \hat{\Gamma}^{(\alpha)} \Leftrightarrow \\ \angle ZH\Gamma &= 180^\circ - 90^\circ - \frac{A}{2} - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \angle ZH\Gamma = 90^\circ - \frac{180^\circ - B - \hat{\Gamma}}{2} - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \angle ZH\Gamma = \frac{B - \hat{\Gamma}}{2} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3903)

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$. Αν E είναι το σημείο τομής των προεκτάσεων των BA και $\Gamma\Delta$ και Z είναι το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔA και ΓB να αποδείξετε ότι:

α) Η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $B\Gamma\Delta$

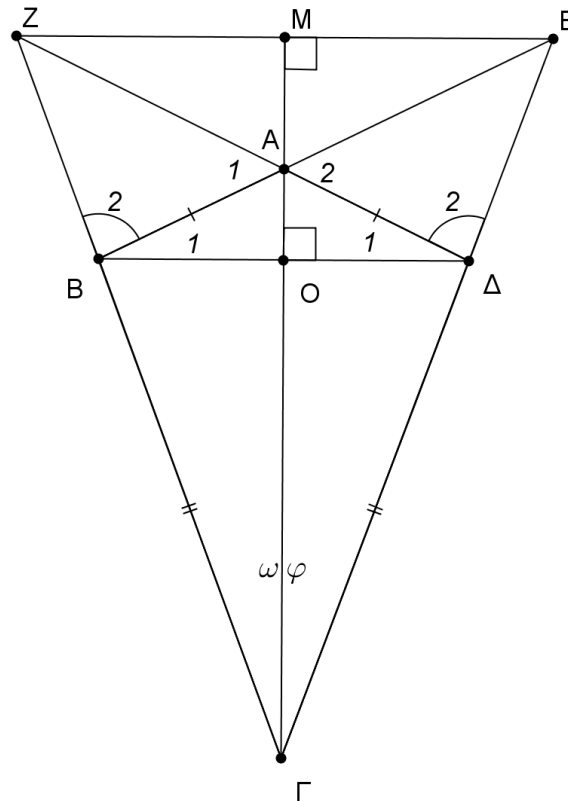
(Μονάδες 7)

β) $\Gamma Z = \Gamma E$

(Μονάδες 9)

γ) $EZ \parallel B\Delta$

(Μονάδες 9)

**Λύση**

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα επειδή έχουν την $A\Gamma$ κοινή και $AB = A\Delta$, $\Gamma B = \Gamma\Delta$ από την υπόθεση (Π-Π-Π). Οπότε θα είναι $\omega = \varphi$, δηλαδή η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $B\Gamma\Delta$

β) $A_1 = A_2$ (ως κατακορυφήν).

$B_2 = \hat{A}_2$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $B_1, \hat{A}_1$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Delta$)

Άρα τα τρίγωνα ABZ , $A\Delta E$ είναι ίσα (Γ-Π-Γ). Οπότε $BZ = \Delta E$ και κατά συνέπεια, $\Gamma Z = \Gamma E$

γ) Στα ισοσκελή τρίγωνα $\Gamma\Delta\Lambda$, $\Gamma\Delta\Lambda$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ θα είναι μεσοκάθετη στις βάσεις. Άρα $B\Delta \parallel Z\Lambda$, ως κάθετες στην ίδια ευθεία.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4588)

Δίνεται ισοπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = B\Gamma$, ενώ στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Gamma E = B\Gamma$. Φέρουμε την κάθετη στην $E\Delta$ στο σημείο Z , η οποία τέμνει την προέκταση της ΔA στο Z .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $\Gamma A E$ και $B\Delta A$.

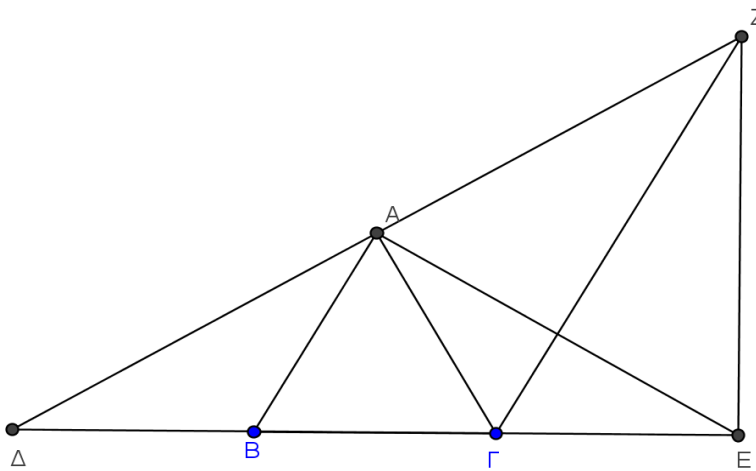
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ΓZ είναι μεσοκάθετος του $A E$.

(Μονάδες 12)

γ) Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma Z$.

(Μονάδες 5)

**ΛΥΣΗ**

α) Για τις γωνίες του τριγώνου $A\Gamma E$ έχουμε ότι:

$$\angle A\Gamma E = 180 - \angle A\Gamma B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

($\angle A\Gamma B = 60^\circ$ ως γωνία του ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$)

Τώρα το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές αφού $\Gamma E = \Gamma B$ (από υπόθεση) και $\Gamma B = \Gamma A$ (το $AB\Gamma$ είναι ισοπλευρο) άρα $\Gamma E = \Gamma A$ οπότε θα είναι $\angle \Gamma A E = \angle A E \Gamma$ και επειδή

$$\angle \Gamma A E + \angle A E \Gamma = 180 - \angle A\Gamma E = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

θα είναι

$$\angle \Gamma A E = \angle A E \Gamma = 30^\circ$$

Για τις γωνίες του τριγώνου $AB\Delta$ έχουμε ότι:

$$\angle AB\Delta = 180 - \angle AB\Gamma = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

($\angle AB\Gamma = 60^\circ$ ως γωνία του ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$)

Τώρα το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές αφού $B\Delta = B\Gamma$ (από υπόθεση) και $\Gamma B = BA$ (το $AB\Gamma$ είναι ισοπλευρο) άρα

$$B\Delta = BA$$

οπότε θα είναι

$$\angle B\Delta\Lambda = \angle \Lambda\Delta B$$

και επειδή

$$\angle B\Delta\Lambda + \angle \Lambda\Delta B = 180^\circ - \angle A\Delta B = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

θα είναι

$$\angle B\Delta\Lambda = \angle \Lambda\Delta B = 30^\circ$$

β) Επειδή είναι $\Gamma\Lambda = \Gamma\epsilon$ όπως είδαμε και πριν το σημείο Γ είναι σημείο της μεσοκάθετος AE .

Τώρα επειδή

$$\angle B\Delta\Lambda + \angle B\Delta\Gamma = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$$

$$(\angle B\Delta\Lambda = 30^\circ \text{ από (α) και } \angle B\Delta\Gamma = 60^\circ \text{ γωνία ισοπλεύρου})$$

επομένως $\Gamma\Lambda$ είναι κάθετη στην ΔA άρα $\angle \Gamma A Z = 90^\circ$ και επειδή $\angle \Gamma A E = 30^\circ$ (από (α)) θα είναι $\angle Z A E = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

Ακόμη $\angle Z E \Gamma = 90^\circ$ (από κατασκευή) και $\angle A E \Gamma = 30^\circ$ (από (α)) άρα

$\angle Z E A = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Έτσι στο τρίγωνο $Z A E$ έχουμε $\angle Z A E = \angle Z E A$ δύο γωνίες ίσες άρα ισοσκελές άρα $Z A = Z E$ άρα το Z είναι σημείο της μεσοκάθετου της AE , επομένως η ΓZ είναι η μεσοκάθετος της AE αφού τα Γ, Z είναι σημεία της.

γ) Είναι ΓZ κάθετη στην AE όπως δείξαμε στο (β). Ακόμη

$$\angle B\Delta\Gamma + \angle \Gamma A E = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$$

άρα $\angle B A E = 90^\circ$ οπότε BA κάθετη στην AE επομένως ΓZ , AB παράλληλες αφού είναι κάθετες στην ίδια ευθεία AE .

ΑΣΚΗΣΗ (4_4622)

Δίνεται ισοπλεύρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του ΓE . Στην προέκταση της ΓB

(προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$. Αν η ευθεία ΔE τέμνει την

$A\Gamma$ στο Z και $Z\Theta \parallel B\Gamma$

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο $A\Theta Z$ είναι ισοπλεύρο.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Theta E Z$.

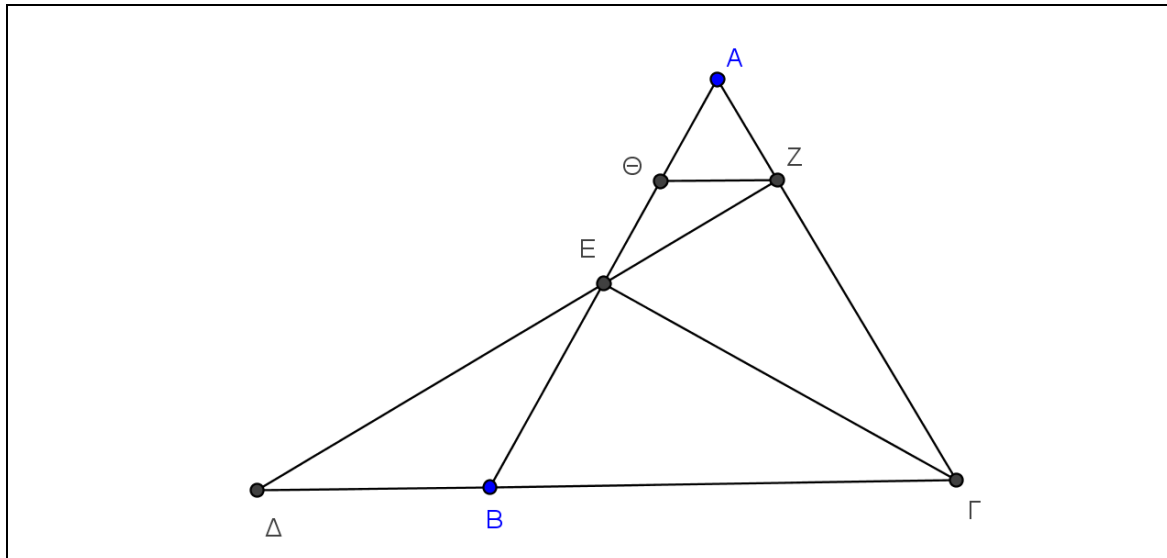
(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι $AE = 2 \Theta Z$.

(Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι $3AB = 4\Theta B$.

(Μονάδες 5)

**ΛΥΣΗ**

α) Στο ισοπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ΓΕ ύψος, τότε και διάμεσος, οπότε

$$BE = \frac{AB}{2} = \frac{BG}{2} = BD, \text{ οπότε το τρίγωνο } \Delta BE \text{ είναι ισοσκελές.}$$

Τώρα επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοπλευρο θα ισχύει $A = B = 60^\circ$.

Επίσης $\angle AZ\Theta = \angle AB\Gamma = 60^\circ$ (ως εντός εκτός και επί τ' αυτά μέρη γωνιών των παραλλήλων $\Theta Z // B\Gamma$ που τέμνονται από την ΑΒ).

Στο τρίγωνο ΑΘΖ έχουμε άθροισμα γωνιών 180° άρα

$$\angle \Theta AZ + \angle A\Theta Z + \angle AZ\Theta = 180^\circ$$

οπότε είναι γωνία

$$\angle AZ\Theta = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

άρα είναι γωνίες

$$\angle \Theta AZ = \angle A\Theta Z = \angle AZ\Theta = 60^\circ$$

οπότε το τρίγωνο ΑΘΖ είναι ισοπλευρο.

β) Είναι $\angle \Theta Z = 120^\circ$ (παραπληρωματική της $\angle A\Theta Z = 60^\circ$)

$\angle \Theta EZ = \angle \Delta EB$ (ως κατακορυφήν)

Έχουμε,

$$\angle AB\Gamma = \angle B\Delta E + \angle \Delta EB = 2\angle \Delta EB \text{ (ως εξωτερική στο ισοσκελές τρίγωνο } \Delta BE \text{)}$$

και γωνία $\angle AB\Gamma = 60^\circ$ (γωνία ισοπλεύρου), άρα $60^\circ = 2\angle \Delta EB \Rightarrow \angle \Delta EB = 30^\circ$ επομένως και γωνία $\angle \Theta EZ = 30^\circ$ και κατά συνέπεια η άλλη γωνία του τριγώνου $\angle \Theta ZE = 30^\circ$

γ) Έχουμε

$$\angle AZ\Theta + \angle \Theta ZE = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ,$$

οπότε το ΑΖΕ τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Επειδή $ΑΘ=ΘΖ$, αφού $ΑΘΖ$ ισόπλευρο (από (α)) και $ΘΕ=ΘΖ$ επειδή $ΘΕΖ$ τρίγωνο ισοσκελές (από (β)), τότε στο τρίγωνο $ΑΖΕ$, έχουμε:

γωνία $ΑΖΕ = 90^\circ$ άρα ορθογώνιο, και $ΖΘ$ διάμεσος, οπότε από γνωστό θεώρημα

$$ΖΘ = \frac{ΑΕ}{2} \Leftrightarrow ΑΕ = 2ΘΖ$$

δ) Έχουμε

$$ΘΒ = ΘΕ + ΕΒ$$

και επειδή $ΘΕ = \frac{ΑΕ}{2}$ και $ΕΒ = ΑΕ$ (Ε μέσο του ΑΒ) θα ισχύει ότι

$$ΘΒ = \frac{ΑΕ}{2} + ΑΕ = \frac{3}{2} ΑΕ$$

και επειδή $ΑΕ = \frac{ΑΒ}{2}$ θα είναι $ΘΒ = \frac{3}{2} \frac{ΑΒ}{2} = \frac{3ΑΒ}{4} \Leftrightarrow 4ΘΒ = 3ΑΒ$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4794)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($Α = 90^\circ$) με $ΒΔ$ διχοτόμο και $ΑΚ$ ύψος, που τέμνονται στο Ε. Η κάθετη από το Ε στην ΑΒ τέμνει τις ΑΒ και ΒΓ στα Η και Ζ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $ΕΗΑ$ και $ΕΚΖ$ είναι ίσα.

Μονάδες 6

ii. Το τρίγωνο $ΒΚΗ$ είναι ισοσκελές τρίγωνο.

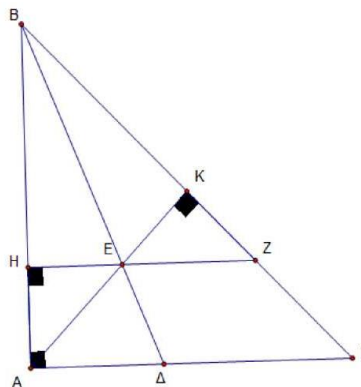
Μονάδες 6

iii. Η $ΒΔ$ είναι κάθετη στην $ΑΖ$

Μονάδες 7

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι και ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η $ΓΕ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Γ$.

Μονάδες 6



Λύση

α) i. Έχουμε $\triangle ΕΗΑ = \triangle ΕΚΖ$ γιατί,

- $\angle Η = \angle Κ = 90^\circ$
- $\angle Ε_1 = \angle Ε_2$ (ως κατακορυφήν)
- $ΕΗ = ΕΚ$ (Ε σημείο της διχοτόμου, ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας ΒΑ,ΒΓ)

ii. Έχουμε $\angle EHB = \angle EKB$ γιατί,

- $H = K = 90^\circ$
- $B_1 = B_2$ (ΒΔ διχοτόμος)
- $BE = BE$ (κοινή πλευρά)

άρα $BH = BK$, το BHK είναι ισοσκελές τρίγωνο.

iii. Έχουμε, $BH = BK$ (από το ισοσκελές BHK) και $HA = KZ$ (από την σύγκριση του α. i υποερωτήματος), οπότε με άθροισμα κατά μέλη έχουμε $BA = BZ$, δηλαδή το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές με ΒΔ διχοτόμο, άρα και ύψος, δηλαδή $B\Delta \perp AZ$

β) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε τις διχοτόμους ΒΔ και ΑΚ (αφού $AB\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο με ΑΚ ύψος) να τέμνονται στο Ε, άρα το Ε είναι έκκεντρο του τριγώνου, οπότε και ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4799)

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Φέρνουμε τμήμα $A\Delta$ κάθετο στην AB και τμήμα AE κάθετο στην $A\Gamma$ με $A\Delta = AE$. Θεωρούμε τα μέσα Z, H και M τα μέσα των $\Delta B, E\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΔAB και $AE\Gamma$ είναι ίσα.

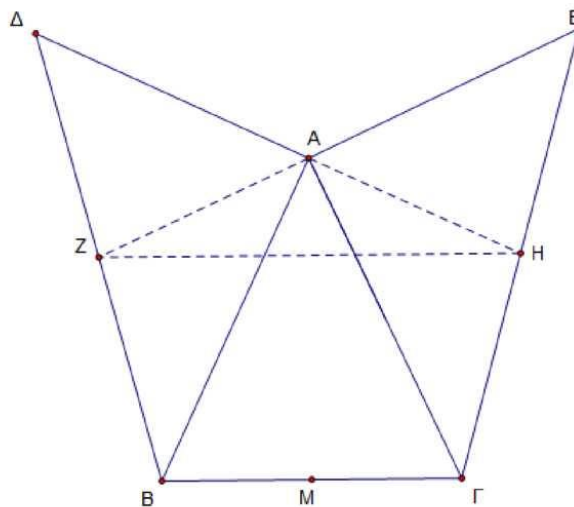
Μονάδες 7

ii. Το τρίγωνο ZAH είναι ισοσκελές.

Μονάδες 6

iii. Η AM είναι μεσοκάθετος του ZH .

Μονάδες 7



β) Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΔAB και $AE\Gamma$ έγραψε τα εξής:

« 1. $A\Delta = AE$ από υπόθεση

2. $AB = A\Gamma$ πλευρές ισοσκελούς τριγώνου

3. $\angle \Delta AB = \angle E A\Gamma$ ως κατακορυφήν.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μια προς μια και την περιεχόμενη γωνία ίση».

Ο καθηγητής είπε ότι αυτή η λύση περιέχει λάθος μπορείς να το εντοπίσεις;

Μονάδες 5

Λύση

α) i. Έχουμε,

$$\triangle A\Delta B = \triangle A\Gamma E \text{ γιατί}$$

- $\angle A\Delta B = \angle \Gamma A E = 90^\circ$
- $A\Delta = AE$ (δεδομένο)
- $AB = A\Gamma$ (ισοσκελές)

ii. Από τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ με διαμέσου AZ και AH αντίστοιχα, έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} AZ = \frac{\Delta B}{2} \\ \text{και} \\ AH = \frac{E\Gamma}{2} \end{array} \right. \xRightarrow{E\Gamma = \Delta B} AZ = AH, \text{ άρα το } AZH \text{ είναι ισοσκελές}$$

iii. Θα δείξουμε ότι $MZ = MH$.

Έχουμε, $\triangle MZB = \triangle MH\Gamma$ γιατί

- $ZB = \Gamma H$ (ως μισά ίσων πλευρών)
- $BM = M\Gamma$ (M μέσο $B\Gamma$)
- $\angle B_{1,2} = \angle \Gamma_{1,2}$ (ως άθροισμα ίσων γωνιών, των $\angle B_1 = \angle \Gamma_1$ από το ισοσκελές τρίγωνο

$AB\Gamma$ και $\angle B_2 = \angle \Gamma_2$ από την ισότητα τριγώνων ερώτημα α. i)

Οπότε το M ισαπέχει από τα Z και H, άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του ZH.

Επίσης έχουμε $AZ = AH$, άρα το A ανήκει στη μεσοκάθετο του ZH, οπότε το AM είναι μεσοκάθετος του ZH.

β) Ο μαθητής σφάλει στο σημείο που αναφέρει ότι οι γωνίες $\angle A\Delta B, \angle E\Gamma A$ είναι κατακορυφήν.

Θα αποδείξουμε το λάθος ισχυρισμό του με την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

Έστω ότι οι γωνίες $\angle A\Delta B, \angle E\Gamma A$ είναι κατακορυφήν, τότε τα σημεία B, A, E είναι συνευθειακά, άρα

$\angle BAE = 180^\circ \Rightarrow \angle B\Gamma A + \angle \Gamma A E = 180^\circ \Rightarrow \angle B\Gamma A + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle B\Gamma A = 90^\circ$, που είναι άτοπο αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο.

Οπότε οι γωνίες $\angle A\Delta B, \angle E\Gamma A$ δεν είναι κατακορυφήν (παρόλο που είναι ίσες).

ΑΣΚΗΣΗ (4_5900)

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$ με $\Gamma\Delta = AB$ (A, Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$).

Να αποδείξετε ότι:

α) $AM \parallel \Gamma\Delta$

(Μονάδες 6)

β) η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}\Gamma$.

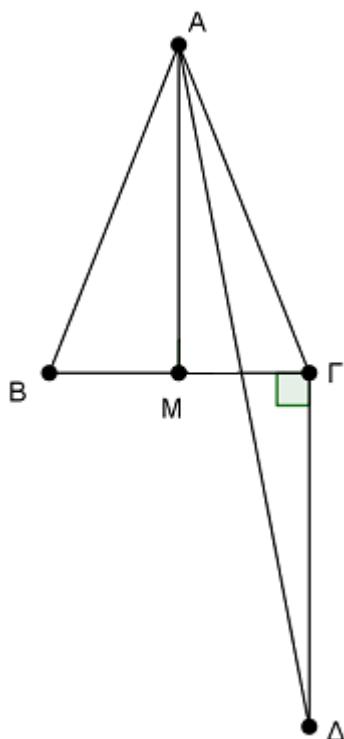
(Μονάδες 7)

γ) $\angle A\Gamma = 45^\circ - \frac{B}{2}$

(Μονάδες 7)

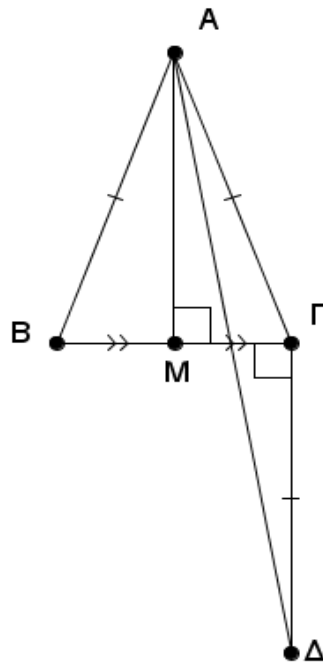
δ) $A\Delta < 2AB$

(Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

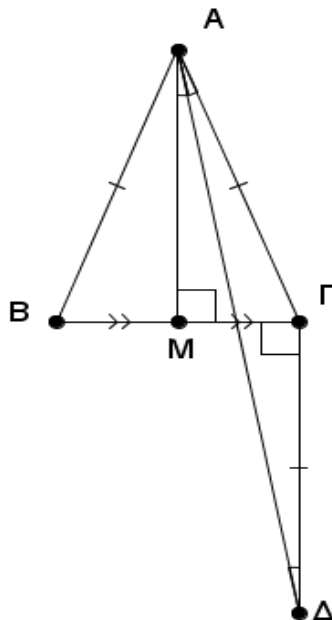
α)



Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, η διάμεσος AM που αντιστοιχεί στην βάση του είναι και ύψος, άρα $AM \perp B\Gamma$. Όμως και $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$ από δεδομένα, οπότε $AM \parallel \Gamma\Delta$.

β) $\Gamma\Delta = AB = A\Gamma \Rightarrow \Gamma\Delta = A\Gamma$, άρα το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές και έτσι

$$\Gamma A\Delta = \Gamma \Delta A \quad (1)$$



Επίσης, $MA\Delta = \Gamma A\Delta$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AM, \Gamma\Delta$ με τέμνουσα την $A\Delta$.

Από (1) και (2) έχουμε ότι $MA\Delta = \Gamma A\Delta$, άρα η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $MA\Gamma$

$$\gamma) \quad \Delta A\Gamma = \frac{\overset{\beta)}{MA\Gamma}}{2} \overset{\text{στο } \triangle AM\Gamma}{=} \frac{90^\circ - \Gamma}{2} \overset{B=\Gamma}{=} \frac{90^\circ - B}{2} = 45^\circ - \frac{B}{2}$$

δ) Στο τρίγωνο ΑΓΔ από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$A\Delta < A\Gamma + \overset{\Gamma\Delta=AB=A\Gamma}{\Gamma\Delta} \Rightarrow A\Delta < 2AB$$

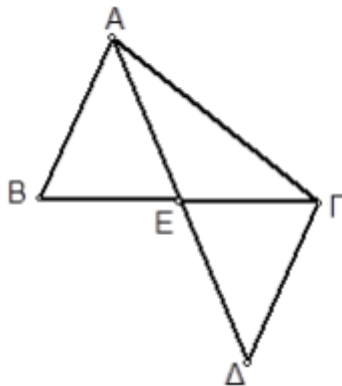
ΑΣΚΗΣΗ (4_5904)**[Κεφάλαιο 4^ο ή 5^ο (ανάλογα με την λύση)]**

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α, Β, Γ, Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό Ε ισαπέχει από τα χωριά Β, Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

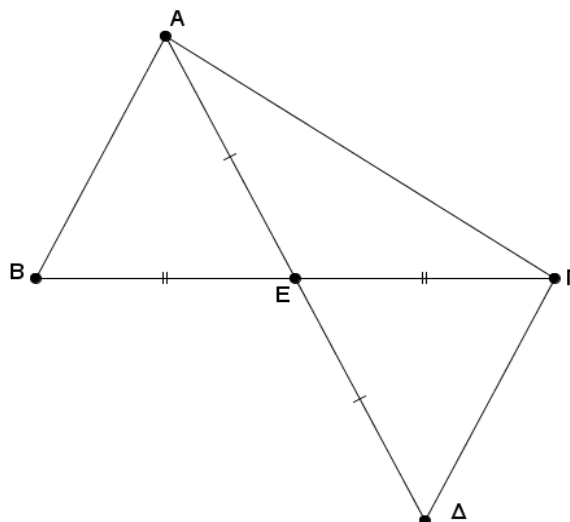
- i. η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ.
(Μονάδες 5)
- ii. αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν.
(Μονάδες 5)
- iii. τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο ΑΔ.
(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ.
(Μονάδες 7)

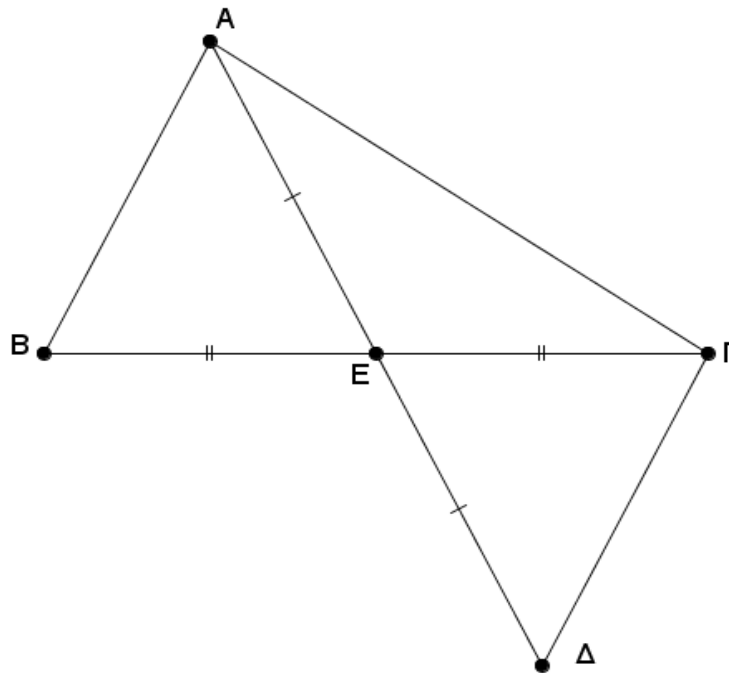
**ΛΥΣΗ**

1^{ος} τρόπος:

- α) Από δεδομένα γνωρίζουμε ότι το χωριό Ε ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ, άρα $AE = DE$ (1), αλλά και από τα χωριά Β και Γ, άρα $BE = GE$ (2)



- ι. Η απόσταση των χωριών Α και Β θα είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ αν και μόνο αν $AB = \Gamma\Delta$.

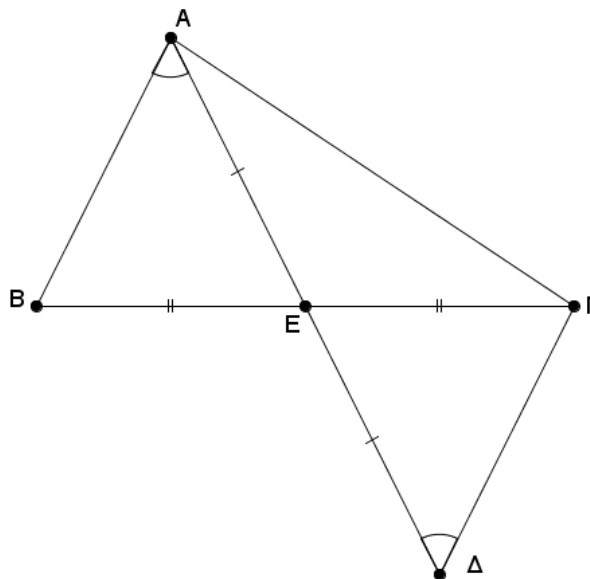


Τα τρίγωνα ABE και ΓΔΕ είναι ίσα λόγω του κριτηρίου Π-Γ-Π, καθώς έχουν:

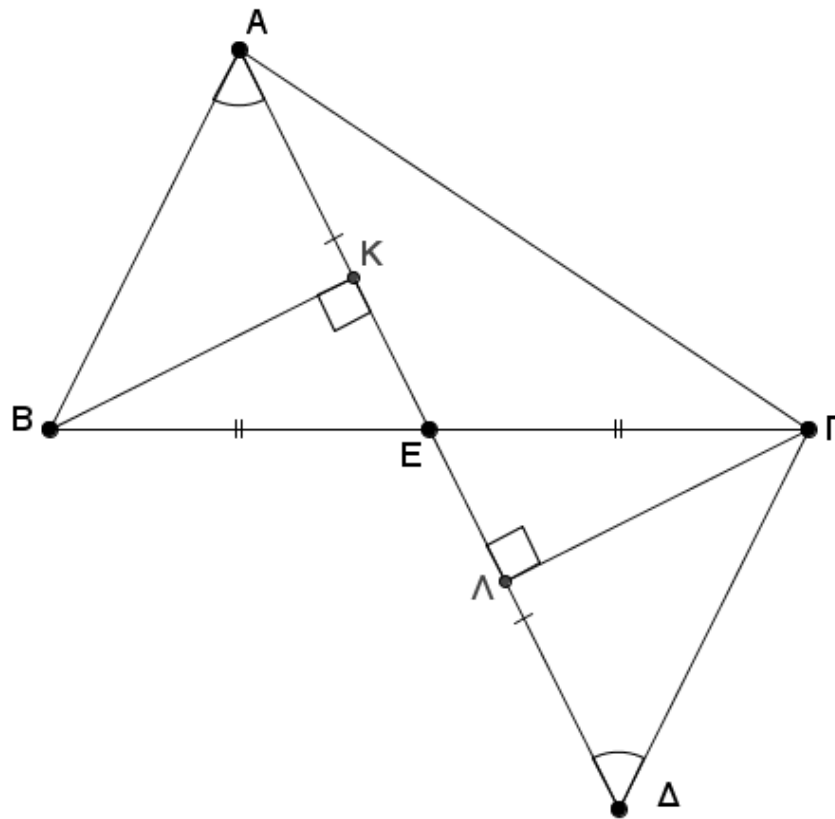
- 1) $AE = DE$ (1)
- 2) $BE = GE$ (2)
- 3) $\angle BEA = \angle GED$ (ως κατακορυφήν)

Επομένως τα δύο τρίγωνα θα έχουν ίσα και όλα τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους, άρα και $AB = \Gamma\Delta$ (3), αλλά και $\angle BAE = \angle GDE$ (4).

- ii. Από την σχέση (4) βγάζουμε το συμπέρασμα ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$, δηλαδή αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, τότε αποκλείεται να συναντηθούν.



- iii. Έστω $BK \perp A\Delta$ και $\Gamma\Lambda \perp A\Delta$.



Τα ορθογώνια τρίγωνα BKE και ΓΛΕ είναι ίσα, αφού:

1) $BE = GE$ (2)

2) $\angle BEA = \angle GED$ (ως κατακορυφήν)

καθώς έχουν μία ομόλογη πλευρά και μία προσκείμενη γωνία ίσες μία προς μία.

Επομένως τα δύο τρίγωνα θα έχουν ίσα και όλα τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους, άρα και $BK = \Gamma\Lambda$ (5), δηλαδή τα χωριά B και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο ΑΔ.

2^{ος} τρόπος (για α) i. και ii. **mathematica**):

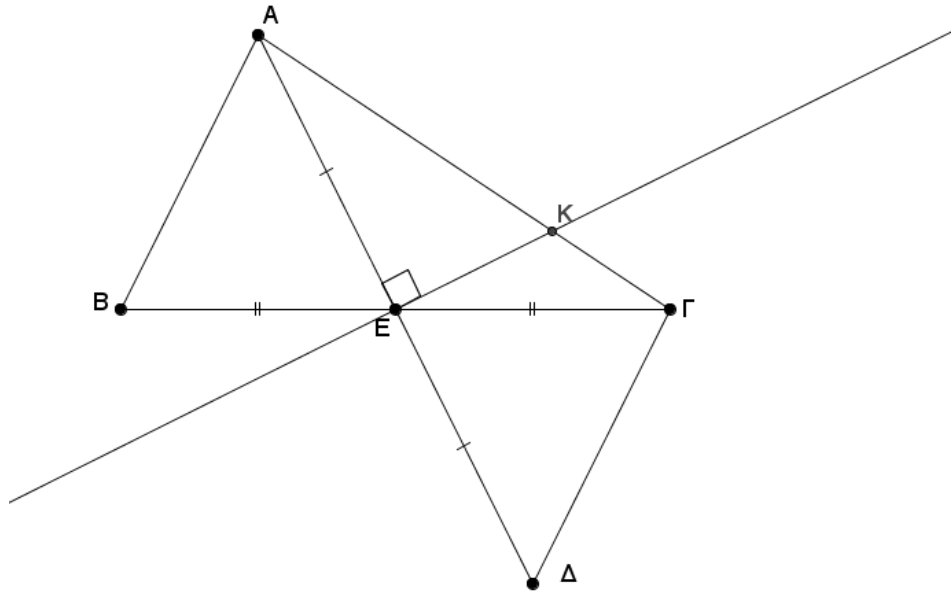
α) Από δεδομένα γνωρίζουμε ότι το χωριό E ισαπέχει από τα χωριά A και Δ, άρα

$AE = DE$ (1), αλλά και από τα χωριά B και Γ, άρα $BE = GE$ (2)

Επομένως, το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Οπότε θα ισχύουν ότι:

- i. $AB = \Gamma\Delta$, δηλαδή η απόσταση των χωριών A και B θα είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ.
- ii. $AB \parallel \Gamma\Delta$, δηλαδή αν οι δρόμοι AB και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, τότε αποκλείεται να συναντηθούν.

β) Αφού το σημείο του δρόμου ΑΓ, έστω K, ισαπέχει από τα χωριά A και Δ, σημαίνει ότι θα ανήκει ταυτόχρονα και στην μεσοκάθετό του ΑΔ.



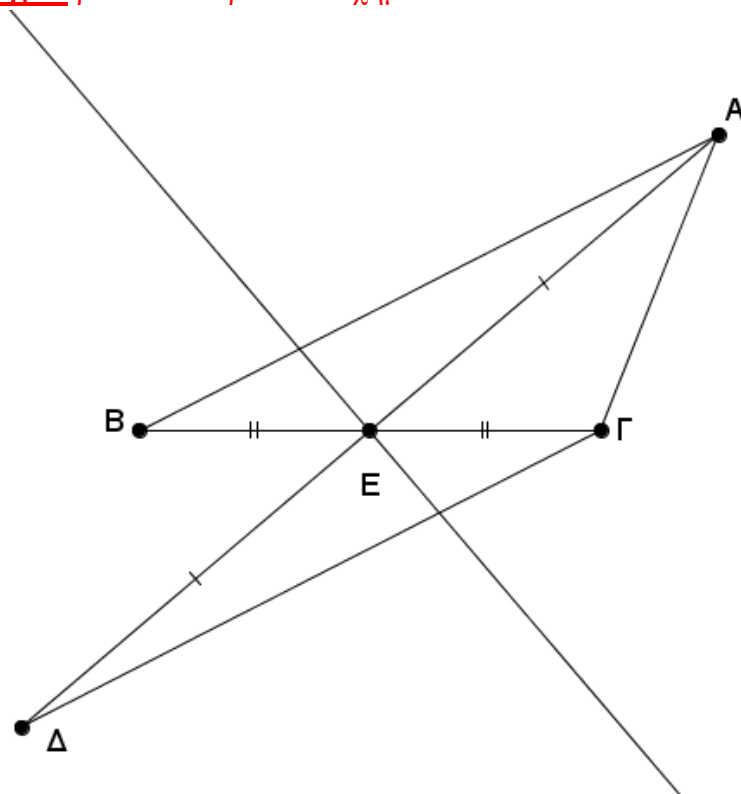
Οπότε το σημείο K προσδιορίζεται ως το σημείο τομής του ευθύγραμμου τμήματος AG και της μεσοκαθέτου του AD.

Σχόλιο:

Το ερώτημα β) έχει νόημα μόνο αν το ευθύγραμμο τμήμα AG και η μεσοκάθετος του AD τέμνονται! Αυτό, όμως, επιτυγχάνεται μόνο λόγω σχήματος (προφανώς δεν επαρκεί!) και όχι από τα δεδομένα της άσκησης.

Χρειάζεται επιπλέον να ισχύει ότι $\angle AGE < 90^\circ$, ώστε η κάθετη από το μέσον E του AD στο AG να έχει ίχνος που να είναι εσωτερικό σημείο του AG....

Αντιπαράδειγμα: βλέπε το παρακάτω σχήμα



ΑΣΚΗΣΗ (4_2789)

Σε μια τάξη της Α' Λυκείου στο μάθημα της Γεωμετρίας ο καθηγητής έδωσε στους μαθητές του το παρακάτω πρόβλημα :

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και μια ευθεία (ε) που διέρχεται από την κορυφή Α και είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η εξωτερική γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας $\hat{A}$.

Ζητείται, χωρίς την βοήθεια γεωμετρικών οργάνων, να χαραχθεί η διάμεσος ΒΜ του τριγώνου και η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $\hat{\Gamma}$.

Ο καθηγητής για να διευκολύνει του μαθητές του, έδωσε την εξής υπόδειξη :

«Αν πάρω στην ευθεία (ε), στο ημιεπίπεδο (ΑΒ, Γ) ένα σημείο Δ τέτοιο ώστε $ΑΔ = ΒΓ$ τότε :

α) η ΒΔ τέμνει την ΑΓ στο μέσο Μ,

(Μονάδες 12)

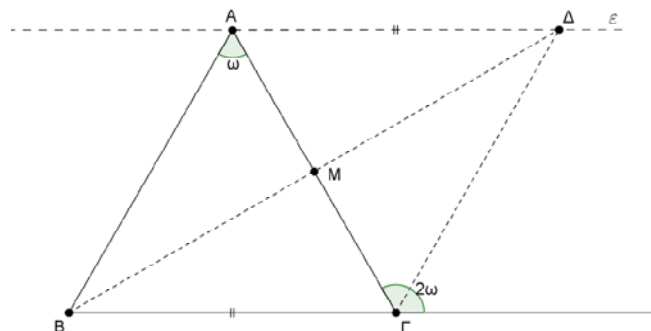
β) η ΓΔ είναι η ζητούμενη διχοτόμος».

(Μονάδες 13)

Μπορείτε να δικαιολογήσετε τους ισχυρισμούς αυτούς;

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $ΑΔ \parallel ΒΓ$, τότε το τετράπλευρο ΑΔΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε Χαράσσοντας την διαγώνιο ΒΔ, αυτή θα διχοτομεί την ΑΓ στο μέσο της Μ. Άρα η ΒΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ.



β) Η ΓΔ είναι παράλληλη στην ΑΒ, οπότε :

$$\left. \begin{array}{l} \hat{BAG} = \hat{AGD} \\ \hat{BAG} = \frac{\hat{\Gamma\epsilon\xi}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{AGD} = \frac{\hat{\Gamma\epsilon\xi}}{2}$$

Άρα η ΓΔ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma\epsilon\xi}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ :

Για το α) και β) ερώτημα χρησιμοποιούμε τα κριτήρια για τα παραλληλόγραμμα στη σελίδα 98.

Παρόμοια άσκηση βιβλίου : Ασκήσεις εμπέδωσης/σελ. 99

ΑΣΚΗΣΗ (4_2792)

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ, Δ ώστε να ισχύει $ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ$. Επίσης θεωρούμε σημείο Ο εκτός του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ έτσι ώστε να ισχύουν $ΟΓ = ΑΓ$ και $ΟΔ = ΔΒ$.

α) Να αποδείξετε ότι :

ι) η γωνία $\hat{\Gamma\hat{O}\Delta}$ είναι 60°

(Μονάδες 9)

ii) οι γωνίες $\hat{OAG}$, $\hat{OBD}$ είναι ίσες και κάθε μια ίση με 30°

(Μονάδες 9)

β) Αν M το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος AB , να αποδείξετε ότι $2OM = OA$.

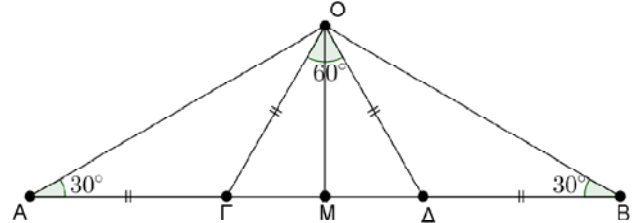
(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) i) Επειδή $AG = OG = GD = OD = DB$,
τότε το τρίγωνο OGD είναι ισόπλευρο.

Άρα

$$\hat{GOD} = 60^\circ$$



ii) Συγκρίνοντας τα τρίγωνα OAG και OBD ,
έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} OG = OD \text{ (υπόθ.)} \\ AG = DB \text{ (υπόθ.)} \\ \hat{OGA} = \hat{ODB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{OAG} = \hat{OBD} \Rightarrow \hat{OAG} = \hat{OBD}$$

Οπότε στο ισοσκελές τρίγωνο OAG έχουμε ότι :

$$\hat{OAG} = \hat{AOG} \quad (1)$$

Οπότε ισχύει :

$$\hat{OAG} + \hat{AOG} + \hat{OGA} = 180^\circ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2\hat{OAG} + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{OAG} = 30^\circ$$

Άρα

$$\hat{OAG} = \hat{OBD} = 30^\circ$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAM η $\hat{OAG} = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά OM είναι μισή της υποτείνουσας, δηλαδή :

$$OM = \frac{OA}{2} \Leftrightarrow OA = 2OM$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ :

Για το α ii) ερώτημα χρησιμοποιούμε το 1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων στη σελίδα 36.

Για το β) ερώτημα χρησιμοποιούμε το πόρισμα για τα ορθογώνια τρίγωνα στη σελ. 110.

Παρόμοια άσκηση βιβλίου :

α ii) Ασκήσεις εμπέδωσης & αποδεικτικές /σελ. 38.

β) Ασκήσεις εμπέδωσης 4,7/σελ. 111 & αποδεικτικές 8/σελ. 111.

ΑΣΚΗΣΗ (4_2794)

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $\Gamma\Delta = 2AB$. Επίσης τα Z , H , E είναι τα μέσα των AD , $B\Gamma$ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Ακόμη η ZH τέμνει τις AE , BE στα σημεία Θ , I αντίστοιχα.

α) Να δείξετε ότι, το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

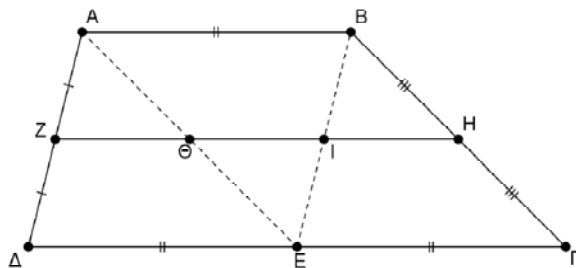
(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι, τα σημεία Θ, Ι είναι τα μέσα των ΑΕ, ΒΕ αντίστοιχα.

(Μονάδες 5)

γ) Να δείξετε ότι $ZH = \frac{3}{2} AB$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Επειδή

$$\left. \begin{array}{l} E = \text{μέσο } \Gamma\Delta, \text{ τότε } \Gamma E = \frac{\Gamma\Delta}{2} = AB \\ AB \parallel \Gamma E \end{array} \right\} \Leftrightarrow AB \parallel \Gamma E \Leftrightarrow AB\Gamma E = \text{παρ/μο}$$

β) Επειδή Ζ και Η είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα, τότε η ΖΗ αποτελεί την διάμεσο του τραπεζίου ΑΒΓΔ, οπότε ισχύει :

$$ZH \parallel AB \parallel \Gamma\Delta$$

Άρα στο τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε ότι ισχύει :

$$\left. \begin{array}{l} Z = \text{μέσο } A\Delta \\ Z\Theta \parallel \Delta E \end{array} \right\} \Leftrightarrow \Theta = \text{μέσο } A E .$$

Όμοια στο τρίγωνο ΒΕΓ :

$$\left. \begin{array}{l} H = \text{μέσο } B\Gamma \\ IH \parallel \Gamma E \end{array} \right\} \Leftrightarrow I = \text{μέσο } B E .$$

γ) Ισχύει ότι :

$$\Delta\Gamma = \Delta E + E\Gamma = AB + AB = 2AB \quad (1)$$

και επειδή η ΖΗ είναι διάμεσος τραπεζίου, τότε :

$$ZH = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} ZH = \frac{AB + 2AB}{2} \Leftrightarrow ZH = \frac{3}{2} AB .$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ :

Για το α ερώτημα χρησιμοποιούμε τα κριτήρια για τα παραλληλόγραμμα στη σελ. 98.

Για το β) ερώτημα χρησιμοποιούμε το θεώρημα II στη σελ. 104.

Για το γ) ερώτημα χρησιμοποιούμε το θεώρημα I για τα τραπέζια στη σελ. 112

Παρόμοια άσκηση βιβλίου : α) Ασκήσεις εμπέδωσης /σελ. 99.

β) Ασκήσεις εμπέδ. 1, 2, 3/σελ. 111 & αποδ. σελ. 111.

γ) Ασκήσεις εμπέδ. 1, 2, 4, 6/σελ. 115 & αποδ. σελ. 115.

ΑΣΚΗΣΗ (4_2797)

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ (1) και έστω AD ύψος και BE διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο Z .

α) Να αποδείξετε ότι :

i) $\hat{B} = 60^\circ$ και $AZ = BZ$.

(Μονάδες 10)

ii) $AD = \frac{3}{2} BZ$.

(Μονάδες 8)

β) Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) i) Έχουμε ότι

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2\hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABD έχουμε ότι :

$$\hat{BAD} + \hat{B} + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{BAD} + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{BAD} = 30^\circ$$

Επίσης,

$$\hat{ABZ} = \frac{\hat{B}}{2} = 30^\circ$$

άρα

$$\hat{BAZ} = \hat{ABZ} \Leftrightarrow \hat{ABZ} : \text{ισοσκελές} \Leftrightarrow AZ = BZ$$

ii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο BZD έχουμε ότι:

$$\hat{ZBD} = \frac{\hat{B}}{2} = 30^\circ \Leftrightarrow ZD = \frac{BZ}{2}$$

Άρα

$$AD = AZ + ZD = BZ + \frac{1}{2} BZ = \frac{3}{2} BZ.$$

β) Επειδή το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο, τότε $\hat{ZAE} = 60^\circ$, οπότε

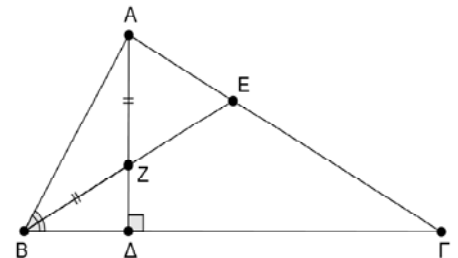
$$\hat{A} = \hat{BAZ} + \hat{ZAE} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ.$$

Από την

$$(1) \Leftrightarrow 90^\circ + \hat{\Gamma} = 2 \cdot 60^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ :

Για το α) και το β) ερώτημα χρησιμοποιούμε τις σχέσεις μεταξύ των γωνιών των τριγώνων.



Για το α ii) ερώτημα χρησιμοποιούμε το πόρισμα για τις ιδιότητες των ορθογωνίων τριγώνων στη σελ. 110.

Παρόμοια άσκηση βιβλίου : β) Άσκηση εμπέδωσης 4 /σελ. 111.

ΑΣΚΗΣΗ (4_2799)

Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου (ΑΔ, ΒΓ, ΓΖ, ΔΗ, ΖΚ, ΗΛ) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (Α, Β, Γ, Δ, Θ, Ε, Μ, Η, Κ, Λ, Ζ). Αν το σημείο Θ, είναι μέσο των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ ενώ το σημείο Ε είναι μέσο των τμημάτων ΓΖ και ΔΗ, να αποδείξετε ότι :

α) Το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο.

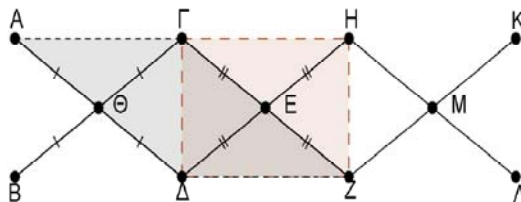
(Μονάδες 10)

β) Τα σημεία Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

α) Στο τετράπλευρο ΓΗΖΔ, έχουμε ότι οι διαγώνιοι ΓΖ και ΔΗ διχοτομούνται, οπότε το ΓΗΖΔ είναι παραλληλόγραμμο (1) και επίσης έχουμε ότι $\Gamma Z = \Delta H$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι το ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο.

β) Όμοια το τετράπλευρο ΑΓΔΒ είναι ορθογώνιο, οπότε, $\widehat{B\Delta\Gamma} = 90^\circ$. Επίσης έχουμε ότι το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο, οπότε : $\widehat{\Gamma\Delta Z} = 90^\circ$, άρα

$$\widehat{B\Delta Z} = \widehat{B\Delta\Gamma} + \widehat{\Gamma\Delta Z} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

οπότε τα Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά.

γ) Επειδή

$$A\Delta = \Gamma Z \Leftrightarrow \frac{A\Delta}{2} = \frac{\Gamma Z}{2} \Leftrightarrow \Theta\Delta = \Gamma E \text{ και } B\Gamma = \Delta H \Leftrightarrow \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\Delta H}{2} \Leftrightarrow \Theta\Gamma = \Delta E$$

έχουμε, ΘΓΕΔ παραλληλόγραμμο, άρα $\Theta\Delta // \Gamma E \Leftrightarrow A\Delta // \Gamma Z$ (1)

Επίσης, $A\Delta = \Gamma Z$ (2), άρα από (1) και (2) έπεται ότι το ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ :

Για το α) ερώτημα χρησιμοποιούμε το ii) κριτήριο των ορθογωνίων στη σελ. 101.

Για το γ) ερώτημα χρησιμοποιούμε το ii) κριτήριο των παραλληλογράμμων στη σελ. 98.

Παρόμοια άσκηση βιβλίου : α) Ασκήσεις εμπέδωσης 1, 2, 3 /σελ. 103.

γ) Ασκήσεις εμπέδωσης /σελ. 99.

ΑΣΚΗΣΗ (4_2802)

Δίνεται ευθεία (ϵ) και δύο σημεία A, B εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην (ϵ). Φέρουμε AΔ, BΓ κάθετες στην (ϵ) και M, N μέσα των AB και ΓΔ αντίστοιχα.

α) Αν τα A, B είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ϵ)

i) να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ABΓΔ είναι, παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

1) $AΔ < BΓ$

(Μονάδες 4)

2) $AΔ = BΓ$

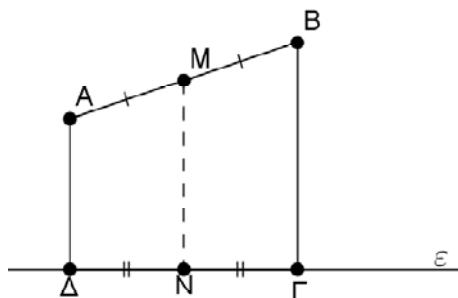
(Μονάδες 4)

ii) να εκφράσετε το τμήμα MN σε σχέση με τα τμήματα AΔ, BΓ στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.

(Μονάδες 6)

β) Αν η ευθεία (ϵ) τέμνει το τμήμα AB στο μέσο του M να βρείτε το είδος του τετράπλευρου AΓBΔ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα M, N ταυτίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9 + 2)



ΛΥΣΗ

α) i)

- Αν $AΔ < BΓ$, τότε επειδή οι AΔ, BΓ είναι κάθετες στην (ϵ) θα έχουμε $AΔ \parallel BΓ$, οπότε το ABΓΔ θα είναι τραπέζιο.
- Αν $AΔ = BΓ$, τότε $AΔ \parallel BΓ$, οπότε το ABΓΔ θα είναι ορθογώνιο.

ii)

- Αν το ABΓΔ είναι τραπέζιο, τότε η MN είναι διάμεσος τραπεζίου, οπότε θα ισχύει:

$$MN = \frac{AΔ + BΓ}{2}$$

- Αν ABΓΔ είναι ορθογώνιο, τότε $MN = AΔ = BΓ$.

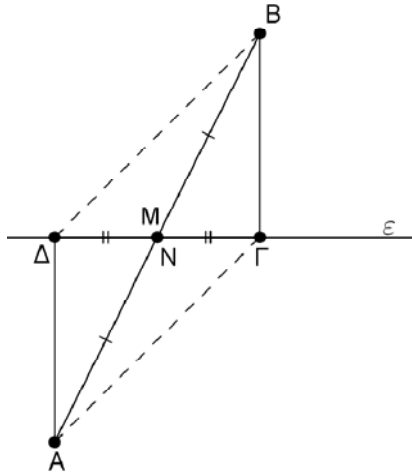
β) Συγκρίνω τα τρίγωνα AMΔ και BMΓ τα οποία έχουν :

$$AM = MB \text{ (υπόθ.)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{M}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{M}\hat{B}\hat{\Gamma} \text{ (εντοσ εναλλάξ των } A\Delta // B\Gamma) \\ \hat{A}\hat{M}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{M}\hat{\Gamma} \text{ (ως κατακορυφήν)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \hat{A}\hat{M}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{M}\hat{\Gamma} \Leftrightarrow A\Delta = B\Gamma$$

$$\hat{A}\hat{M}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{M}\hat{\Gamma} \text{ (ως κατακορυφήν)}$$

Όμως, $A\Delta // B\Gamma$ άρα το $A\Gamma B\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.



Άρα αφού το $A\Gamma B\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, τότε οι διαγώνιοι του διχοτομούνται, οπότε το M είναι το μέσο του $\Delta\Gamma$. Ταυτόχρονα έχουμε και το N μέσο του $\Delta\Gamma$. Άρα τα σημεία M και N ταυτίζονται ($M \equiv N$).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ :

Για το α) και αii) ερωτήματα χρησιμοποιούμε το θεώρημα i) των τραπεζίων στη σελ. 112 και τον ορισμό του ορθογωνίου στη σελ. 100.

Για το ερώτημα β) χρησιμοποιούμε το 2^ο κριτήριο ισότητας τριγώνων στη σελ. 39.

Παρόμοια άσκηση βιβλίου : β) Ασκήσεις εμπέδωσης 3 /σελ. 43.

ΑΣΚΗΣΗ (4_2804)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, τα ύψη του BA και ΓE που τέμνονται στο σημείο H και το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι

i) $MA = ME$

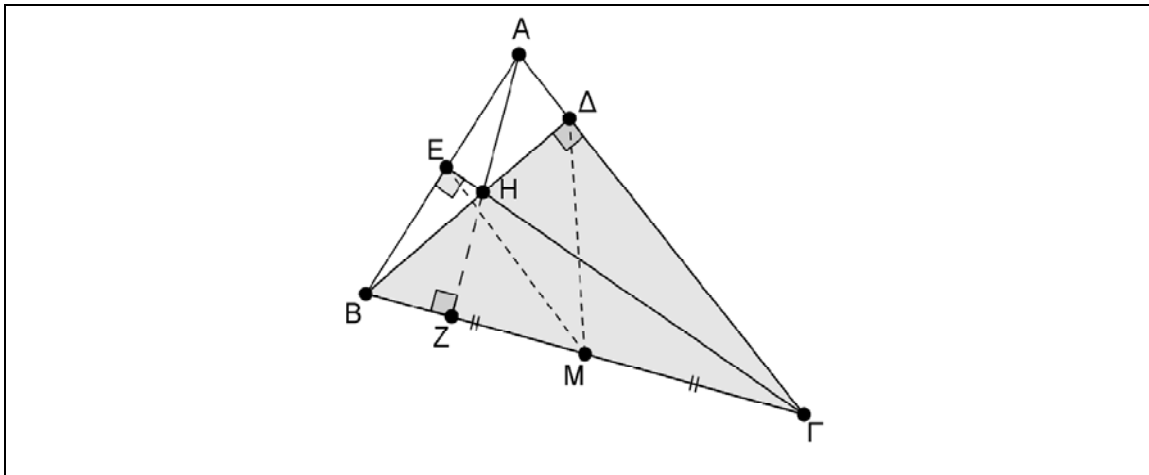
(Μονάδες 10)

ii) Η ευθεία AH τέμνει κάθετα τη $B\Gamma$ και ότι $\hat{A}\hat{H}\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$, όπου $\hat{\Gamma}$ η γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου ABH .

(Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο BΔΓ έχουμε ότι η ΔΜ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα BΓ, οπότε :

$$M\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \quad (1)$$

Αντίστοιχα στο ορθογώνιο τρίγωνο BEΓ έχουμε ότι:

$$ME = \frac{B\Gamma}{2} \quad (2).$$

Οπότε

$$(1), (2) \Leftrightarrow M\Delta = ME.$$

β) Επειδή $B\Delta \perp A\Gamma$ και $\Gamma E \perp AB$, τότε το H είναι το ορθόκεντρο του ABΓ. Άρα η AH προεκτεινόμενη θα αποτελεί το τρίτο ύψος του ABΓ, οπότε $AH \perp B\Gamma$. Για τις γωνίες AHΓ και Γ έχουμε ότι είναι οξείες με πλευρές κάθετες μεταξύ τους, οπότε: $\hat{A}\hat{H}\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$.

γ) Για να βρούμε το ορθόκεντρο του τριγώνου ABH, πρέπει να βρούμε τις κάθετες των τριών πλευρών του από τις απέναντι κορυφές. Δηλαδή στην AB, το ύψος είναι το ΓΕ, στην BH είναι το AΓ και στην AH είναι το BΓ. Δηλαδή τα τρία παραπάνω ύψη διέρχονται από το σημείο Γ, οπότε το Γ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABH.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ : Για το α) ερώτημα χρησιμοποιούμε το θεώρημα i) των ορθ. τριγ. στη σελ. 109

Για το β) ερώτημα χρησιμοποιούμε το λήμμα των ορθόκεντρων στα τριγ. στη σελ. 108.

Παρόμοια άσκηση βιβλίου : α) Ίδια με την ασκ. Εμπ. 3 /σελ. 111, β) Άσκ. Εμπ. 6/σελ. 111.

ΑΣΚΗΣΗ (4_2808)

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ABΓΔ και τις ορθές προβολές Α', Β', Γ', Δ' των κορυφών του Α, Β, Γ, Δ αντίστοιχα, σε μια ευθεία ε.

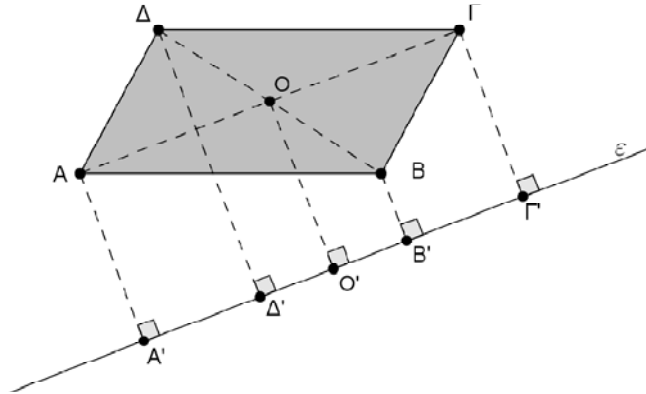
α) Αν η ευθεία ε αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι $AA' = 3$, $BB' = 2$ και $\Gamma\Gamma' = 5$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την ε είναι ίση με 4.

(Μονάδες 8)

ii) Να βρείτε την απόσταση $\Delta\Delta'$.

(Μονάδες 9)



β) Αν η ευθεία διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$, $\Delta\Delta'$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

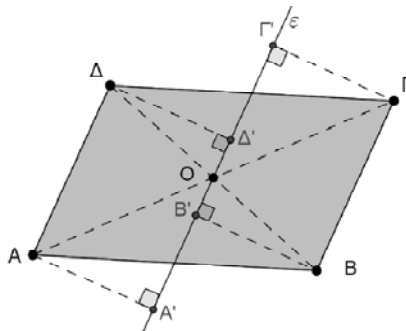
α) i) Στο τετράπλευρο $AA'\Gamma\Gamma'$ έχουμε ότι $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$ (κάθετες στην ευθεία ε). Άρα το $AA'\Gamma\Gamma'$ είναι τραπέζιο. Επίσης έχουμε ότι $OO' \parallel AA' \parallel \Gamma\Gamma'$ και το σημείο O είναι το μέσο του $A\Gamma$ (σημείο τομής των διαγώνιων του $AB\Gamma\Delta$).

Άρα η OO' είναι η διάμεσος του παραπάνω τραπεζίου, οπότε:

$$OO' = \frac{AA' + \Gamma\Gamma'}{2} = \frac{3 + 5}{2} \Leftrightarrow OO' = 4$$

ii) Όμοια το τετράπλευρο $BB'\Delta'\Delta$ είναι τραπέζιο και η OO' είναι η διάμεσος του, οπότε θα ισχύει:

$$OO' = \frac{BB' + \Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow \Delta\Delta' = 2OO' - BB' = 2 \cdot 4 - 2 \Leftrightarrow \Delta\Delta' = 6.$$



β) Συγκρίνοντας τα $\triangle AOA'$ και $\triangle \Gamma O\Gamma'$ έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} OA=OG \text{ (Ο είναι το μέσο της } AG \text{)} \\ \hat{OAA'}=\hat{OGG'} \text{ (εντός εναλλάξ των } AA' // GG') \\ \hat{AOA'}=\hat{GOG'} \text{ (κατακορυφήν)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \hat{AOA'}=\hat{GOG'} \Leftrightarrow AA'=GG'.$$

Όμοια για τα $\triangle BOB'$ και $\triangle O\Delta\Delta'$ έχουμε ότι:

$$\triangle BOB'=\triangle O\Delta\Delta' \Leftrightarrow BB'=\Delta\Delta'.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ : Για τα αι), αιι) ερωτήματα χρησιμοποιούμε το θεώρημα I στη σελ. 112

Για το β) ερώτημα χρησιμοποιούμε το 2^ο κριτήριο ισότητας ορθ. τριγώνων στη σελ. 44.

Παρόμοια άσκηση βιβλίου : α) Αποδ. 10 /σελ. 115, β) Εμπ. 3/σελ. 43.

ΑΣΚΗΣΗ (4_2809)

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του BK και $\Gamma\Lambda$, τα οποία τέμνονται στο I . Αν M και N τα μέσα των BI και ΓI αντίστοιχα, να αποδείξετε:

α) Το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 5)

β) Τα τρίγωνα $B\Gamma\Lambda$ και $\Gamma B K$ είναι ίσα.

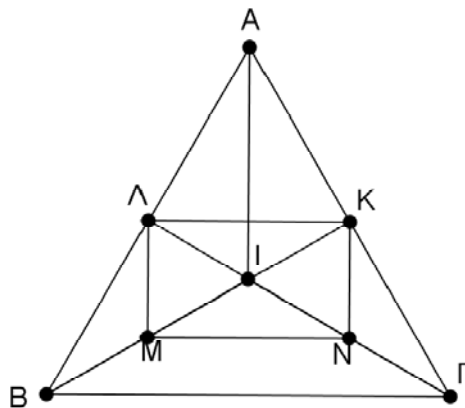
(Μονάδες 5)

γ) Το $A\Gamma$ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.

(Μονάδες 5)

δ) Το τετράπλευρο $M\Lambda K N$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

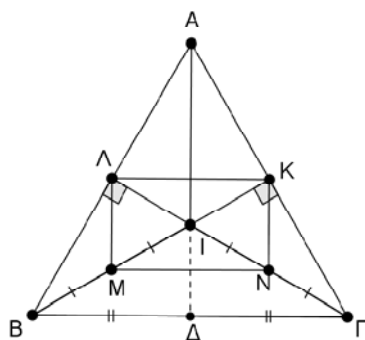
(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ :

α) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $BK\Gamma$ και $B\Lambda\Gamma$ τα οποία έχουν:

$$\left. \begin{array}{l} B\Gamma = \text{κοινή πλευρά} \\ \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ \end{array} \right\} \Leftrightarrow \triangle B K \Gamma = \triangle B \Lambda \Gamma \Leftrightarrow \hat{K B I} = \hat{\Lambda \Gamma B} \Leftrightarrow \triangle B \Gamma I = \text{ισοσκελές}$$



β) Επειδή $\triangle B\hat{I}\Gamma$ ισοσκελές $\Leftrightarrow BI = I\Gamma$, επίσης, $\triangle B\hat{K}\Gamma = \triangle B\hat{L}\Gamma \Leftrightarrow BK = GL$
 άρα,

$$BK - BI = GL - I\Gamma \Leftrightarrow IK = IL$$

Συγκρίνοντας τα τρίγωνα BIL και ΓIK έχουμε τα εξής:

$$\left. \begin{array}{l} BI = I\Gamma \text{ (αποδείχθηκε πριν)} \\ IL = IK \text{ (αποδείχθηκε πριν)} \\ \hat{BIL} = \hat{GIK} \text{ (κατακορυφήν)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \triangle BIL = \triangle GIK$$

γ) Επειδή το I αποτελεί σημείο τομής των υψών του ABΓ, τότε το I είναι το ορθόκέντρο του. Άρα το AI αποτελεί το τρίτο ύψος του τριγώνου ABΓ. Όμως το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο, οπότε το AI είναι ταυτόχρονα και διάμεσος, δηλαδή το AI προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς BΓ.

δ) Τα BK και GL είναι ύψη και διάμεσοι του τριγώνου ABΓ. Στο τρίγωνο AIB έχουμε,

$$\left. \begin{array}{l} L = \text{μέσο } AB \\ M = \text{μέσο } BI \end{array} \right\} \Leftrightarrow ML \parallel \frac{AI}{2}$$

Στο τρίγωνο AIG έχουμε,

$$\left. \begin{array}{l} K = \text{μέσο } AG \\ N = \text{μέσο } IG \end{array} \right\} \Leftrightarrow KN \parallel \frac{AI}{2}$$

άρα

$$ML \parallel KN \Leftrightarrow MΛΚΝ \text{ παρ/μο(1)}$$

Επίσης

$$\left. \begin{array}{l} MI = IN \\ IK = IL \end{array} \right\} \stackrel{(+)}{\Leftrightarrow} MI + IK = IN + IL \Leftrightarrow MK = NL \text{ (2)}$$

Οπότε από

(1) και (2) $\Leftrightarrow$ το MΛΚΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ: Για τα α) ερώτημα χρησιμοποιούμε το θεώρημα I στη σελ. 44

Για το β) ερώτημα χρησιμοποιούμε το 1^ο κριτήριο ισότητας ορθ. τριγώνων στη σελ. 43.

Για το γ) ερώτημα χρησιμοποιούμε το θεώρημα I στη σελ. 104.

Για το δ) ερώτημα χρησιμοποιούμε το κριτήριο II στη σελ. 101.

Παρόμοια άσκηση βιβλίου : α) Εμπ. 1 /σελ. 48, β) Εμπ. 3/σελ. 43 γ) Εμπ. 1,2,3/σελ. 111, δ) Εμπ. 2/σελ. 103.

ΑΣΚΗΣΗ (4_2810)

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα ρ . Τα τμήματα ΓZ και BZ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία Γ και B αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΘH είναι κάθετο στο τμήμα AZ στο Z , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $ZB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

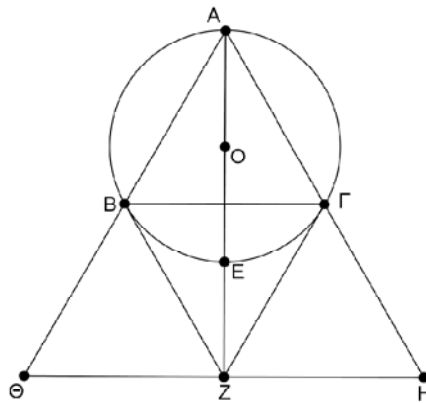
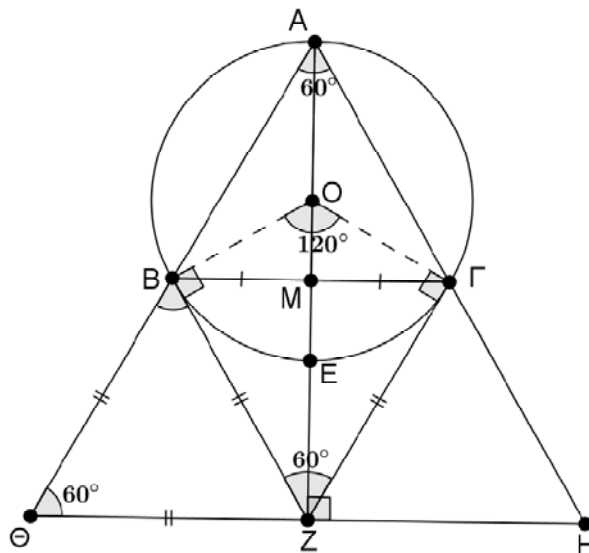
(Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο $ΑΓΖΒ$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο $B\Gamma H\Theta$ είναι τραπέζιο, με $B\Theta = BZ$ και $\Theta H = 2B\Gamma$.

(Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

α) Στο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε ότι η $\hat{A} = 60^\circ$ είναι εγγεγραμμένη στο $\widehat{B\Gamma}$. Άρα η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $\hat{BO\Gamma} = 120^\circ$. Οπότε στο τετράπλευρο $OBZ\Gamma$ θα έχουμε:

$$\hat{\Gamma ZB} = 360^\circ - \hat{ZBO} - \hat{BO\Gamma} - \hat{\Gamma\Gamma O} = 360^\circ - 90^\circ - 120^\circ - 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma ZB} = 60^\circ$$

Επιπλέον τα BZ και ZΓ είναι ίσα μεταξύ τους (εφαπτόμενα τμήματα από το ίδιο σημείο), οπότε: $\hat{BZ\Gamma} = \text{ισόπλευρο}$.

β) Επειδή $\hat{BZ\Gamma} = \text{ισόπλευρο} \Leftrightarrow BZ = Z\Gamma = B\Gamma = AB = A\Gamma$, οπότε το ΑΓΖΒ θα είναι παραλληλόγραμμα (απέναντι πλευρές ίσες) αλλά και ρόμβος (διαδοχικές πλευρές ίσες).

γ) Έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} AZ \perp B\Gamma \text{ (οι διαγ. ρόμβου είναι κάθετες)} \\ AZ \perp \Theta H \text{ (υπόθεση)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow B\Gamma \parallel \Theta H \Leftrightarrow B\Gamma\Theta = \text{τραπεζίο}$$

Επίσης

$$\left. \begin{array}{l} B\Gamma \parallel \Theta H \Leftrightarrow \hat{AB\Gamma} = \hat{B\Theta H} = 60^\circ \text{ (εντός εκτός επι τα αυτά)} \\ BZ \parallel AH \Leftrightarrow \hat{\Theta BZ} = \hat{A} = 60^\circ \text{ (εντός εκτός επι τα αυτά)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \hat{BZ\Theta} = 60^\circ$$

Άρα

$$\hat{BZ\Theta} = \text{ισόπλευρο} \Leftrightarrow BZ = B\Theta = \Theta Z.$$

Επιπλέον θα ισχύει

$$B\Gamma = BZ = \Theta Z (1).$$

Όμοια

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\Gamma ZH} = \text{ισόπλευρο} \Leftrightarrow \Gamma Z = ZH = \Gamma H \\ \text{και } \Gamma Z = B\Gamma \end{array} \right\} \Leftrightarrow B\Gamma = ZH (2)$$

Άρα

$$\Theta H = \Theta Z + ZH \stackrel{(1),(2)}{=} 2B\Gamma.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ: Για τα α) ερώτημα χρησιμοποιούμε το θεώρημα II, στη σελ. 62 και τη σχέση για το άθροισμα γωνιών πολυγώνου, στη σελ. 85.

Για το β) ερώτημα χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες ρόμβου, στη σελ. 101.

Για το γ) ερώτημα χρησιμοποιούμε τον ορισμό τραπεζίου, στη σελ. 112.

Παρόμοια άσκηση βιβλίου: α) Αποδ. 1, 2, 3 / σελ. 63, β) Εμπ. 4 / σελ. 103, Αποδ. 1 / σελ. 104.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3691)

Οι κύκλοι (K, ρ) και (Λ, 3ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Μια ευθεία ε εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου ΚΛ στο σημείο Ε. Φέρουμε από το σημείο Κ παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα ΛΓ στο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο.

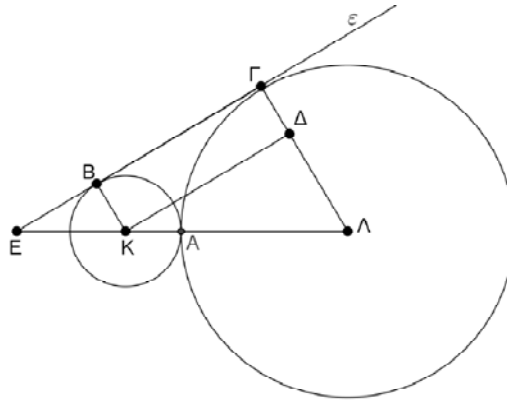
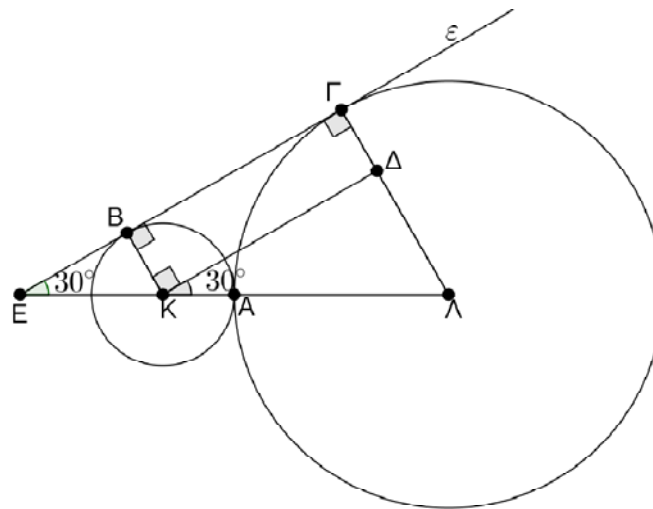
(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔΚΛ είναι 30° .

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τμήμα ΕΛ = 6ρ, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου (K, ρ).

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Επειδή ΒΚ και ΓΛ είναι οι ακτίνες των δύο κύκλων, τότε θα έχουμε ότι οι ΒΚ και ΓΛ θα είναι κάθετες στην ϵ , άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$. Επίσης ισχύει $BK \parallel \Gamma\Lambda$ και $B\Gamma \parallel K\Delta$ (υπόθεση), οπότε ΒΓΔΚ είναι παρ/μο με $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$, επομένως είναι ορθογώνιο.

β) Επειδή το ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο, τότε $BK = \Gamma\Delta = \rho$, άρα
 $\Delta\Lambda = \Gamma\Lambda - \Gamma\Delta \Leftrightarrow \Delta\Lambda = 3\rho - \rho = 2\rho$.

Όμως η διάκεντρος ΚΛ είναι

$$ΚΛ = ΚΑ + ΑΛ \Leftrightarrow ΚΛ = \rho + 3\rho = 4\rho,$$

δηλαδή έχουμε

$$\Delta\Lambda = \frac{ΚΛ}{2}.$$

Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΔΛ, μια κάθετη είναι μισή της υποτείνουσας, οπότε η απέναντι οξεία γωνία είναι 30° , δηλαδή $\hat{\Delta Κ Λ} = 30^\circ$.

γ) Επειδή $\hat{\Delta Κ Λ} = 30^\circ$ και $\hat{\Delta Κ Β} = 90^\circ$, τότε

$$\hat{ΒΚΕ} = 180^\circ - \hat{\Delta Κ Β} - \hat{\Delta Κ Λ} = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ \Leftrightarrow \hat{ΒΚΕ} = 60^\circ$$

Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο BEK έχουμε ότι $\hat{B}EK = 30^\circ$.

Οπότε

$$BK = \frac{KE}{2} \Leftrightarrow KE = 2BK = 2\rho.$$

Άρα

$$EL = EK + KL = 2\rho + 4\rho \Leftrightarrow EL = 6\rho.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ : Για τα α) ερώτημα χρησιμοποιούμε τον ορισμό του ορθογωνίου στη σελ. 100. Για το β) και γ) ερώτημα χρησιμοποιούμε το πόρισμα στη σελ. 110. Παρόμοια άσκηση βιβλίου : α) Εμπ. 1 /σελ. 103, β) Εμπ. 4/σελ. 111

ΑΣΚΗΣΗ (4_3693)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε $DE \perp B\Gamma$ και ονομάζουμε Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα ABΓ και BEZ είναι ίσα.

(Μονάδες 6)

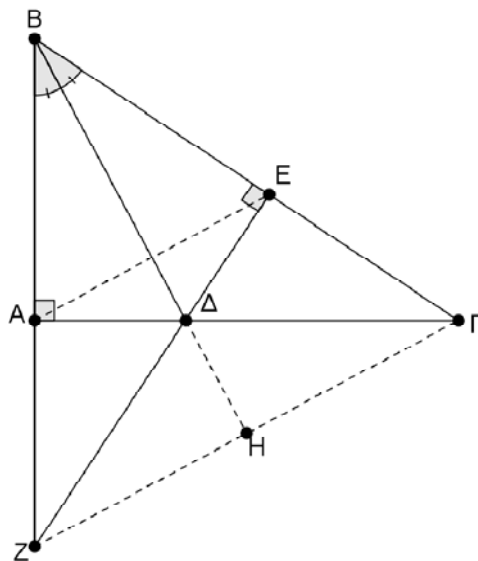
γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων ΑΕ και ΖΓ.

(Μονάδες 6)

δ) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ



α) Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα ABΔ και BΔΕ οπότε:

$$\left. \begin{array}{l} B\Delta = \text{κοινή πλευρά} \\ \hat{A}B\Delta = \hat{A}B\Delta \text{ (υποθ.)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \hat{A}B\Delta = \hat{B}\Delta E \Leftrightarrow AB = BE \Leftrightarrow \hat{A}BE = \text{ισοσκελές}$$

β) Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα ABΓ και BEZ, οπότε:

$$\left. \begin{array}{l} AB=BE \left(\overset{\Delta}{\angle} ABE = \text{ισοσκ.} \right) \\ \overset{\Delta}{\angle} B = \text{κοινή} \\ \overset{\Delta}{\angle} BA\Gamma = \overset{\Delta}{\angle} BEZ = 90^0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \overset{\Delta}{\angle} AB\Gamma = \overset{\Delta}{\angle} BEZ$$

γ) Επειδή $\overset{\Delta}{\angle} ABE$ ισοσκελές, τότε BΔ που είναι διχοτόμος αποτελεί και το ύψος και την διάμεσο στο $\overset{\Delta}{\angle} ABE$, οπότε η BΔ αποτελεί την μεσοκάθετη της AE.

Όμοια

$$\overset{\Delta}{\angle} AB\Gamma = \overset{\Delta}{\angle} BEZ \Leftrightarrow BZ = B\Gamma \Leftrightarrow \overset{\Delta}{\angle} BZ\Gamma = \text{ισοσκελές},$$

οπότε η BΔ που είναι διχοτόμος θα αποτελεί και ύψος και διάμεσος του $\overset{\Delta}{\angle} BZ\Gamma$, οπότε η BΔ είναι μεσοκάθετη της ZΓ.

δ) Έχω ότι

$$\left. \begin{array}{l} AE \perp B\Delta \\ Z\Gamma \perp B\Delta \end{array} \right\} \Leftrightarrow AE // Z\Gamma \Leftrightarrow AEGZ = \text{τραπεζίδιο} (1)$$

Επίσης έχουμε ότι

$$\left. \begin{array}{l} BZ = B\Gamma \\ AB = BE \end{array} \right\} \overset{(-)}{\Leftrightarrow} BZ - AB = B\Gamma - BE \Leftrightarrow AZ = EG (2)$$

Άρα από

$$(1), (2) \Leftrightarrow AEGZ \text{ ισοσκ. τραπέζιο}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ : Για τα α) ερώτημα χρησιμοποιούμε το θεώρημα I, στη σελ. 44.

Για το β) ερώτημα χρησιμοποιούμε τα κριτήρια ισότητας ορθ. τριγ., στη σελ. 44.

Για το γ) ερώτημα χρησιμοποιούμε το Πόρισμα I, στη σελ. 45.

Για το δ) ερώτημα χρησιμοποιούμε τον ορισμό του ισοσκελούς τραπεζίου, στη σελ. 113.

Παρόμοια άσκηση βιβλίου : α) Αποδ. 1 /σελ. 48, β) Εμπ. 2/σελ. 48, δ) Εμπ 2/σελ. 115.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3697)

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές.

Μονάδες 8

β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για

i) Ισόπλευρο τρίγωνο.

Μονάδες 8

ii) Ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

Μονάδες 9

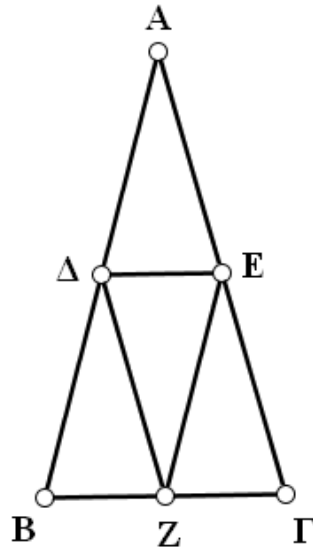
ΛΥΣΗ

α) Τα σημεία Δ και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, επομένως είναι

$$\Delta Z = \frac{1}{2} \frac{A\Gamma}{2}, \text{ όμοια είναι τα σημεία Ζ και Ε μέσα των πλευρών του ίδιου τριγώνου}$$

επομένως είναι $ZE = \frac{1}{2} \frac{AB}{2}$, αφού είναι $AB = A\Gamma$ από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει

ότι $\Delta Z = EZ$, δηλαδή το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές.



άρα «τα μέσα ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές τρίγωνο».

β) i) Όμοια αποδεικνύεται ότι $\Delta Z = ZE = \Delta E = \frac{a}{2}$, όπου $AB = A\Gamma = B\Gamma = a$, άρα «τα μέσα ισόπλευρου τριγώνου είναι ισόπλευρο τρίγωνο».

ii) Από (α) ερώτημα έχουμε ότι το ΔZE είναι ισοσκελές τρίγωνο ως μέσα ισοσκελούς τριγώνου. Οι ευθείες ΑΒ και ΑΓ τέμνονται κάθετα, άρα και οι παράλληλες ευθείες τους ΖΕ και ΔΖ αντίστοιχα θα τέμνονται κάθετα, οπότε η γωνία ΔΖΕ είναι ορθή και το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ορθογώνιο.

Επομένως,

«τα μέσα ισοσκελούς και ορθογώνιου τριγώνου σχηματίζουν ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο».

ΑΣΚΗΣΗ (4_3698)

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Από το Β φέρνουμε την κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΓΔ στο Ε. Επίσης φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει την ΒΔ στο σημείο Λ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma} = 45^\circ$

Μονάδες 8

β) $B\Delta = AE$

Μονάδες 8

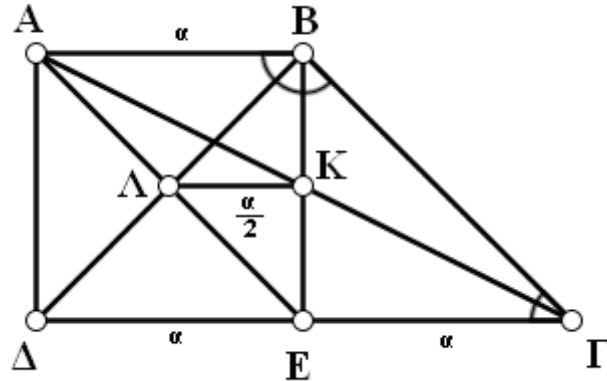
γ) $K\Lambda = \frac{1}{4} \Delta\Gamma$

ΛΥΣΗ

α) Αφού είναι $AB \parallel BG$, τότε

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \stackrel{\hat{B}=3\hat{\Gamma}}{\Leftrightarrow} 3\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 45^\circ$$

β) Αφού είναι $BE \perp \Gamma\Delta$ και $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ το τετράπλευρο $ABE\Delta$ έχει τρεις ορθές γωνίες, συνεπώς είναι ορθογώνιο και οι διαγώνιες του είναι ίσες, δηλαδή $BD = AE$



γ) Αν ονομάσουμε $AB = \alpha$, τότε $\Gamma\Delta = 2AB = 2\alpha$ και από το ορθογώνιο $ABE\Delta$ έχουμε ότι $\Delta E = AB = \alpha$, επομένως θα είναι $E\Gamma = \alpha$. Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ έχει $AB \parallel \Gamma E$ συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο, και το σημείο K είναι το κέντρο του άρα το K είναι το μέσο της AG , ακόμα το σημείο Λ είναι το μέσο της AE εφόσον και το Λ είναι το κέντρο του ορθογωνίου $ABE\Delta$. Δηλαδή τα σημεία Λ, K στο τρίγωνο $EA\Gamma$ συνδέουν τα μέσα των πλευρών του AE και AG , τότε $K\Lambda = \frac{1}{4} \Delta\Gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3699)

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο

Μονάδες 8

β) $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{Z}\hat{\Gamma}$

Μονάδες 8

γ) Οι ΔE και BZ διχοτομούν τη διαγώνιο AG του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των δύο παραλλήλων πλευρών του, επομένως έχουμε:

$$AB \parallel \Gamma\Delta \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \parallel \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow EB \parallel \Delta Z$$

επομένως και το τετράπλευρο ΔEBZ είναι επίσης παραλληλόγραμμο.

β) Αφού είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ τότε

$$\hat{A}\hat{E}\Delta = \hat{\omega} \quad (1)$$

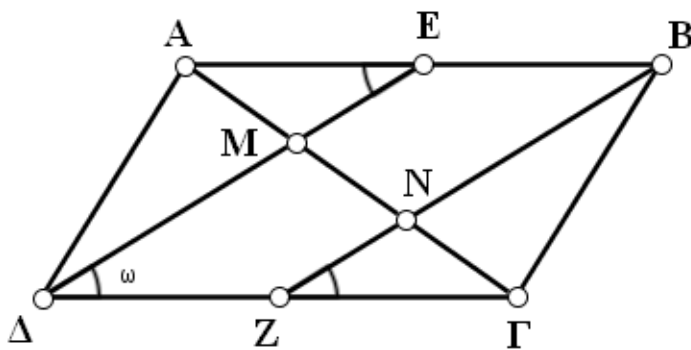
ως εντός εναλλάξ και από το παραλληλόγραμμο ΔEBZ είναι

$\Delta E \parallel BZ$ επομένως έχουμε

$$\hat{\omega} = \hat{B}\hat{Z}\Gamma \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2)

προκύπτει ότι $\hat{A}\hat{E}\Delta = \hat{B}\hat{Z}\Gamma$



γ) Τα τρίγωνα AEM και ZNG έχουν: $AE = ZG$ ως μισά των ίσων πλευρών του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, $\hat{A}\hat{E}\Delta = \hat{B}\hat{Z}\Gamma$ από το β ερώτημα και $\hat{A}\hat{E}M = \hat{N}\hat{Z}\Gamma$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την διαγώνιο AG . Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα από όπου προκύπτει ότι $AM = NG$ (1)

Επιπλέον στο τρίγωνο ABN το σημείο E είναι το μέσο της AB και $EM \parallel BN$ από το παραλληλόγραμμο ΔEBZ άρα και το σημείο M είναι το μέσο του AN , δηλαδή $AM = MN$ (2).

Τέλος από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $AM = MN = NG$, δηλαδή οι ΔE και BZ διχοτομούν τη διαγώνιο AG του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3700)

Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}A = 30^\circ$ και O το κέντρο του. Φέρουμε $\Delta E \perp A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma$ χωρίζεται από τη ΔE και τη διαγώνιο ΔB σε τρεις ίσες γωνίες.

Μονάδες 13

β) Φέρουμε κάθετη στη $A\Gamma$ στο σημείο O η οποία τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο Z . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα AZO και $AB\Gamma$ είναι ίσα.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Από το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ έχουμε

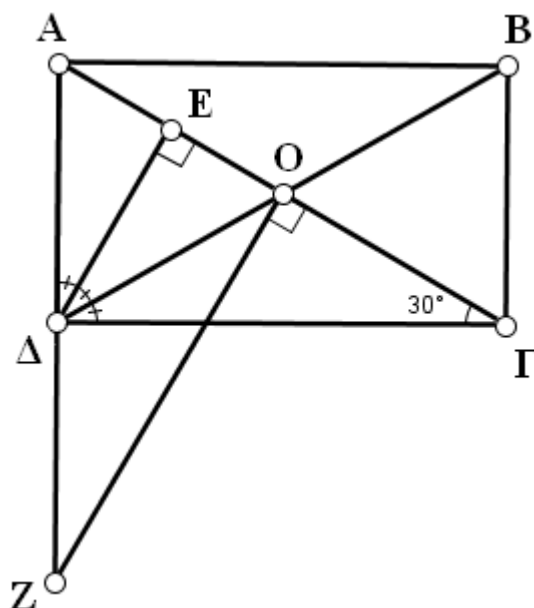
$$AB = \Gamma\Delta \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Rightarrow O\Delta = O\Gamma$$

δηλαδή το τρίγωνο $\Delta O\Gamma$ είναι ισοσκελές τότε $\hat{O}\hat{\Delta}\Gamma = 30^\circ$ (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}A = 30^\circ$, και η ΔO διάμεσός του τότε

$$A\Delta = \frac{A\Gamma}{2} = \Delta O = AO$$

Συνεπώς το τρίγωνο $AO\Delta$ είναι ισόπλευρο, τότε το ύψος του ΔE είναι και διχοτόμος του, άρα $\hat{A}\hat{\Delta}E = \hat{E}\hat{\Delta}O = 30^\circ$ (2)



Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A}\hat{L}E = \hat{E}\hat{L}O = \hat{O}\hat{L}\Gamma = 30^\circ$, δηλαδή η γωνία $\hat{A}\hat{L}\Gamma$ χωρίζεται από τη ΔΕ και τη διαγώνιο ΔΒ σε τρεις ίσες γωνίες.

β) Τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ είναι ορθογώνια γιατί η $\hat{A}\hat{O}Z = 90^\circ$ από κατασκευή και $\hat{A}\hat{L}\Gamma = 90^\circ$ εφόσον το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Επιπλέον έχουν την γωνία $\hat{\Delta}\hat{A}\Gamma$ κοινή και είναι $AD = AO$ εφόσον το τρίγωνο ΑΟΔ είναι ισόπλευρο (α ερώτημα), άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3701)

Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύει $AB > AD$, να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{Z}\hat{\Gamma}$

Ισχυρισμός 3: Οι ΔΕ και ΒΖ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$.

α) Στη περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.

Μονάδες 16

β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) **Ισχυρισμός 1:** «Αληθής» Πράγματι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των δύο παραλλήλων πλευρών του, επομένως

έχουμε: $AB \parallel \Gamma\Delta \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow EB \parallel \Delta Z$, επομένως και το τετράπλευρο

ΔΕΒΖ είναι επίσης παραλληλόγραμμο.

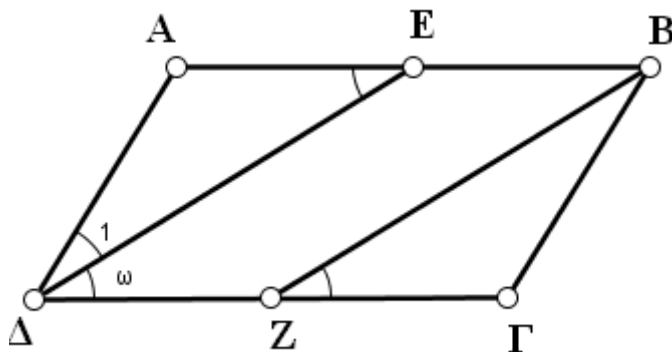
Ισχυρισμός 2: «Αληθής»

Πράγματι, αφού είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$

$$\text{τότε } \hat{A}\hat{E}\Delta = \hat{\omega} \quad (1)$$

ως εντός εναλλάξ και από το παραλληλόγραμμο ΔEBZ είναι $\Delta E \parallel BZ$ επομένως έχουμε

$$\hat{\omega} = \hat{B}\hat{Z}\Gamma \quad (2)$$



Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A}\hat{E}\Delta = \hat{B}\hat{Z}\Gamma$

β) Ισχυρισμός 3: «Ψευδής για κάθε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με E και Z μέσα των παραλλήλων πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ και $AB > A\Delta$ »

Αν υποθέσουμε ότι οι ΔE και BZ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ τότε θα είχαμε: $\hat{\Delta}_1 = \hat{\omega}$. Όμως είναι $\hat{\omega} = \hat{A}\hat{E}\Delta$, άρα θα είναι και $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}\hat{E}\Delta$, δηλαδή το

τρίγωνο ΔAE είναι ισοσκελές, επομένως θα έπρεπε να είναι $A\Delta = AE = \frac{AB}{2}$. Η

τελευταία σχέση, εφόσον $A\Delta < AB$ μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής για οποιοδήποτε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$.

Με βάση τα παραπάνω ο ισχυρισμός 3 καθίσταται αληθής πρόταση εφόσον το παραλληλόγραμμο έχει την μια πλευρά του διπλάσια της άλλης.

ΣΧΟΛΙΟ

Η εκφώνηση είναι ασαφής, ζητείται αν ο τρίτος ισχυρισμός είναι αληθής ή ψευδής, όμως οι ΔE και BZ άλλοτε είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών του παραλληλογράμμου και άλλοτε δεν είναι. Με άλλα λόγια ο τρίτος ισχυρισμός δεν είναι μαθηματική πρόταση γιατί δεν μπορεί να χαρακτηριστεί με σαφήνεια αν είναι αληθής ή ψευδής.

Πρόταση: να αναδιατυπωθεί το ερώτημα ως εξής:

« Για οποιοδήποτε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, οι ΔE και BZ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ »

ΑΣΚΗΣΗ (4_3702)

Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ επιπλέον ισχύουν $AB > A\Delta$ και γωνία A αμβλεία, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα ΔAE και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.

Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα ΔAE και $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελή.

α) Στη περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.

Μονάδες 16

β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

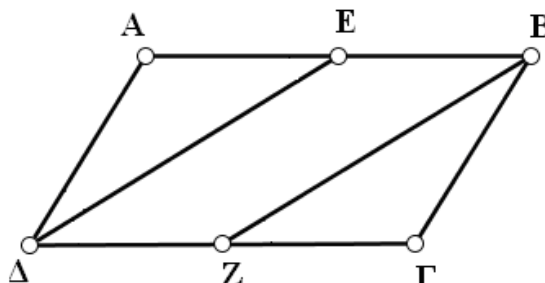
Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Ισχυρισμός 1: «Αληθής» Πράγματι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των δύο παραλλήλων πλευρών του, επομένως έχουμε:

$$AB \parallel \Gamma\Delta \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow EB \parallel \Delta Z,$$

επομένως και το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι επίσης παραλληλόγραμμο.



Ισχυρισμός 2: «Αληθής» Πράγματι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ έχουν: $AD = BG$ αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ για τον ίδιο λόγο και $AE = \Gamma Z$ ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΓΔ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Επομένως τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.

β) Ισχυρισμός 3: «Ψευδής για κάθε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ε και Ζ μέσα των παραλλήλων πλευρών του ΑΒ και ΓΔ, γωνία Α αμβλεία και $AB > AD$ »

Αν υποθέσουμε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, τότε θα είχαμε $AD = AE = \frac{AB}{2}$

Η τελευταία σχέση, εφόσον $AD < AB$ μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής για οποιοδήποτε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Με βάση τα παραπάνω ο ισχυρισμός 3 καθίσταται αληθής πρόταση εφόσον το παραλληλόγραμμο έχει την μια πλευρά του διπλάσια της άλλης.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3703)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΗ κατά τμήμα ΗΔ = ΑΗ και τη διάμεσό του ΑΜ κατά τμήμα ΜΕ = ΑΜ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = BD = GE$

Μονάδες 8

β) $\hat{GBD} = \hat{BGE}$

Μονάδες 8

γ) Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΒΗ είναι διάμεσος και ύψος, επομένως το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, τότε θα είναι $AB = BD$ (1)

Επιπλέον τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΓΜΕ έχουν:

$AM = ME$ από υπόθεση,

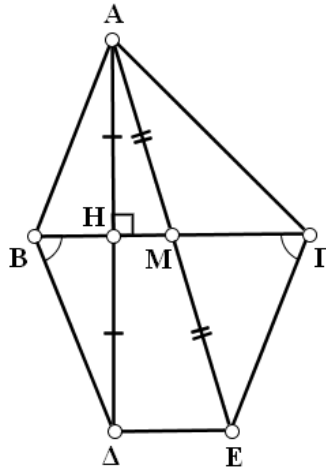
$BM = MG$ αφού η ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και

$\hat{A}\hat{M}\hat{B} = \hat{\Gamma}\hat{M}\hat{E}$ ως κατά κορυφήν γωνίες.

Επομένως τα τρίγωνα ABM και ΓME είναι ίσα, άρα $AB = GE$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $AB = B\Delta = \Gamma E$.

β) Είναι $\Gamma\hat{B}\Delta = \text{A}\hat{B}\Gamma$ γιατί η ΒΗ είναι και διχοτόμος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΔ



Επιπλέον $\widehat{A\hat{B}\Gamma} = \widehat{B\hat{\Gamma}E}$ από την ισότητα των τριγώνων ABM και ΓME , επομένως θα είναι και $\widehat{\Gamma\hat{B}\Delta} = \widehat{B\hat{\Gamma}E}$.

γ) Στο τρίγωνο ΔΑΕ τα σημεία Η και Μ είναι από υπόθεση τα μέσα των πλευρών του ΑΔ και ΑΕ, τότε έχουμε $HM \parallel \frac{DE}{2}$ ή $BΓ \parallel ΔΕ$, επομένως το τετράπλευρο ΒΓΕΔ

είναι τραπέζιο, επιπλέον είναι $\Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{E}$ από το β ερώτημα, επομένως το τραπέζιο BΓEΔ είναι ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ (4 3704)

Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δύο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο O και τυχαίο σημείο M του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες

α) Αν M_1 είναι το συμμετρικό του M ως προς την ε_1 και M_2 το συμμετρικό του M_1 ως προς την ε_2 , να αποδείξετε ότι:

I. $\mathbf{OM} = \mathbf{OM}_1$

Μονάδες 6

Π. Τα σημεία Μ, Ο και Μ₂ είναι συνευθειακά.

Μονάδες 8

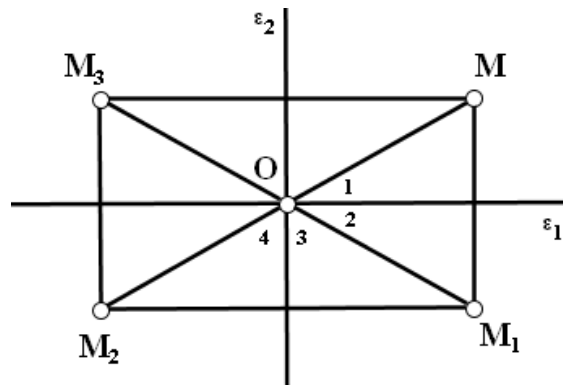
III Το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο.

Μονάδες. 6

β) Αν το M_3 είναι το συμμετρικό σημείο του M_2 ως προς την ε_1 , τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ



α) I.Επειδή το σημείο M_1 είναι το συμμετρικό του M ως προς την ε_1 , τότε αυτή είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος MM_1 , άρα $OM = OM_1$

II.Λόγω της συμμετρίας και η ευθεία ε_2 είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος M_1M_2 , επομένως τα τρίγωνα MOM_1 και M_1OM_2 είναι ισοσκελή.

Τα ύψη των ισοσκελών τριγώνων είναι και διχοτόμοι επομένως έχουμε τις ισότητες των γωνιών: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ και $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$

Όμως $\hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 90^\circ \Rightarrow 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 180^\circ \Rightarrow \hat{O}_2 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_3 = 180^\circ$ και λόγω των παραπάνω σχέσεων έχουμε: $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 180^\circ$ που σημαίνει ότι η MM_2 είναι ευθεία, δηλαδή τα σημεία M , O και M_2 είναι συνευθειακά.

III. Από τα ισοσκελή τρίγωνα MOM_1 και M_1OM_2 έχουμε ότι $OM_1 = OM = OM_2$

δηλαδή $OM_1 = \frac{MM_2}{2}$ και η OM_1 είναι διάμεσος του τριγώνου MM_1M_2 , άρα το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο στο M_1 .

β)Με όμοιο τρόπο όπως στο α) II ερώτημα τα σημεία M_3 , O και M_1 είναι επίσης συνευθειακά και το τρίγωνο OM_2M_3 είναι ισοσκελές, επομένως έχουμε:

$OM_3 = OM_2 = OM_1 = OM$, συνεπώς στο τετράπλευρο $MM_1M_2M_3$ οι διαγώνιες του διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3705)

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ABE , $B\Gamma Z$, $\Gamma\Delta H$, $\Delta A\Theta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 15

β) Αν το αρχικό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, τότε το $EZH\Theta$ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

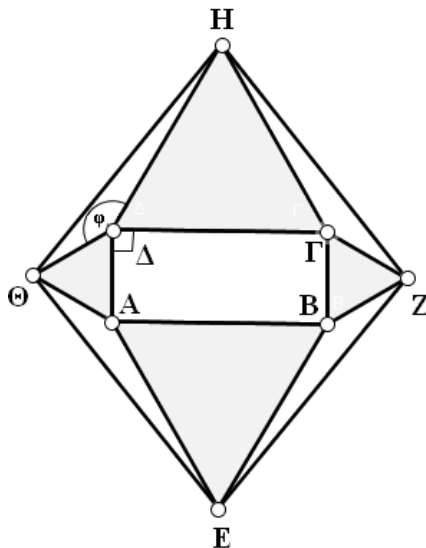
α)Τα τρίγωνα $\Theta\Delta H$, $H\Gamma Z$, ZBE και ΘAE έχουν $\Delta H = H\Gamma = BE = AE$ από τα σχηματιζόμενα ίσα ισόπλευρα τρίγωνα, $\Delta\Theta = \Gamma Z = BZ = \Delta A$ από τα σχηματιζόμενα ίσα ισόπλευρα τρίγωνα και μεταξύ των ίσων πλευρών η περιεχόμενη αμβλεία γωνία σε κάθε τρίγωνο είναι ίση με

$$\varphi = 360^\circ - (90^\circ + 60^\circ + 60^\circ)$$

«Θέμα Δ»

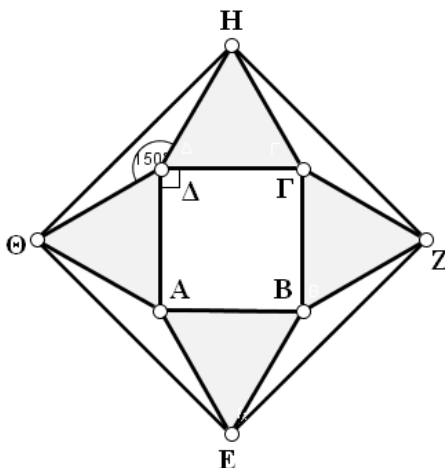
αφού το ορθογώνιο τρίγωνο έχει ορθές γωνίες και τα ισόπλευρα γωνίες ίσες με 60° η κάθε μία.

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα, τότε θα είναι $\Theta H = HZ = ZE = \Theta E$, συνεπώς το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι ρόμβος.



β) Αν το αρχικό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, τότε τα ίσα τρίγωνα $\Theta\Delta H$, $H\Gamma Z$, ZBE και ΘAE θα είναι ισόπλευρα, και η γωνία $\hat{\phi}$ θα είναι ίση με:

$$360^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 150^\circ$$



Στην περίπτωση αυτή η γωνία $H\hat{\Theta}\Delta$ καθώς και η γωνία $A\hat{\Theta}E$ είναι ίσες με

$$\frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ, \text{ άρα η γωνία } E\hat{\Theta}H \text{ είναι ίση με } 15^\circ + 60^\circ + 15^\circ = 90^\circ.$$

Όμοια και οι υπόλοιπες γωνίες του τετραπλεύρου $EZH\Theta$ είναι ορθές και το τετράπλευρο αυτό είναι τετράγωνο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3706)

Θεωρούμε ευθεία (ϵ) και δύο σημεία A και B εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ϵ) έτσι ώστε, η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην (ϵ). Έστω A' και B' τα συμμετρικά σημεία των A και B αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ϵ).

α) Αν η μεσοκάθετος του AB τέμνει την ευθεία (ϵ) στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το K ανήκει και στην μεσοκάθετο του $A'B'$.

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABB'A'$ είναι τραπέζιο.

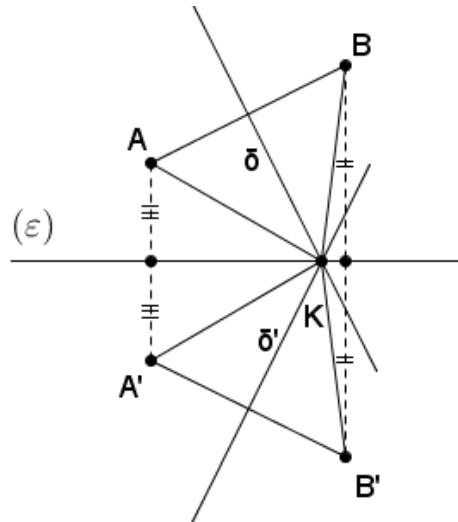
Μονάδες 8

γ) Να βρείτε τη σχέση των ευθειών AB και της ευθείας (ε) ώστε το τετράπλευρο $ABB'A'$ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

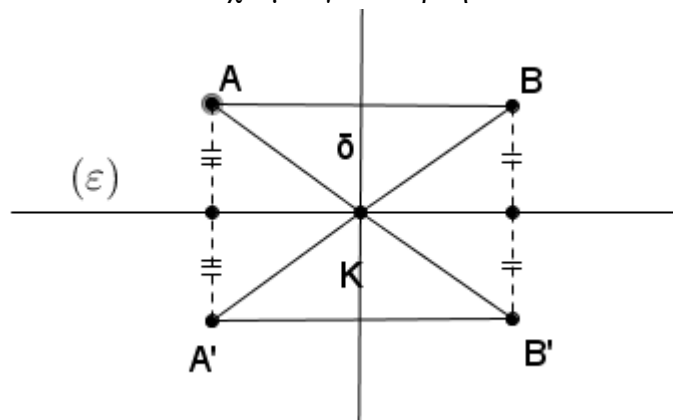
α) Εφόσον το σημείο K ανήκει στη μεσοκάθετο δ του ευθυγράμμου τμήματος AB είναι $KA = KB$ (1)



Επειδή τα σημεία A' και B' είναι συμμετρικά των A και B ως προς την ευθεία (ε) είναι $KA = KA'$ και $KB = KB'$, τότε η σχέση (1) γράφεται $KA' = KB'$ δηλαδή το σημείο K ανήκει και στην μεσοκάθετο δ' του ευθυγράμμου τμήματος $A'B'$.

β) Είναι $AA' \parallel BB'$ γιατί τα τμήματα αυτά είναι κάθετα στην ευθεία (ε) , συνεπώς το τετράπλευρο $ABB'A'$ είναι τραπέζιο.

γ) Είναι $AA' \parallel BB'$, επομένως για να είναι το τετράπλευρο $ABB'A'$ ορθογώνιο θα πρέπει να είναι $AB \parallel A'B'$ και να έχει μια γωνία ορθή.



Πράγματι αν είναι $AB \parallel (\varepsilon)$ τότε λόγω συμμετρίας θα είναι και $A'B' \parallel (\varepsilon)$, επομένως έχουμε ότι $AB \parallel A'B'$. Επιπλέον είναι $\angle A'AB = 90^\circ$ γιατί η AA' είναι κάθετη στην (ε) άρα κάθετη και στην παράλληλή της AB . Επομένως το τετράπλευρο $ABB'A'$ είναι ορθογώνιο αν είναι $AB \parallel (\varepsilon)$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3709)

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με τη γωνία Γ ίση με 30° και έστω K, Λ τα μέσα των διαγώνιων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔA και ΓB προεκτείνόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = 2AE$

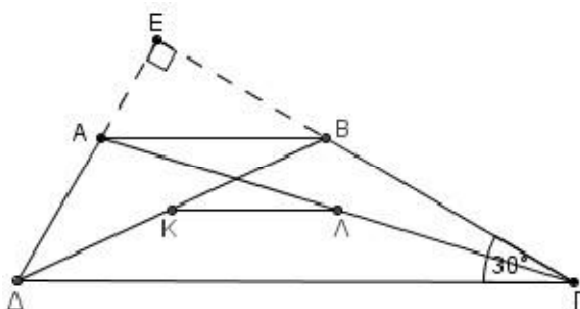
Μονάδες 10

β) $K\Lambda = A\Lambda$

Μονάδες 10

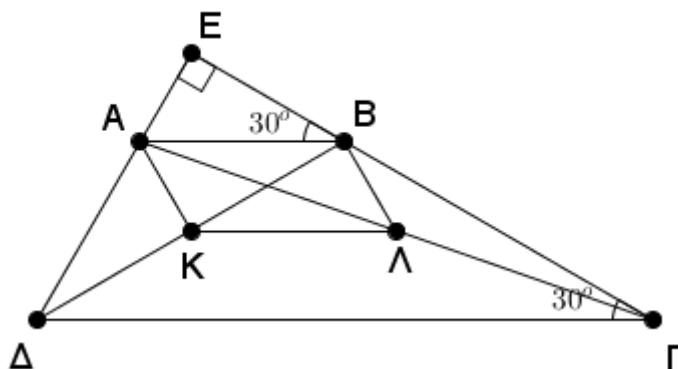
γ) Σε ποια περίπτωση το $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

**ΛΥΣΗ**

α) Επειδή $AB \parallel \Gamma\Delta$ θα είναι $\widehat{EBA} = \widehat{\Gamma} = 30^\circ$, τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο EAB θα είναι

$$AE = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Rightarrow \Gamma\Delta = 2AB.$$



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AE\Gamma$ είναι $\widehat{\Gamma} = 30^\circ$, τότε

$$\Delta E = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Rightarrow \Gamma\Delta = 2\Delta E$$

Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι τα σημεία K και Λ μέσα των διαγώνιων του, επομένως έχουμε:

$$K\Lambda = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2} = \frac{2\Delta E - 2AE}{2} = \Delta E - AE = A\Lambda$$

γ) Το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο αν είναι $AB \parallel K\Lambda$. Όμως είναι σε κάθε περίπτωση $AB \parallel K\Lambda$, επομένως αρκεί να είναι $K\Lambda = AB$. Από τα προηγούμενα ερωτήματα αρκεί να είναι $A\Delta = AB$, δηλαδή για να είναι το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ παραλληλόγραμμο αρκεί η μια βάση του τραpezίου να είναι ίση με μια μη παράλληλη πλευρά του.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3711)

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του AH . Έστω Δ και E τα συμμετρικά σημεία του H ως προς τις ευθείες AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

I. $AH = A\Delta = AE$

Μονάδες 6

II. Η γωνία EHA είναι ορθή.

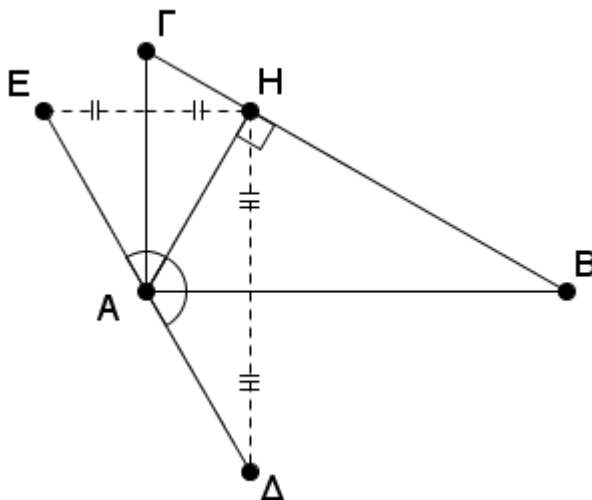
Μονάδες 6

III. Τα σημεία E , A και Δ είναι συνευθειακά.

Μονάδες 6

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και EHA είναι ίσα; Αν ναι, να το αποδείξετε. Αν όχι, κάτω από ποιες αρχικές προϋποθέσεις θα μπορούσε να είναι ίσα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Επειδή το σημείο Δ είναι το συμμετρικό του H ως προς την AB , η AB είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος $H\Delta$, επομένως είναι $AH = A\Delta$. Αντίστοιχα η $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος EH επομένως είναι $AH = AE$.

Τελικά προκύπτει ότι $AH = A\Delta = AE$.

β) Λόγω συμμετρίας έχουμε τις ισότητες $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ και $\hat{A}_3 = \hat{A}_4$, επιπλέον έχουμε:

$\hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 90^\circ \Rightarrow 2\hat{A}_2 + 2\hat{A}_3 = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_3 = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 = 180^\circ$
 όποτε τα σημεία E , A και Δ είναι συνευθειακά.

γ) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Delta$ δεν είναι ίσα σε κάθε περίπτωση, αφού για παράδειγμα οι πλευρές τους AB και ΔH δεν είναι πάντοτε ίσες. Στα τρίγωνα όμως αυτά ισχύουν οι ισότητες $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{H}\hat{\Delta}\hat{E}$ και $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = \hat{\Delta}\hat{E}\hat{H}$ γιατί είναι ζεύγη οξείων γωνιών με πλευρές κάθετες. Επιπλέον το τρίγωνο $E\Delta$ είναι ορθογώνιο στο H γιατί $EH \perp H\Delta$ εφόσον και οι παράλληλές τους AB και $A\Gamma$ είναι κάθετες.

Για να είναι τα παραπάνω τρίγωνα ίσα πρέπει να έχουν ίσες και τις υποτείνουσες τους δηλαδή να είναι $E\Delta = B\Gamma$.

Όμως $E\Delta = 2AH$ αφού η AH είναι διάμεσος του τριγώνου $E\Delta$, άρα αρκεί να είναι και $B\Gamma = 2AH \Rightarrow AH = \frac{B\Gamma}{2}$.

Δηλαδή το ύψος AH του τριγώνου $AB\Gamma$ να είναι και διάμεσός του, που συμβαίνει μόνο όταν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3713)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$, και η διχοτόμος BA της γωνίας $\hat{B}$. Από το μέσο M της $A\Gamma$ φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο BA που τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο N . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές

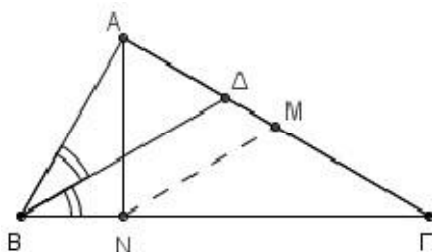
Μονάδες 5

β) Το τρίγωνο $M\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 10

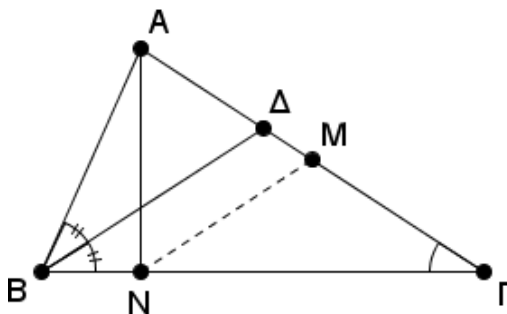
γ) $AN \perp B\Gamma$

Μονάδες 10



ΛΥΣΗ

α) Είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma} \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} = \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}$, άρα το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.



β) Είναι $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{M}\hat{N}\hat{\Gamma}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΒΔ και ΜΝ που τέμνονται από την ΒΓ και λόγω του ότι $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}$ είναι και $\hat{M}\hat{N}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές.

γ) Στο τρίγωνο ΑΝΓ είναι

$$NM = M\Gamma \Rightarrow NM = \frac{AG}{2},$$

γιατί το Μ είναι το μέσο της ΑΓ, άρα το τρίγωνο ΑΝΓ είναι ορθογώνιο στο Ν, τότε $AN \perp B\Gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3715)

Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π_1 και Π_2 :

Π_1 : Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

Π_2 : Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π_1 και Π_2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 20

β) Στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

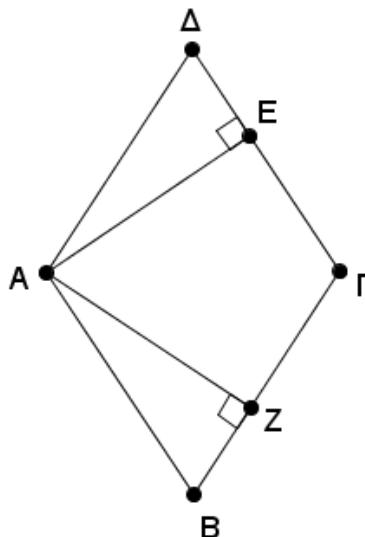
α) Για την πρόταση Π_1 , υποθέτουμε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος και θα αποδείξουμε ότι οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του ΑΕ και ΑΔ είναι ίσες.

Πράγματι τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΖ έχουν:

$\hat{A}\hat{D}\hat{E} = \hat{A}\hat{B}\hat{Z}$ ως απέναντι γωνίες του ρόμβου ΑΒΓΔ και

$AD = AB$ ως διαδοχικές πλευρές του,

άρα είναι ίσα, επομένως έχουν και $AE = AZ$, δηλαδή οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του ρόμβου ΑΒΓΔ είναι ίσες.



Για την πρόταση Π_2 υποθέτουμε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο με τις αποστάσεις των απέναντι πλευρών του AE και AZ ίσες και θα αποδείξουμε ότι είναι ρόμβος.

Πράγματι τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta E$ και ABZ έχουν:

$\hat{A}\Delta E = \hat{A}BZ$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου και

$AE = AZ$ από υπόθεση,

άρα είναι ίσα, επομένως έχουν και $A\Delta = AB$ οπότε το παραλληλόγραμμο έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, συνεπώς είναι ρόμβος.

β) Ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος αν, και μόνο αν, οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3717)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω K, Λ τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. α) Θεωρούμε τυχαίο σημείο M στο εσωτερικό του τριγώνου και Δ, E τα συμμετρικά του M ως προς τα K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$.

Μονάδες 15

β) Στη περίπτωση που το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, και Δ, E τα συμμετρικά του M ως προς τα K και Λ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, A και E είναι συνευθειακά.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

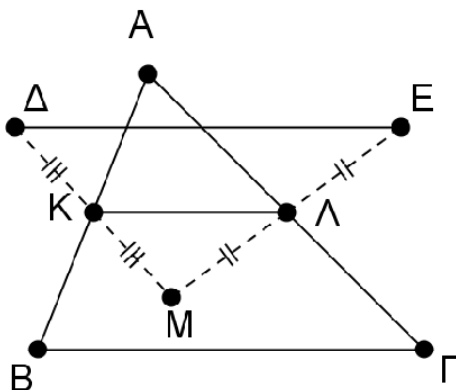
α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα σημεία K, Λ είναι τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, επομένως είναι

$$K\Lambda = // \frac{B\Gamma}{2} \text{ ή } K\Lambda \parallel B\Gamma$$

Αντίστοιχα στο τρίγωνο ΔME τα σημεία K, Λ είναι επίσης μέσα των πλευρών του, αφού τα σημεία Δ, E είναι συμμετρικά του M ως προς τα σημεία K, Λ επομένως είναι

$$K\Lambda = // \frac{\Delta E}{2} \text{ ή } K\Lambda \parallel \Delta E.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$.



β) Αν το σημείο M είναι το μέσο της $B\Gamma$, τότε

$$ΚΛ = // \frac{ΒΓ}{2} = // ΒΜ,$$

επομένως το τετράπλευρο ΚΛΜΒ είναι παραλληλόγραμμο.

Αφού το ΚΛΜΒ είναι παραλληλόγραμμο, τότε

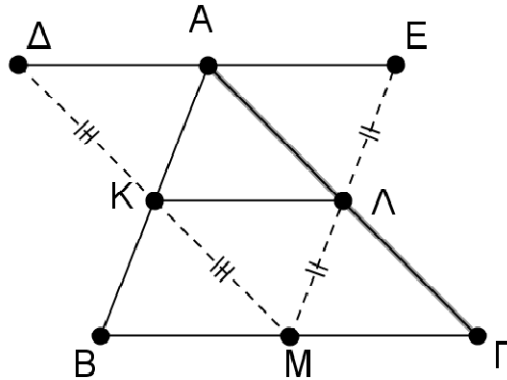
$ΚΒ = // ΛΜ \Rightarrow ΑΚ = // ΛΜ$ άρα και το τετράπλευρο ΑΛΜΚ είναι παραλληλόγραμμο.

Αφού το ΑΛΜΚ είναι παραλληλόγραμμο, τότε

$ΚΜ = // ΑΛ \Rightarrow ΔΚ = // ΑΛ$, άρα και το τετράπλευρο ΑΛΚΔ είναι παραλληλόγραμμο, τότε $ΑΔ // ΚΛ$ (1)

Αντίστοιχα και το τετράπλευρο ΑΕΛΜ είναι παραλληλόγραμμο, τότε $ΑΕ // ΚΛ$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι τα σημεία Δ, Α και Ε είναι συνευθειακά, αφού από το σημείο Α μια μόνο παράλληλη διέρχεται προς την ΒΓ.



ΑΣΚΗΣΗ (4_3718)

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος είναι ρόμβος. Θεωρούμε $AZ \perp ΓΔ$ και $ΑΕ \perp ΓΒ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές.

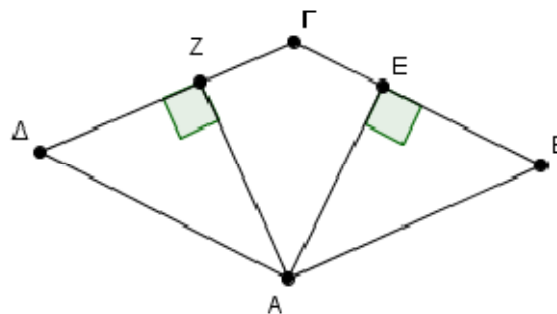
Μονάδες 6

β) Η ευθεία ΑΓ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΖΕ

Μονάδες 9

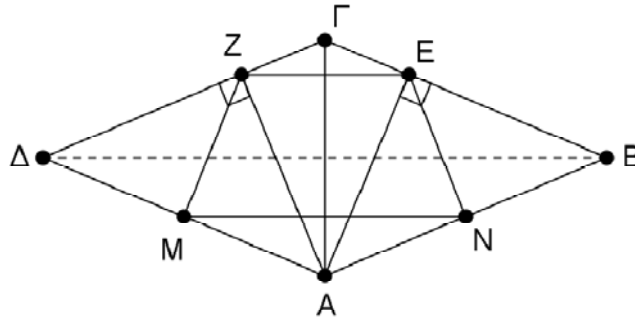
γ) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΜΝΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 10



ΛΥΣΗ

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔZA και BEA έχουν $AD = AB$ γιατί είναι διαδοχικές πλευρές του ρόμβου $AB\Gamma\Delta$ και $\hat{A}\hat{Z} = \hat{A}\hat{E}$ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου, επομένως είναι ίσα, τότε $ZA = AE$, άρα το τρίγωνο ZAE είναι ισοσκελές.



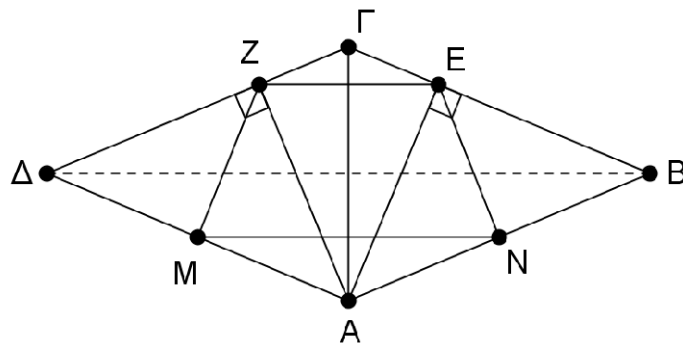
β) Είναι από το α) ερώτημα $AZ = AE$, επιπλέον έχουμε $Z\Gamma = \Gamma E$ ως διαφορά των ίσων τμημάτων $\Gamma\Delta$ και ΓB από τα $Z\Delta$ και BE που προκύπτουν από την ισότητα των τριγώνων ΔZA και BEA . Έχουμε λοιπόν ότι τα σημεία A και Γ ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος ZE , άρα η ευθεία $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ZE .

γ) Στο τρίγωνο $AB\Delta$ τα σημεία M και N είναι μέσα των πλευρών του AD και AB αντίστοιχα, επομένως είναι $MN \parallel B\Delta$, συνεπώς το τετράπλευρο $ZMNE$ είναι τραπέζιο.

Επιπλέον είναι $MZ = \frac{AD}{2}$ ως διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα στο

ορθογώνιο τρίγωνο $AZ\Delta$, για τον ίδιο λόγο είναι και $EN = \frac{AB}{2}$. Όμως είναι $AD = AB$

εφόσον το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, επομένως θα είναι και $MZ = EN$, οπότε το τραπέζιο $ZMNE$ είναι ισοσκελές.



Σχόλιο.

Αν ο ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ έχει την μικρή του διαγώνιο ίση με την πλευρά του το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο και το τετράπλευρο $ZMNE$ δεν είναι ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3720)

Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{\Gamma} = 120^\circ$. Έστω ότι AE και AZ είναι οι αποστάσεις του σημείου A στις πλευρές $\Gamma\Delta$ και ΓB αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών $\Gamma\Delta$ και ΓB αντίστοιχα.

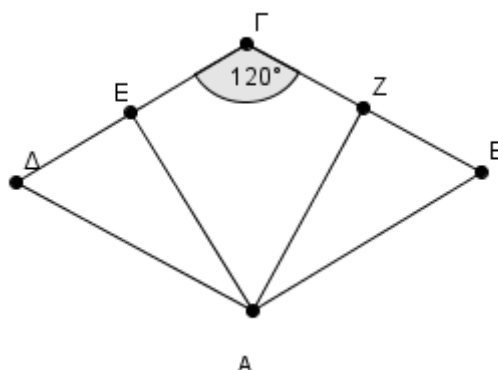
Μονάδες 8

ii. $A\Gamma \perp EZ$.

Μονάδες 8

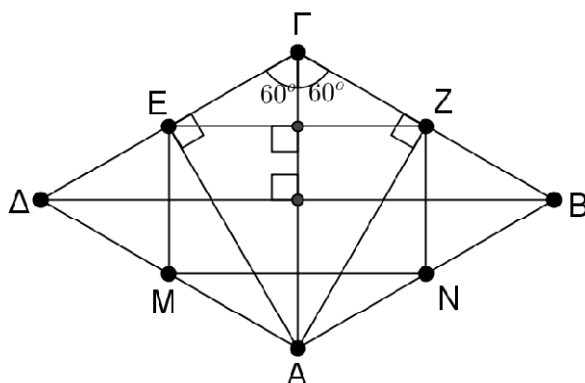
β) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΜΝΖ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 9



ΛΥΣΗ

α) i. Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του, συνεπώς $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}A = \hat{A}\hat{\Gamma}B = 60^\circ$, τότε τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΒΓ έχουν από δύο πλευρές ίσες και η μία γωνία τους είναι 60° , συνεπώς είναι ισόπλευρα, τότε τα ύψη τους ΑΕ και ΑΖ είναι και διάμεσοί τους, επομένως τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.



ii. Στο τρίγωνο ΔΓΒ τα σημεία Ε και Ζ είναι μέσα των πλευρών ΔΓ και ΓΒ σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, τότε

$$EZ = // \frac{B\Delta}{2} \text{ ή } EZ = // B\Delta$$

Όμως οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα, τότε $AG \perp B\Delta$, επομένως θα είναι $AG \perp EZ$.

β) Είναι $EZ = // \frac{B\Delta}{2}$ και $MN = // \frac{B\Delta}{2}$, αφού τα σημεία Μ, Ν είναι μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ στο τρίγωνο ΑΔΒ, τότε $EZ = // MN$, συνεπώς το τετράπλευρο ΕΜΝΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον έχουμε δείξει ότι $AG \perp EZ$, αντίστοιχα θα είναι και $EM \perp B\Delta$.

Αφού είναι $AG \perp B\Delta$ θα είναι και $EZ \perp EM$, δηλαδή η $\hat{M}\hat{E}\hat{Z}$ είναι ορθή, άρα το παραλληλόγραμμο ΕΜΝΖ είναι ορθογώνιο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3722)

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

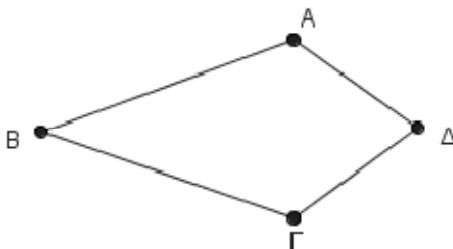
Μονάδες 9

β) Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται κάθετα.

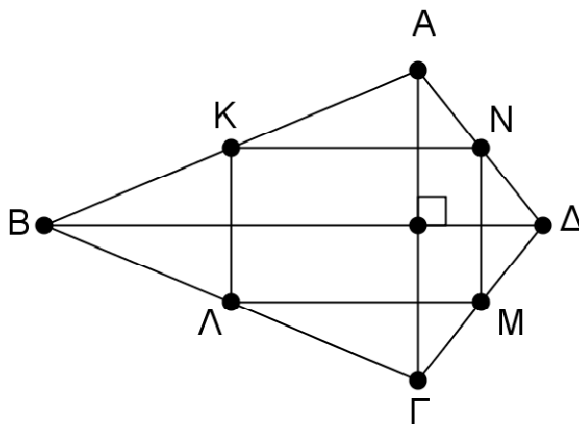
Μονάδες 6

γ) Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 10

**ΛΥΣΗ**

α) Αφού είναι $AB = B\Gamma$, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, επομένως έχουμε ότι $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B}$, επιπλέον είναι $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ από την υπόθεση, τότε θα είναι $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ ως διαφορά ίσων γωνιών, άρα το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.



β) Είναι $AB = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta \Gamma$, δηλαδή τα σημεία B και Δ ισαπέχουν από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$, άρα η ευθεία BD είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$, επομένως οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται κάθετα.

γ) Αν K, Λ, M και N είναι τα μέσα των πλευρών του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, τότε το $K\Lambda M N$ είναι παραλληλόγραμμο, όμως είναι $KN \parallel BD$ αφού τα σημεία K, N είναι μέσα των πλευρών του τριγώνου ΔAB .

Ανάλογα είναι $K\Lambda \parallel A\Gamma$, όμως $A\Gamma \perp BD$, τότε θα είναι και $KN \perp K\Lambda$, δηλαδή η γωνία ΔAB είναι ορθή, οπότε το $K\Lambda M N$ είναι ορθογώνιο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3723)

Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔΕΖ ισχύουν τα εξής: $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ και $\hat{\epsilon} = \hat{\zeta}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon}$

Μονάδες 8

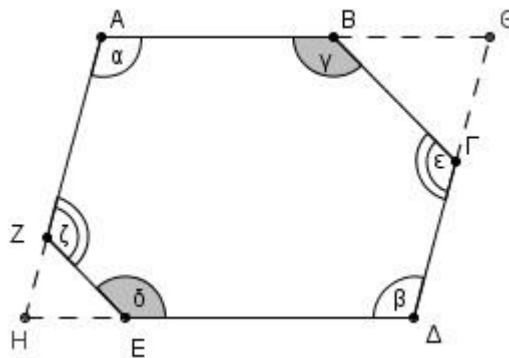
β) Αν οι πλευρές ΑΖ και ΔΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Η και οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ, να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες Α και Η είναι παραπληρωματικές

Μονάδες 10

ii. Το τετράπλευρο ΑΘΔΗ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 7

**ΛΥΣΗ**

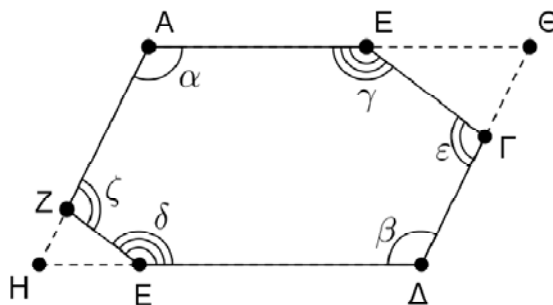
α) Οι γωνίες του κυρτού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ έχουν άθροισμα $2 \cdot 6 - 4 = 8$ ορθές.

Με βάση τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} + \hat{\delta} + \hat{\epsilon} + \hat{\zeta} = 8 \text{ ορθές} \Rightarrow \hat{\alpha} + \hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon} + \hat{\epsilon} = 8 \text{ ορθές} \Rightarrow 2\hat{\alpha} + 2\hat{\gamma} + 2\hat{\epsilon} = 8 \text{ ορθές}$$

Άρα

$$\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon} = 4 \text{ ορθές}$$



β) Στο κυρτό πεντάγωνο ΑΒΓΔΗ έχουμε:

$$\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon} + \hat{\beta} + \hat{H} = 2 \cdot 5 - 4 \text{ ορθές} \Rightarrow 4 \text{ ορθές} + \hat{\beta} + \hat{H} = 6 \text{ ορθές} \Rightarrow \hat{\beta} + \hat{H} = 2 \text{ ορθές}$$

Αφού είναι $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, θα είναι $\hat{\alpha} + \hat{H} = 2$ ορθές, δηλαδή οι γωνίες Α και Η είναι παραπληρωματικές.

γ) Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι οι γωνίες Α και Η είναι παραπληρωματικές τότε $A\Theta \parallel H\Delta$, επίσης είναι και οι γωνίες Δ και Η παραπληρωματικές αφού $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, τότε

$AH = \Delta\Theta$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το τετράπλευρο $A\Theta\Delta H$ είναι παραλληλόγραμμο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3724)

Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB . Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του E και τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Αν το σημείο E δεν είναι το μέσο του τόξου AB , να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.

Μονάδες 8

ii. $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$

Μονάδες 8

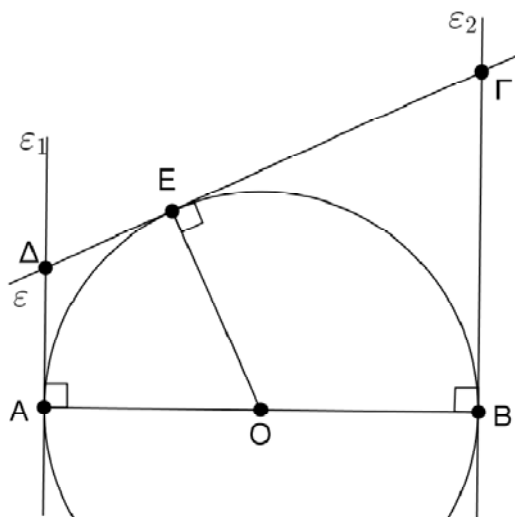
β) Αν το σημείο E βρίσκεται στο μέσο του τόξου AB , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου $A\Delta\Gamma B$ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Είναι $A\Delta \parallel \Gamma B$ γιατί είναι τμήματα ευθειών που είναι κάθετα στην AB . Αρκεί να δείξουμε ότι η $\Gamma\Delta$ δεν είναι παράλληλη της AB .

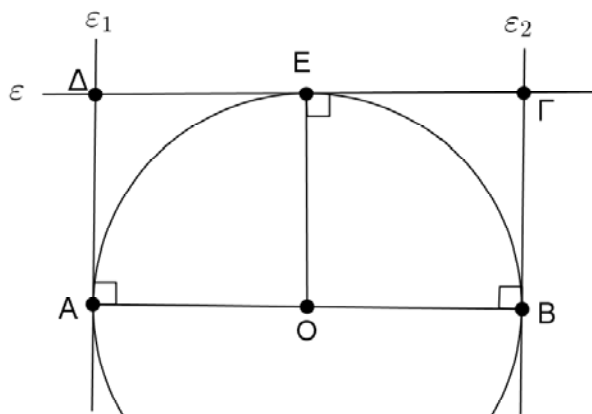
Έστω ότι η $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλη της AB , τότε επειδή είναι $A\Gamma \parallel B\Delta$ και η γωνία A είναι ορθή, το $AB\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο, όμως η EO είναι κάθετη στην $\Gamma\Delta$ αφού το E είναι σημείο επαφής της εφαπτομένης με την ακτίνα, τότε τα τετράπλευρα $AOE\Delta$ και $EOB\Gamma$ είναι ίσα τετράγωνα, άρα $\Delta E = OA = OB = E\Gamma$, δηλαδή το E είναι το μέσο της $\Gamma\Delta$, άτοπο, επομένως η $\Gamma\Delta$ δεν είναι παράλληλη της AB , άρα το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι τραπέζιο με βάσεις $A\Gamma$ και $B\Delta$.



β) Είναι $\Delta E = A\Delta$ και $B\Gamma = E\Gamma$ ως εφαπτόμενα τμήματα, επομένως είναι:

$$\Gamma\Delta = \Delta E + E\Gamma = A\Delta + B\Gamma$$

γ) Αν το E είναι το μέσο του τόξου AB , έχουμε αποδείξει στο α ερώτημα ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, τότε η περίμετρός του T είναι:



$$T = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = AB + \Gamma E + \Gamma\Delta + \Delta E = AB + \Gamma\Delta + \Gamma\Delta = AB + AB + AB = 3AB = 3 \cdot 2R = 6R.$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3725)

Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ ονομάζουμε O το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο E του τμήματος OD . Φέρνουμε την κάθετη από το B στην AE , που τέμνει το τμήμα AO στο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες ω και φ του παρακάτω σχήματος είναι ίσες.

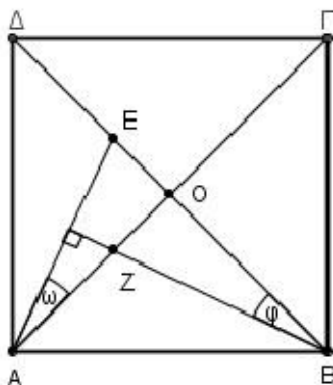
Μονάδες 6

β) $BZ = AE$ και $\Gamma Z = BE$

Μονάδες 12

γ) Το τμήμα EZ είναι κάθετο στο AB

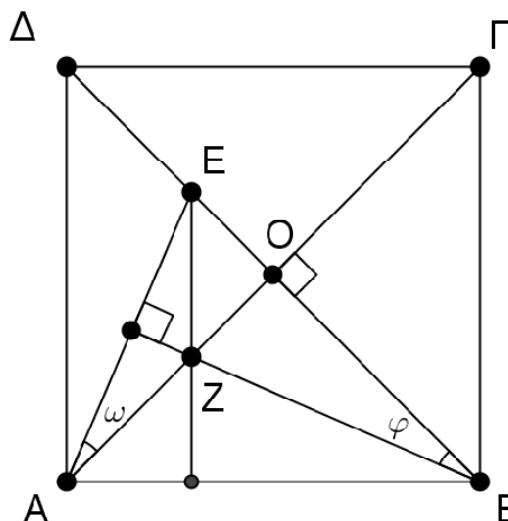
Μονάδες 7

**ΛΥΣΗ**

α) Οι διαγώνιοι AG και BD του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται κάθετα και λόγω

κατασκευής η BZ είναι κάθετη στην AE , επομένως οι γωνίες ω και φ είναι οξείες με

πλευρές κάθετες, άρα είναι ίσες.



β) Τα τρίγωνα OEA και OZB είναι ορθογώνια, έχουν $OA = OB$ ως μισά των ίσων διαγωνίων του τετραγώνου ABΓΔ και είναι $\hat{\omega} = \hat{\phi}$ από το α ερώτημα, επομένως είναι ίσα, τότε είναι

$$BZ = AE \text{ και } OZ = OE \text{ (1)}$$

Επιπλέον είναι

$$OG = OB \text{ (2).}$$

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε ότι

$$OZ + OG = OB + OE \Rightarrow \Gamma Z = BE$$

γ) Στο τρίγωνο AEB τα τμήματα AO και BZ είναι ύψη που τέμνονται στο σημείο Z, δηλαδή το Z είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, άρα και το EZ είναι το τρίτο ύψος του δηλαδή το EZ είναι κάθετο στο AB.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3727)

Στο τετράγωνο ABΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά AB κατά τμήμα $BN = AB$ και την πλευρά BΓ κατά τμήμα $\Gamma M = AN$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\Delta N = \Delta M$

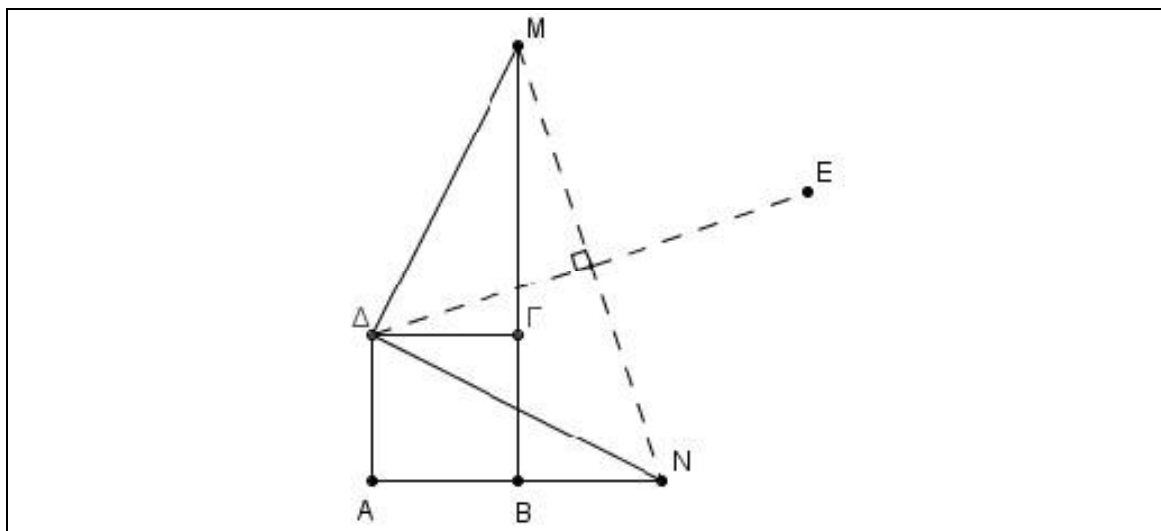
Μονάδες 7

ii. $\Delta N \perp \Delta M$

Μονάδες 10

β) Αν E το συμμετρικό σημείο του Δ ως προς την ευθεία MN, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔMEN είναι τετράγωνο.

Μονάδες 8

**ΛΥΣΗ**

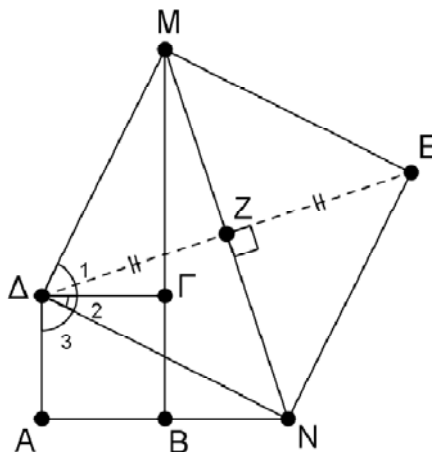
α) i. Αρχικά ονομάζουμε a την πλευρά του τετραγώνου $ABGD$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle ADN$ και $\triangle G\Gamma M$ έχουν:

$$AN = \Gamma M = 2a \text{ και}$$

$$AD = \Delta\Gamma = a,$$

επομένως είναι ίσα, τότε $\Delta N = \Delta M$



ii. Είναι $\hat{\Delta}_2 = \hat{N}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\Gamma\Gamma\Delta$ και AN που τέμνονται από την ΔN και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_3$ από την ισότητα των τριγώνων $\triangle ADN$ και $\triangle G\Gamma N$, τότε $\widehat{M\Delta N} = \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = \hat{\Delta}_3 + \hat{N}_1 = 90^\circ$, γιατί το τρίγωνο $\triangle ADN$ είναι ορθογώνιο στο A , άρα είναι $\Delta N \perp \Delta M$.

β) Αν ονομάσουμε Z το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου ΔMEN , τότε το τμήμα MN είναι μεσοκάθετος του ΔE , αφού το E είναι το συμμετρικό σημείο του Δ ως προς την MN , άρα $\Delta M = ME$ και $\Delta N = NE$.

Επειδή όμως $\Delta M = \Delta N$ από το α ερώτημα προκύπτει ότι $\Delta M = ME = NE = \Delta N$, και από το β ερώτημα έχουμε ότι η γωνία $\angle N\Delta M$ είναι ορθή, έχουμε ότι το τετράπλευρο ΔMEN είναι τετράγωνο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3732)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του AD . Στο AD θεωρούμε σημείο H τέτοιο ώστε $HA = HB$. Έστω ότι E είναι το σημείο τομής της BH με την AG . Φέρνουμε την AZ κάθετη στην BE , η οποία τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Θ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $H\Delta B$ και HZA είναι ίσα.

Μονάδες 6

ii. $\Delta\Theta = \Theta Z$

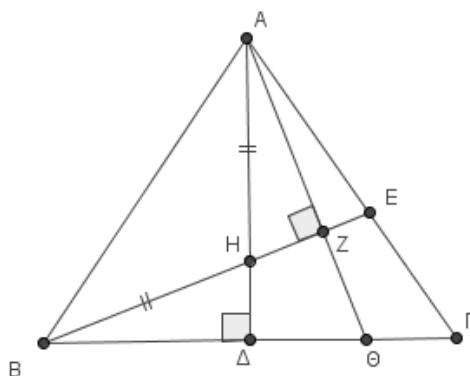
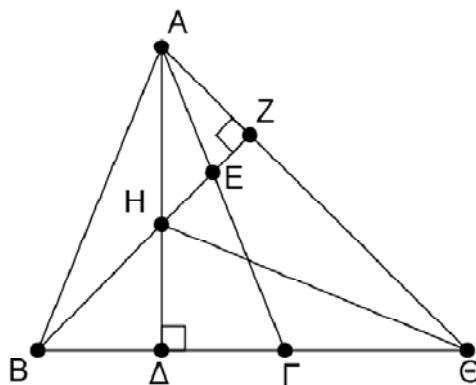
Μονάδες 6

iii. Η ευθεία ΘH είναι μεσοκάθετος του τμήματος AB .

Μονάδες 6

β) Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου AHB ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

**ΛΥΣΗ**

α) i. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AH\Delta$ και AZH έχουν $AH = HB$ από την υπόθεση και $\hat{A}\hat{H}Z = \hat{B}\hat{H}\Delta$ ως κατά κορυφήν γωνίες, επομένως είναι ίσα.

ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ZH\Theta$ και $\Theta H\Delta$ έχουν την πλευρά $H\Theta$ κοινή και $HZ = H\Delta$ από την προηγούμενη ισότητα των τριγώνων $AH\Delta$ και AZH , επομένως είναι ίσα, τότε θα είναι $\Delta\Theta = \Theta Z$.

iii. Είναι $H\Delta = HZ$ από την ισότητα των τριγώνων $AH\Delta$ και AZH του πρώτο ερώτημα, ακόμα είναι $\Delta\Theta = \Theta Z$ από το δεύτερο ερώτημα, δηλαδή τα σημεία H και Θ

ισαπέχουν από τα άκρα Δ και Ζ του ευθυγράμμου τμήματος ΖΔ, επομένως η ευθεία ΘΗ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.

β) Το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΗΒ είναι το σημείο Θ γιατί τα τμήματα ΑΖ και ΒΔ είναι κάθετα στις πλευρές ΒΗ και ΑΗ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΗΒ, και οι φορείς των υψών του τέμνονται στο σημείο Θ.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3734)

Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) είναι ΑΒ = ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.

Μονάδες 7

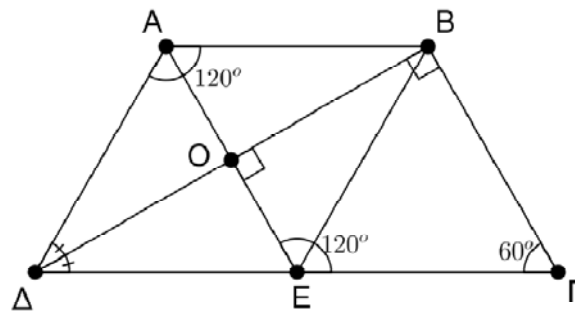
β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ να είναι ρόμβος.

Μονάδες 10

γ) Αν επιπλέον είναι γωνία ΒΑΔ = 120° και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο Ο, να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΕΟΒΓ.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ



α) Αφού ΑΒ = ΑΔ το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, τότε $\hat{A}\hat{B} = \hat{A}\hat{D}$. Ακόμα είναι $\hat{A}\hat{B}\hat{D} = \hat{B}\hat{A}\hat{D}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΒΔ, άρα $\hat{A}\hat{B}\hat{D} = \hat{B}\hat{A}\hat{D}$ δηλαδή η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.

β) Η θέση του σημείου Ε προσδιορίζετε από την τομή της παράλληλης από το σημείο Δ προς την ΑΒ και της πλευράς ΒΓ του τραπέζιου ΑΒΓΔ. Πράγματι αφού $BE \parallel AD$, $AB \parallel DE$ και $AB = AD$, το τετράπλευρο είναι ρόμβος.

γ) Αφού είναι $\hat{B}\hat{A}\hat{D} = 120^\circ$, επειδή οι διαγώνιες του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του, θα είναι $\hat{B}\hat{A}\hat{E} = 60^\circ$, άρα $\hat{O}\hat{E}\hat{D} = 60^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΑΕ, άρα $\hat{O}\hat{E}\hat{G} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Επιπλέον είναι οι γωνίες $\hat{B}\hat{A}\hat{D}$ και $\hat{A}\hat{D}\hat{G}$ παραπληρωματικές, επομένως $\hat{A}\hat{D}\hat{G} = 60^\circ$, τότε $\hat{B}\hat{G}\hat{E} = 60^\circ$ αφού το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Η ΑΟ είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΑΒ άρα και ύψος του, επομένως $AO \perp BD$, τότε $\hat{B}\hat{O}\hat{E} = 90^\circ$.

Τέλος

$$\widehat{O\hat{B}\Gamma} = 360^\circ - 120^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3735)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$. Έστω Αχ η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Α.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{\hat{A}_{εξ}}{2} + \hat{B}_{εξ} = 180^\circ + \frac{\hat{\Gamma} - \hat{B}}{2}$, όπου $\hat{A}_{εξ}$ και $\hat{B}_{εξ}$ παριστάνουν τις εξωτερικές γωνίες των $\hat{A}$, $\hat{B}$ αντίστοιχα.

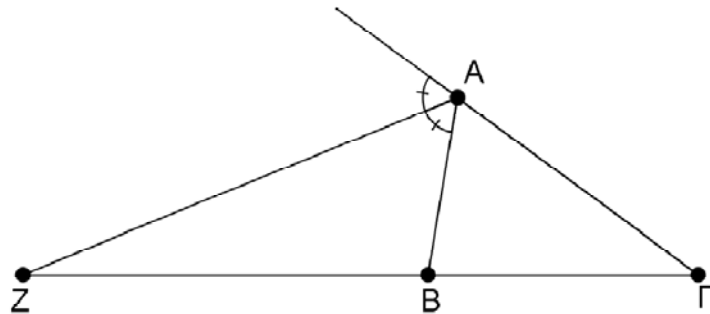
Μονάδες 10

ii. Η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει την προέκταση της πλευράς ΓΒ (προς το μέρος του Β) σε σημείο Ζ.

Μονάδες 8

β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α και $\hat{A}\hat{Z}B = 15^\circ$, να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 2AB$

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) i) Έχουμε ότι $\hat{A}_{εξ} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$ και $\hat{B}_{εξ} = 180^\circ - \hat{B}$ οπότε είναι

$$\frac{\hat{A}_{εξ}}{2} + \hat{B}_{εξ} = \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} + 180^\circ - \hat{B} = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 180^\circ + \frac{\hat{\Gamma} - \hat{B}}{2}$$

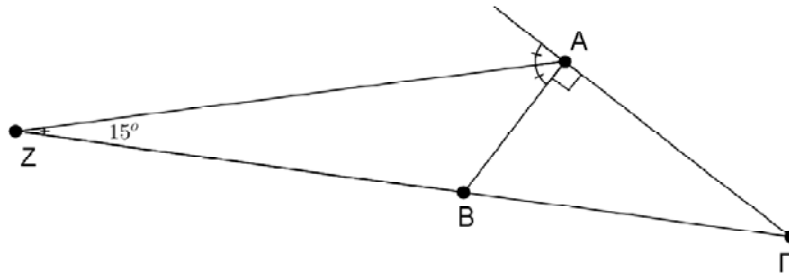
ii) Γνωρίζουμε ότι: Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι ευθείες αυτές τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες,

Επομένως για τις ευθείες Αχ και την προέκταση της ΓΒ (προς το μέρος του Β) έχουμε:

$$\frac{\hat{A}_{εξ}}{2} + \hat{B}_{εξ} = 180^\circ + \frac{\hat{\Gamma} - \hat{B}}{2} < 180^\circ,$$

συνεπώς οι παραπάνω ευθείες τέμνονται.

β) Αφού $\hat{A} = 90^\circ$ τότε $\hat{A}_{εξ} = 90^\circ$ και $\hat{B}\hat{A}\hat{Z} = 45^\circ$



Στο τρίγωνο AZΓ έχουμε

$$\widehat{Z\hat{A}\Gamma} + \widehat{A\hat{\Gamma}Z} + \widehat{\Gamma\hat{Z}A} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 45^\circ + \widehat{A\hat{\Gamma}Z} + 15^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{A\hat{\Gamma}Z} + 150^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\hat{\Gamma}Z} = 30^\circ$$

Οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ είναι $\widehat{\Gamma} = 30^\circ$ άρα

$$AB = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2AB$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3737)

Θεωρούμε τραπέζιο ABΓΔ, τέτοιο ώστε $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$ και $AB = \frac{1}{3}A\Delta$.

Επιπλέον, φέρουμε $BE \perp \Delta\Gamma$

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ABEΔ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 6

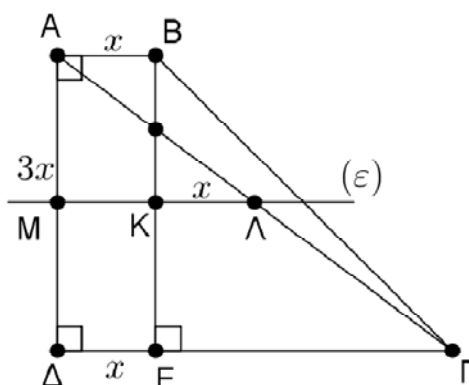
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BEΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Μονάδες 10

γ) Αν K, Λ είναι τα μέσα των BE και AΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η AΓ διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος BK.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ



α) Αφού το τετράπλευρο ABEΔ έχει τρεις ορθές γωνίες είναι ορθογώνιο.

β) Αν ονομάσουμε $AB = x$, τότε με βάση τα δεδομένα είναι $\Gamma\Delta = 4x$, $A\Delta = 3x$ και $BE = E\Gamma = 3x$ αφού το τετράπλευρο ABEΔ είναι ορθογώνιο, επομένως το τρίγωνο BEΓ είναι ορθογώνιο ($\hat{B} = 90^\circ$) και ισοσκελές ($BE = E\Gamma$).

γ) Η ευθεία (ε) που διέρχεται από τα μέσα Κ, Λ των ΒΕ και ΑΓ αντίστοιχα είναι η μεσοπαράλληλος των φορέων των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ. Αν ονομάσουμε Μ το σημείο τομής της (ε) με την ΑΔ, τότε από το τρίγωνο ΔΑΓ έχουμε ότι:

$$ΜΛ = // \frac{ΓΔ}{2} = // 2x \text{ και } ΚΛ = ΜΛ - ΛΚ = 2x - x = x.$$

Τέλος το τετράπλευρο ΑΒΛΚ έχει ΑΒ = // ΚΛ συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοι του διχοτομούνται επομένως η ΑΓ διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΚ.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3739)

Δίνεται κύκλος (Ο, R) με διάμετρο ΑΒ και ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Θεωρούμε ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Ε, η οποία τέμνει τις ϵ_1 και ϵ_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

Μονάδες 6

ii. $ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ$.

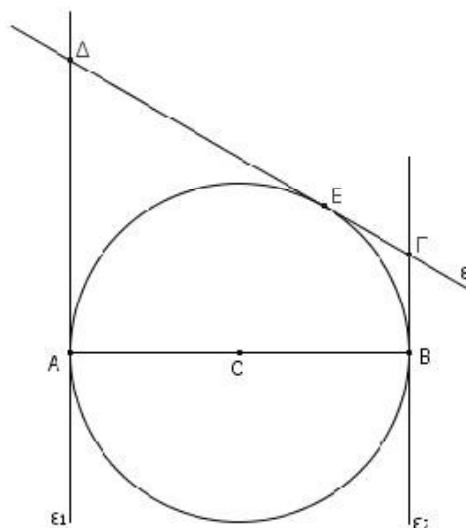
Μονάδες 7

iii. Το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 7

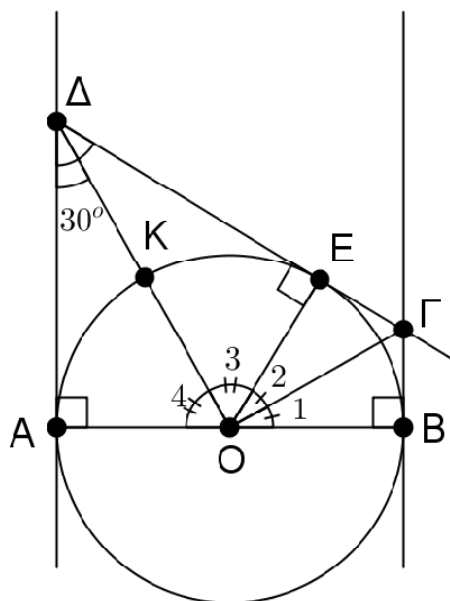
β) Αν η γωνία ΑΔΕ είναι 60° και η ΟΔ τέμνει τον κύκλο (Ο, R) στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το Κ είναι μέσο του ΔΟ.

Μονάδες 5



ΛΥΣΗ

α) i) Οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι κάθετες στην ΑΒ ως εφαπτόμενες του κύκλου οπότε είναι μεταξύ τους παράλληλες. Έτσι λοιπόν και $ΑΔ // ΒΓ$ οπότε το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.



ii) Είναι $ΓΕ = ΓΒ$ και $ΔΕ = ΑΔ$ ως εφαπτόμενα ευθύγραμμα τμήματα
Έτσι λοιπόν $ΓΔ = ΓΕ + ΕΔ = ΓΒ + ΑΔ$

iii) Επειδή τα $ΓΕ, ΓΒ$ είναι εφαπτόμενα τμήματα η $ΓΟ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΕΟΒ$, επομένως είναι $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, αντίστοιχα είναι και $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$.

Αλλά είναι

$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 180^\circ \Rightarrow \hat{O}_2 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_3 = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 180^\circ \Rightarrow \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 90^\circ$
Δηλαδή η γωνία $ΓΟΔ$ είναι ορθή και το τρίγωνο $ΓΟΔ$ είναι ορθογώνιο.

β) Αν η γωνία $ΑΔΕ$ είναι 60° τότε $\hat{A}\hat{D}\hat{O} = 30^\circ$ και στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΟΔ$ έχουμε

$$ΑΟ = \frac{ΔΟ}{2} \text{ ή } ΟΚ = \frac{ΔΟ}{2}$$

οπότε το K είναι μέσο του $ΔΟ$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3741)

Σε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με γωνία αμβλεία, ισχύει ότι $ΑΒ = 2ΑΔ$. Τα σημεία $Ε$ και $Ζ$, είναι μέσα των πλευρών του $ΑΒ$ και $ΓΔ$ αντίστοιχα. Από το $Δ$ φέρουμε τη $ΔΗ$ κάθετη στην προέκταση της $ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ΑΕΖΔ$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 8

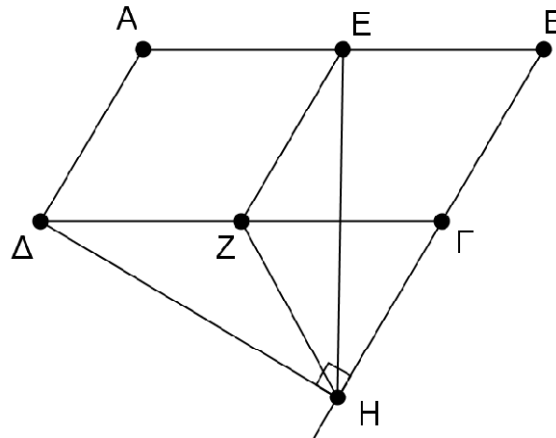
β) Το τρίγωνο $ΕΖΗ$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 9

γ) Το τμήμα $ΗΕ$, είναι διχοτόμος της γωνίας $ΖΗΓ$.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ



α) Στο τετράπλευρο AEZΔ είναι $AE \parallel \Delta Z$ και $AD = AE$, επομένως το AEZΔ είναι ρόμβος.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΗΓ η ΖΗ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΔΓ άρα $ZH = Z\Delta = ZE$ οπότε το τρίγωνο EZH είναι ισοσκελές

γ) Επειδή το τρίγωνο EZH είναι ισοσκελές έχουμε ότι $\hat{ZEH} = \hat{ZHE}$

Αφού $EZ \parallel BH$ είναι $\hat{ZEH} = \hat{EHB}$ ως εντός εναλλάξ, άρα θα είναι και $\hat{ZHE} = \hat{EHB}$, δηλαδή το τμήμα HE, είναι διχοτόμος της γωνίας ZHΓ.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3745)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB=AG$) και AM το ύψος του στην πλευρά BG. Στην προέκταση του AM θεωρούμε τμήμα $MN=AM$. Στην προέκταση του BG προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = BG$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ABNΓ ρόμβος.

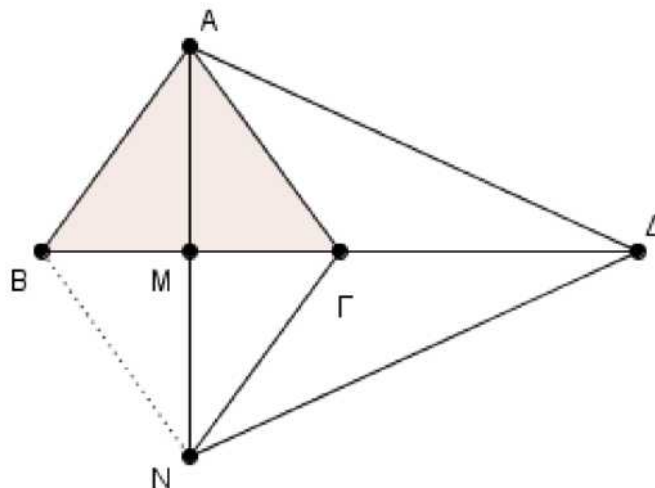
Μονάδες 8

β) Το τρίγωνο AΔN είναι ισοσκελές.

Μονάδες 8

γ) Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου AΔN.

Μονάδες 9



Λύση

α) Θα δείξουμε το ΑΓΝΒ έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

Γνωρίζουμε ότι $AB = AG$.

Επειδή το Γ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΝ είναι $AG = GN$

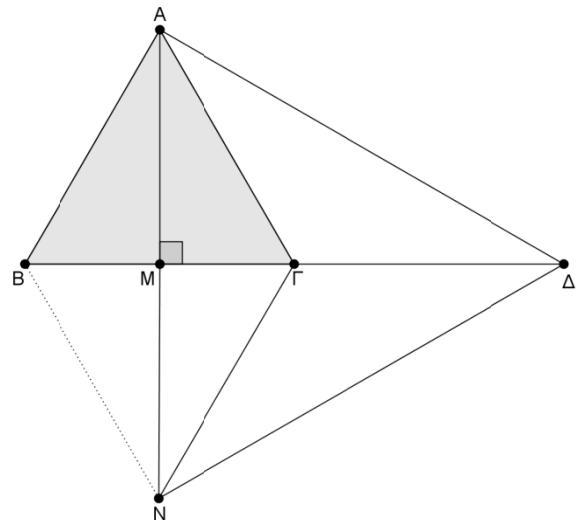
Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΜΑ και ΒΜΝ

1) ΒΜ κοινή

2) ΑΜ=ΜΝ (από δεδομένα)

Έτσι λοιπόν είναι $\hat{BMA} = \hat{BMN}$ οπότε έχουμε $AB = BN$

Τελικά $AB = AG = GN = BN$ οπότε ΑΓΝΒ ρόμβος



β) Το Δ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΝ οπότε $AD = ND$ άρα το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισοσκελές

γ) Επειδή το Γ είναι σημείο της διαμέσου ΔΜ του τριγώνου ΑΔΝ $GM = \frac{DG}{2}$
θα δείξουμε ότι

$$\text{Πράγματι } GM = \frac{BG}{2} \stackrel{BG=DG}{=} \frac{DG}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3747)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Α ίση με 120° και γωνία Β είναι ίση με 45° . Στην παράταξη της ΒΑ προς το Α, παίρνουμε τμήμα ΑΔ = 2ΑΒ. Από το Δ φέρνουμε την κάθετη στην ΑΓ που την τέμνει στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΑΔΚ είναι ίση με 30° .

Μονάδες 6

β) Το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές.

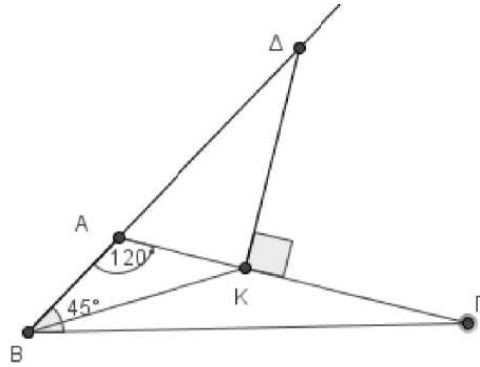
Μονάδες 6

γ) Αν Ζ το μέσο της ΔΑ, τότε $\hat{ZKB} = 90^\circ$

Μονάδες 6

δ) Το σημείο Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΔ.

Μονάδες 7



Λύση

α) Έχουμε

$$\widehat{BAK} = \widehat{A\Delta K} + \widehat{AK\Delta} \Leftrightarrow 120^\circ = \widehat{A\Delta K} + 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\Delta K} = 30^\circ$$

β) Επειδή $\widehat{A\Delta K} = 30^\circ$ και το τρίγωνο $A\Delta K$ είναι ορθογώνιο έχουμε ότι

$$AK = \frac{A\Delta}{2} = AB$$

άρα το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές.

γ) Στο τρίγωνο ZKB επειδή η διάμεσος

$$AK = \frac{BZ}{2}$$

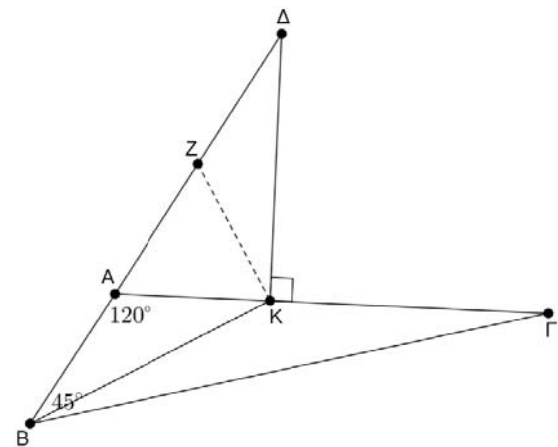
έχουμε ότι είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ZB άρα $\widehat{ZKB} = 90^\circ$

δ) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $AK\Delta$ και ZKB

1) $BZ = A\Delta$ (ως άθροισμα ίσων τμημάτων)

$$2) KZ = KA = \frac{A\Delta}{2}$$

Οπότε τα τρίγωνα $AK\Delta$ και ZKB είναι ίσα οπότε $KB = K\Delta$ δηλαδή το σημείο K ανήκει στη μεσοκάθετο του $B\Delta$

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3751)**

Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AM . Έστω ότι Δ είναι το

μέσο της AM τέτοιο ώστε $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$ και γωνία $\widehat{A\Delta B} = 120^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta M$.

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ορθογώνιο.

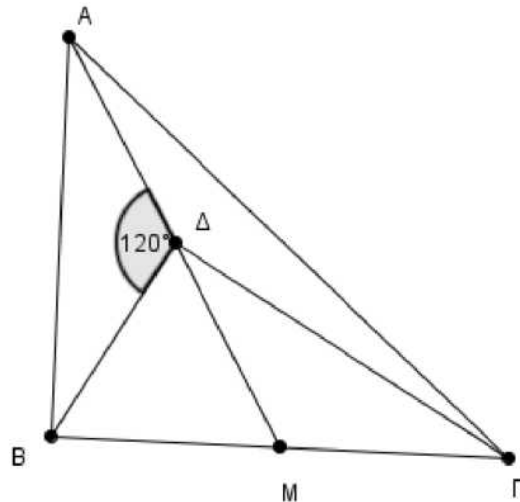
Μονάδες 6

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΔΜΓ είναι ίσα.

Μονάδες 6

δ) Αν το σημείο Κ είναι η προβολή του Δ στην ΒΓ, να αποδείξετε ότι $2MK = A\Delta$.

Μονάδες 8



Λύση

α) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΔΜ έχουμε

$$\widehat{A\Delta B} = \widehat{\Delta B M} + \widehat{\Delta M B} \Leftrightarrow 120^\circ = \widehat{\Delta B M} + 60^\circ$$

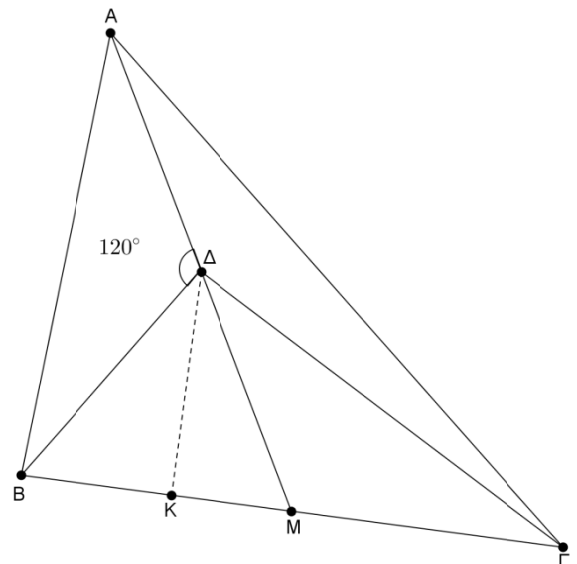
$$\Leftrightarrow \widehat{\Delta B M} = 60^\circ$$

Έτσι λοιπόν το τρίγωνο ΒΔΜ είναι ισόπλευρο

β) Επειδή στο τρίγωνο ΒΔΓ η διάμεσος

$$\Delta M = \frac{B\Gamma}{2}$$

το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΒΓ



γ) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΔΜΓ

1) $A\Delta = \Delta M$ (Δ μέσο της ΑΜ)2) $\widehat{A\Delta B} = \widehat{\Delta M \Gamma} = 120^\circ$ ($\widehat{\Delta M \Gamma} = 180^\circ - \widehat{\Delta M B} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$)3) $B\Delta = M\Gamma$ (αφού $B\Delta = BM$ και $BM = M\Gamma$)

Οπότε από Π-Γ-Π τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΔΜΓ είναι ίσα

δ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΜΚ έχουμε $\widehat{ΚΔΜ} = 30^\circ$ οπότε

$$ΚΜ = \frac{ΔΜ}{2} \Leftrightarrow ΚΜ = \frac{ΑΔ}{2} \Leftrightarrow ΑΔ = 2ΚΜ$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3754)

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από την κορυφή Α φέρουμε $ΑΕ \perp ΒΔ$. Έστω Κ, Λ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΔ αντιστοίχως, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\widehat{ΚΕΛ} = 90^\circ$

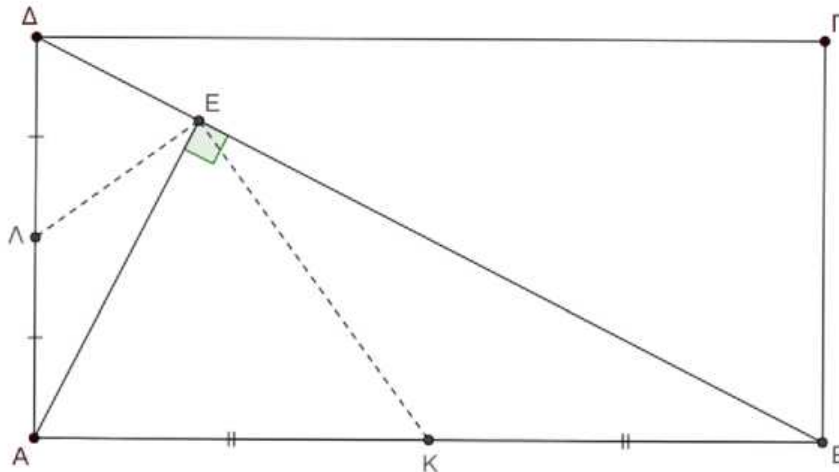
Μονάδες 8

ii. $ΚΛ = \frac{ΑΓ}{2}$

Μονάδες 8

β) Αν $\widehat{ΒΑΓ} = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι $ΚΛ = ΒΓ$.

Μονάδες 9



Λύση

α) i) Στο τρίγωνο ΔΕΑ η ΕΛ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΑΔ άρα

$$ΕΛ = \frac{ΑΔ}{2} \Leftrightarrow ΕΛ = ΛΑ$$

άρα το τρίγωνο ΕΑΛ είναι ισοσκελές οπότε $\widehat{ΛΕΑ} = \widehat{ΛΑΕ}$ (1)

Στο τρίγωνο ΑΕΒ η ΕΚ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΑΒ άρα

$$ΕΚ = \frac{ΑΒ}{2} \Leftrightarrow ΕΚ = ΑΚ \text{ άρα το τρίγωνο ΕΑΚ είναι ισοσκελές οπότε}$$

$$\widehat{ΑΕΚ} = \widehat{ΕΑΚ} \text{ (2)}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε

$$\widehat{ΛΕΑ} + \widehat{ΑΕΚ} = \widehat{ΛΑΕ} + \widehat{ΕΑΚ} \Leftrightarrow \widehat{ΛΕΚ} = \widehat{ΛΑΚ} = 90^\circ$$

ii) Στο τρίγωνο $AB\Delta$ επειδή Λ, K μέσα των $A\Delta, AB$ έχουμε,

$$\Lambda K = \frac{B\Delta}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$$

β) Στο τρίγωνο $BA\Gamma$ έχουμε, $B\Gamma = \frac{A\Gamma}{2} = K\Lambda$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3757)

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O και $AB > B\Gamma$, $A\Gamma = 2B\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς ΔA (προς το A) παίρνουμε σημείο E ώστε $\Delta A = AE$.

α) Να αποδείξετε ότι:

ί. Το τετράπλευρο $AEB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

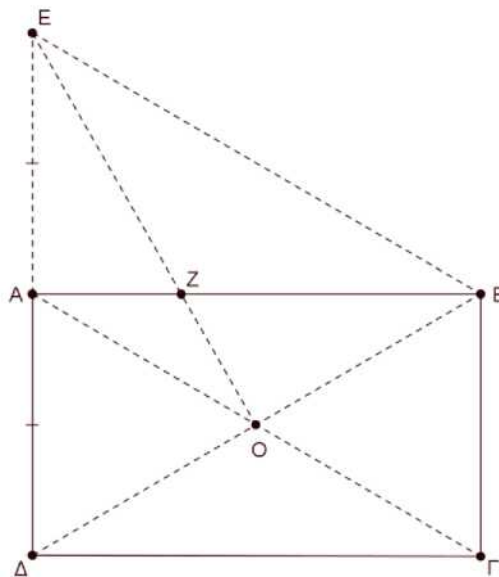
Μονάδες 8

ii. Το τρίγωνο $EB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 9

β) Αν η EO τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι $\Delta Z \perp EB$.

Μονάδες 8



Λύση

α) i) Είναι $B\Gamma \parallel A\Delta$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$

Επιπλέον από δεδομένα $\Delta A = AE$ οπότε $B\Gamma \parallel AE$ άρα το τετράπλευρο $AEB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο

ii) Αφού το B ανήκει στη μεσοκάθετο του $E\Delta$ είναι $BE = B\Delta$

Επιπλέον

$$A\Gamma = 2B\Gamma \Leftrightarrow B\Delta = 2B\Gamma \Leftrightarrow B\Delta = 2A\Delta \Leftrightarrow B\Delta = \Delta E$$

Επειδή $BE = E\Delta = B\Delta$ το τρίγωνο $EB\Delta$ είναι ισόπλευρο

β) Επειδή το Ο είναι μέσο του ΒΔ τότε ΕΟ είναι ύψος του τριγώνου ΕΒΔ. Επειδή ΒΑ είναι επίσης ύψος του ίδιου τριγώνου έχουμε ότι το Ζ θα είναι ορθόκεντρο άρα θα διέρχεται από αυτό και το ύψος που άγεται από την κορυφή Δ του τριγώνου ΕΒΔ.

Έτσι λοιπόν $\Delta Z \perp EB$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3759)

Δίνεται κύκλος (Ο,Κ) με διάμετρο ΒΓ. Θεωρούμε σημείο Α του κύκλου και σχεδιάζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Η προέκταση της ΑΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ, η προέκταση του οποίου τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι:

ί. $Z\Gamma = AB = BE$.

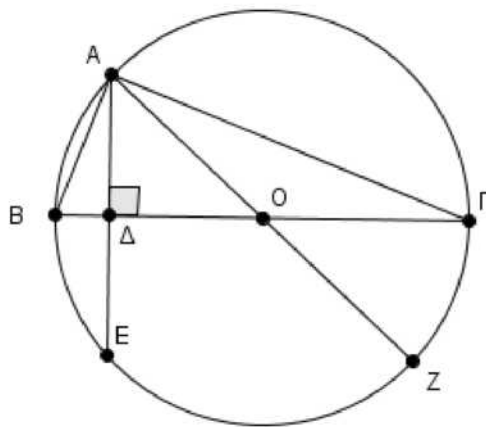
Μονάδες 8

ίι. Το τετράπλευρο ΒΕΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 7

β) Αν $\Gamma = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τραpezίου ΒΕΖΓ είναι ίση με $5R$, όπου R η ακτίνα του κύκλου.

Μονάδες 10



Λύση

α) i) Είναι $AO = OZ = OG = OB$ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου άρα στο τετράπλευρο ΑΓΖΒ οι διαγώνιοί του ΑΖ και ΒΓ διχοτομούνται όποτε το ΑΓΖΒ είναι παραλληλόγραμμο άρα $\Gamma Z = AB$.

Αφού $OD \perp AE$ το ΟΔ είναι απόστημα της χορδής ΑΕ άρα διχοτομεί την χορδή ΑΕ καθώς και το $\widehat{AE}$. Έτσι λοιπόν το Β είναι μέσο του $\widehat{AE}$ άρα $\widehat{AB} = \widehat{BE} \Leftrightarrow AB = BE$

Έτσι λοιπόν $\Gamma Z = AB = BE$

ii) Στο τρίγωνο ΑΕΖ το Δ είναι μέσο της ΕΑ και το Ο μέσο της ΑΖ άρα $DO \parallel EZ$ όποτε και $BG \parallel EZ$. Άρα το τετράπλευρο ΒΕΖΓ είναι τραπέζιο και αφού από το προηγούμενο ερώτημα δείξαμε ότι $\Gamma Z = BE$ το ΒΕΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Είναι $\hat{A} = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικόκλιο άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και αφού $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ είναι

$$AB = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{2R}{2} = R$$

Όμως από προηγούμενο ερώτημα $AB = \Gamma Z = BE$ άρα $\Gamma Z = BE = R$

Ακόμη $\widehat{BOA} = 2 \cdot \widehat{AGB} = 60^\circ$ οπότε στο τρίγωνο ΔAO ισχύει $\widehat{\Delta AO} = 30^\circ$ άρα

$$\Delta O = \frac{AO}{2} \Leftrightarrow \Delta O = \frac{R}{2}$$

Όμως στο τρίγωνο $A EZ$ επειδή Δ , O μέσα των AE , AZ αντίστοιχα έχουμε

$$\Delta O = \frac{EZ}{2} \Leftrightarrow EZ = 2\Delta O \Leftrightarrow EZ = 2 \cdot \frac{R}{2} \Leftrightarrow EZ = R$$

Έτσι λοιπόν

$$\Pi_{BEZ\Gamma} = BE + EZ + Z\Gamma + \Gamma B = R + R + R + 2R = 5R$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3762)

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Έστω E το συμμετρικό σημείο του B ως προς το Δ και Z είναι το μέσο της $A\Delta$. Η προέκταση της $\Gamma\Delta$ τέμνει την AE στο H . Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta H = \frac{AB}{2}$

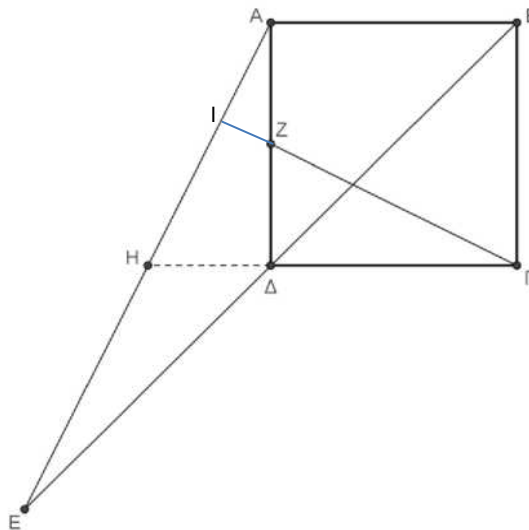
Μονάδες 8

β) Τα τρίγωνα ΔH και $Z\Delta\Gamma$ είναι ίσα.

Μονάδες 9

γ) Η ΓZ είναι κάθετη στην AE .

Μονάδες 8



Λύση

α) Στο τρίγωνο ABE επειδή το Δ είναι μέσο του BE και $\Delta H \parallel AB$ τότε και το H θα είναι μέσο του AE .

Έτσι λοιπόν στο τρίγωνο ABE αφού H μέσο του AE και Δ μέσο του BE έχουμε ότι

$$\Delta H = \frac{AB}{2}$$

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΖΔΓ

$$1) \hat{H}\Delta A = \hat{Z}\Delta\Gamma = 90^\circ$$

$$2) H\Delta = Z\Delta \text{ (ως μισά των ίσων τμημάτων } AB, A\Delta)$$

$$3) A\Delta = \Delta\Gamma \text{ (ως πλευρές του τετραγώνου } AB\Gamma\Delta)$$

$$\text{Από Π-Γ-Π είναι } \hat{A}\hat{H}\Delta = \hat{Z}\hat{\Delta}\Gamma$$

γ) Έστω Ι το σημείο τομή της προέκτασης του ΓΖ με ΑΕ.

Είναι

$$\hat{I}\hat{A}Z = \hat{Z}\hat{\Gamma}\Delta \text{ (αφού } \hat{A}\hat{H}\Delta = \hat{Z}\hat{\Delta}\Gamma) \text{ και } \hat{I}\hat{Z}A = \hat{\Gamma}\hat{Z}\Delta \text{ (ως κατακορυφήν)}$$

Έτσι λοιπόν

$$\hat{I}\hat{A}Z + \hat{I}\hat{Z}A = \hat{Z}\hat{\Gamma}\Delta + \hat{\Gamma}\hat{Z}\Delta \Leftrightarrow \hat{A}\hat{I}Z = \hat{Z}\hat{\Delta}\Gamma \Leftrightarrow \hat{A}\hat{I}Z = 90^\circ$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3765)

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $B = 3\Gamma$.

Φέρνουμε $BE \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Μ. Φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο Ν. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{A} = 45^\circ$.

Μονάδες 6

β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

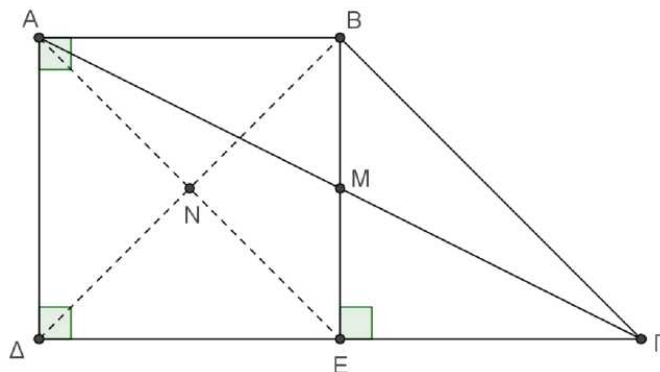
Μονάδες 6

γ) $MN = \frac{1}{4} \Gamma\Delta$.

Μονάδες 7

δ) $AE \perp BA$.

Μονάδες 6



Λύση

α) Έχουμε

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 3\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} + 90^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 45^\circ$$

β) Αφού ΑΒ//ΓΔ θα είναι και ΑΒ//ΓΕ

Επειδή $BE \perp \Gamma\Delta$ το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο γιατί έχει τρεις ορθές γωνίες οπότε $AB = \Delta E$

Όμως

$$\Delta\Gamma = 2AB \Leftrightarrow \Delta E + E\Gamma = 2\Delta E \Leftrightarrow \Delta E = E\Gamma \Leftrightarrow E\Gamma = AB$$

Οπότε τελικά το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο

γ) Αφού το M είναι το σημείο τομής των διαγώνιων $A\Gamma$ και BE του παραλληλογράμμου $AB\Gamma E$ θα αποτελεί μέσο αυτών.

Αφού το N είναι το σημείο τομής των διαγώνιων AE και $B\Delta$ του ορθογωνίου παραλληλογράμμου $ABE\Delta$ θα αποτελεί μέσο αυτών.

Έτσι λοιπόν στο τρίγωνο AED τα M και N είναι μέσα των AE και AD αντίστοιχα οπότε

$$MN = \frac{E\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{\frac{\Gamma\Delta}{2}}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{4}$$

δ) Επειδή $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με ίσες πλευρές θα είναι τετράγωνο και οι διαγώνιοί του θα τέμνονται κάθετα άρα $AE \perp B\Delta$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3775)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με O το κέντρο του. Από την κορυφή Δ φέρουμε το τμήμα ΔK κάθετο στην $A\Gamma$ και στην προέκτασή του προς το K θεωρούμε σημείο E , ώστε $KE = \Delta K$. Να αποδείξετε ότι:

α) $EO = \frac{B\Delta}{2}$.

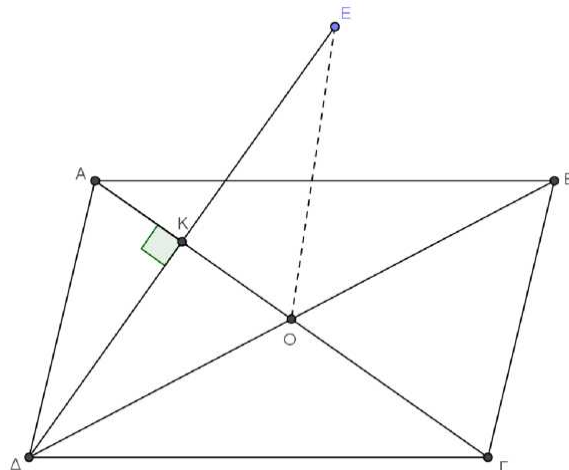
Μονάδες 8

β) Η γωνία $\widehat{\Delta EB}$ είναι ορθή.

Μονάδες 8

γ) Το τετράπλευρο $AEB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 9



Λύση

α) Στο τρίγωνο $O\Delta E$ η OK είναι διάμεσος και ύψος άρα το τρίγωνο $O\Delta E$ είναι ισοσκελές με βάση την ΔE οπότε $O\Delta = OE$

β) Στο τρίγωνο ΔΕΒ η διάμεσος $EO = OD = \frac{BD}{2}$ άρα το τρίγωνο ΔΕΒ είναι ορθογώνιο

με υποτείνουσα την ΒΔ. Έτσι λοιπόν $\hat{E}B = 90^\circ$

γ) Αφού $\hat{E}B = 90^\circ$ είναι $BE \perp DE$. Ακόμη $ΓΚ \perp ΔΕ$ άρα $BE \parallel ΓΚ$ οπότε το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι τραπέζιο.

Στο τρίγωνο ΔΑΕ η ΑΚ είναι διάμεσος και ύψος άρα το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΕ οπότε $AE = AD$ (1)

Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο $AD = BG$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε $AE = BG$ οπότε το ΑΕΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο

ΑΣΚΗΣΗ (4_3777)

Δύο κύκλοι (O, ρ_1) , (K, ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά στο Ν. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο Ν τέμνει την (ε) στο Μ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το Μ είναι μέσον του ΑΒ.

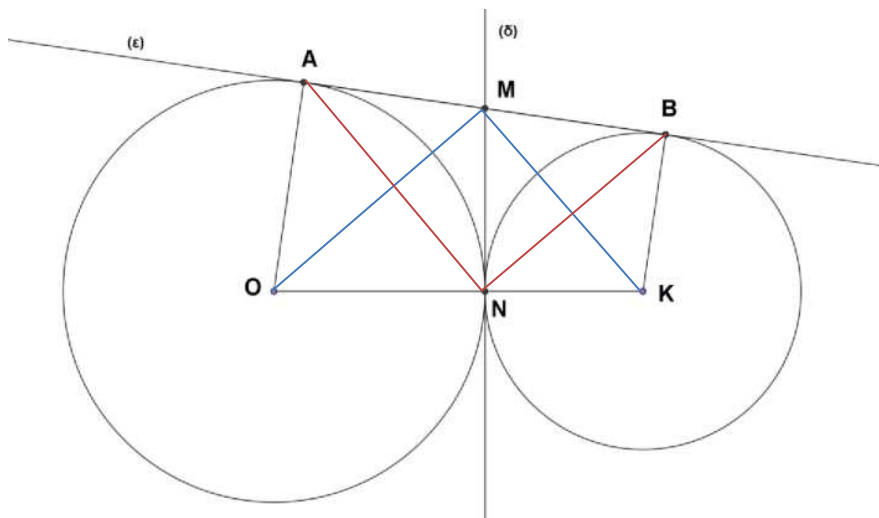
Μονάδες 7

β) $\hat{OMK} = 90^\circ$.

Μονάδες 9

γ) $\hat{ANB} = 90^\circ$.

Μονάδες 9



Λύση

α) Ισχύει ότι $MA = MN$ (1) ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Μ προς τον κύκλο (O, ρ_1)

Επίσης, $MB = MN$ (2) ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Μ προς τον κύκλο (K, ρ_2)

Από (1) και (2) είναι $MA = MB$ άρα το Μ είναι μέσο του ΑΒ

β) Η OM είναι διχοτόμος της $\widehat{AMN}$ άρα $\widehat{AMO} = \widehat{OMN}$

Η KM είναι διχοτόμος της $\widehat{BMN}$ άρα $\widehat{BMK} = \widehat{KMN}$

Ακόμη

$$\begin{aligned}\widehat{AMO} + \widehat{OMN} + \widehat{BMK} + \widehat{KMN} &= 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{OMN} + 2\widehat{KMN} = 180^\circ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2(\widehat{OMN} + \widehat{KMN}) &= 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{OMK} = 90^\circ\end{aligned}$$

γ) Αφού M μέσο του AB από α) ερώτημα έχουμε ότι $AM = MB$

Ακόμη $NM = AM = \frac{AB}{2}$ έτσι λοιπόν το τρίγωνο ANB είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα

την AB οπότε $\widehat{ANB} = 90^\circ$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3781)

Έστω κύκλος (O, ρ) και E το μέσον του τόξου του BΓ. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στο κύκλο στο E. Οι προεκτάσεις των OB, OΓ τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Z και H αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) $BΓ \parallel ZH$

Μονάδες 5

β) $OZ = OH$

Μονάδες 5

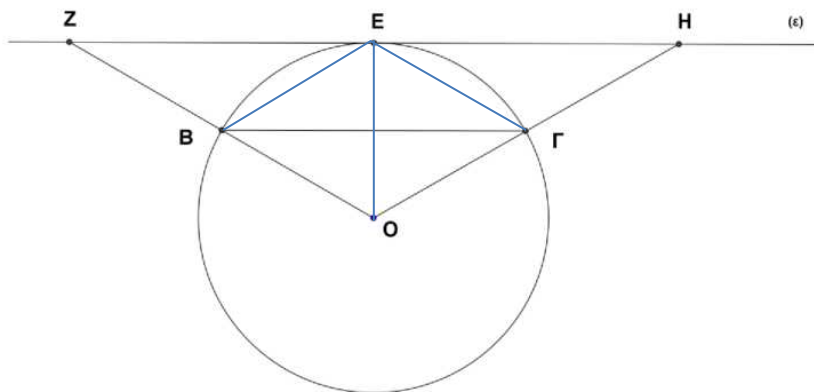
γ) Αν B μέσον της OZ

i. να αποδείξετε ότι $\widehat{B\hat{E}Z} = \frac{\widehat{ZOH}}{4}$,

Μονάδες 8

ii. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ZOH.

Μονάδες 7



Λύση

α) Είναι $OE \perp ZH$ αφού ZH εφαπτομένη του κύκλου στο E και OE ακτίνα

Αφού E μέσο του $\widehat{B\Gamma}$ είναι

$$\widehat{BE} = \widehat{E\Gamma} \Leftrightarrow BE = E\Gamma \text{ οπότε } OE \perp B\Gamma$$

Έτσι λοιπόν αφού $OE \perp ZH$ και $OE \perp B\Gamma$ είναι $ZH \parallel B\Gamma$

β) Στο τρίγωνο ΟΖΗ η ΟΕ είναι διάμεσος και ύψος άρα το τρίγωνο ΟΖΗ είναι ισοσκελές με βάση τη ΖΗ οπότε $OZ=OH$

γ) i) Η $\widehat{B\hat{E}Z}$ σχηματίζεται από την εφαπτομένη ΖΗ του κύκλου στο Ε και τη χορδή ΒΕ. Ακόμη η $\widehat{B\hat{\Gamma}E}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής ΒΕ οπότε

$$\widehat{B\hat{E}Z} = \widehat{B\hat{\Gamma}E} = \frac{\widehat{B\hat{O}E}}{2} = \frac{\frac{\widehat{B\hat{O}\Gamma}}{2}}{2} = \frac{\widehat{B\hat{O}\Gamma}}{4} = \frac{\widehat{Z\hat{O}\Gamma}}{4}$$

ii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΖ έχουμε ότι

$$OE = OB = \frac{OZ}{2} \text{ άρα } \widehat{O\hat{Z}H} = 30^\circ$$

Ακόμη το τρίγωνο ΟΖΗ είναι ισοσκελές αφού $OZ=OH$ άρα $\widehat{O\hat{H}Z} = \widehat{O\hat{Z}H} = 30^\circ$
Τέλος στο τρίγωνο

$$\widehat{O\hat{Z}H} + \widehat{O\hat{H}Z} + \widehat{Z\hat{O}H} = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 30^\circ + \widehat{Z\hat{O}H} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{Z\hat{O}H} = 120^\circ$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3784)

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $AD=BG$. Αν Ε,Λ,Ζ,Κ,Ν,Μ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΔΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΕΜΖΝ ρόμβος.

Μονάδες 8

β) Η ΕΖ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΜΝ.

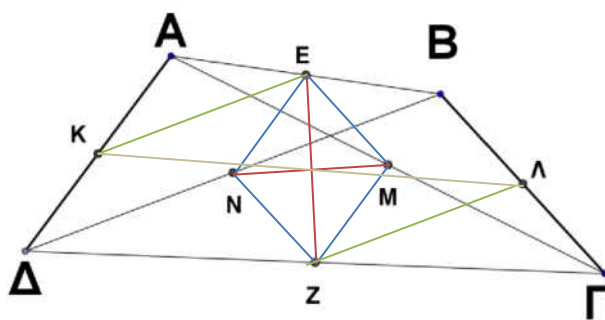
Μονάδες 7

γ) $KE=Z\Lambda$

Μονάδες 5

δ) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΛ, ΜΝ, ΕΖ διέρχονται από ίδιο σημείο.

Μονάδες 5



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι Ε μέσο ΑΒ και Μ μέσο ΑΓ άρα

$$EM // \frac{B\Gamma}{2}$$

Στο τρίγωνο ΒΓΔ είναι Ν μέσο ΒΔ και Ζ μέσο ΓΔ άρα

$$ZN // \frac{B\Gamma}{2}$$

Έτσι λοιπόν $EM // ZN$ οπότε το τετράπλευρο $EMZN$ είναι παραλληλόγραμμο

Στο τρίγωνο $ΑΓΔ$ είναι M μέσο $ΑΓ$ και Z μέσο $ΓΔ$ άρα

$$MZ = \frac{AD}{2} \stackrel{AD=BG}{\Leftrightarrow} MZ = \frac{BG}{2} \Leftrightarrow MZ = EM$$

οπότε το $EMZN$ είναι ρόμβος

β) Αφού $EMZN$ ρόμβος οι διαγώνιοι του MN και EZ διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα οπότε η EZ είναι μεσοκάθετος του MN .

γ) Στο τρίγωνο $ABΔ$ είναι K μέσο $ΑΔ$ και E μέσο AB άρα

$$KE // \frac{BD}{2} \quad (1)$$

Στο τρίγωνο $BΓΔ$ είναι Z μέσο $ΓΔ$ και $Λ$ μέσο $BΓ$ άρα

$$ZΛ // \frac{BD}{2} \quad (2)$$

Έτσι λοιπόν $KE=ZΛ$.

δ) Από (1) και (2) έχουμε ότι $KE // ZΛ$ άρα το τετράπλευρο $KEΛZ$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε $KΛ$ και EZ διχοτομούνται άρα έχουν κοινό μέσο.

Επίσης EZ και MN διχοτομούνται αφού $EMZN$ είναι ρόμβος άρα EZ και MN έχουν κοινό μέσο.

Έτσι λοιπόν EZ , MN , $KΛ$ έχουν κοινό μέσο οπότε διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο που είναι το κοινό τους μέσο

ΑΣΚΗΣΗ (4_3789)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$. Θεωρούμε το μέσο M της πλευράς AD και $ΓΕ$ κάθετος από τη κορυφή $Γ$ στην ευθεία MB ($ΓΕ \perp MB$). Η παράλληλη από την κορυφή $Δ$ στην ευθεία MB ($Δx // MB$) τέμνει τις $BΓ$ και $ΓΕ$ στα σημεία N , Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $MBNΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

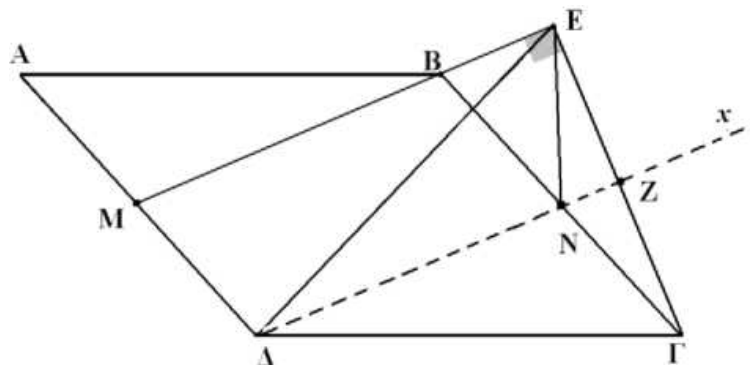
Μονάδες 7

β) Το σημείο Z είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $ΓΕ$.

Μονάδες 9

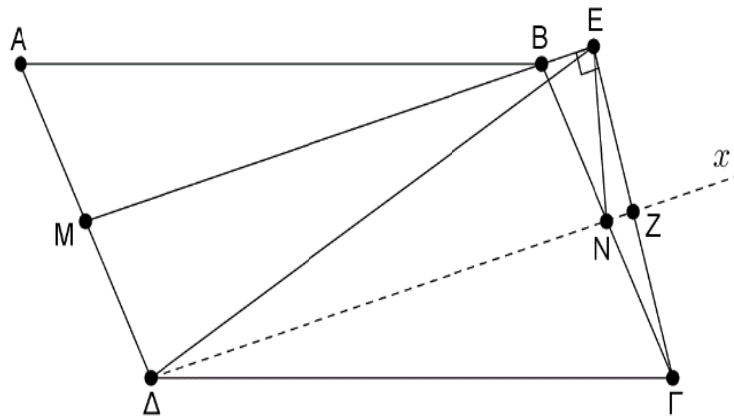
γ) $ΔΕ = ΔΓ$

Μονάδες 9



Λύση

α) Από δεδομένα έχουμε ότι $MB \parallel ND$ και αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο έχουμε $MD \parallel BN$ άρα το τετράπλευρο $MBND$ είναι παραλληλόγραμμο



β) Αφού $MB \perp GE$ και $DN \parallel MB$ θα είναι $DN \perp GE$ άρα και $DZ \perp GE$ οπότε DZ διάμεσος στο τρίγωνο $DE\Gamma$

Επιπλέον αφού $MBND$ παραλληλόγραμμο $MD=BN$

Αλλά M μέσο AD άρα

$$MD = \frac{AD}{2} \stackrel{AD=BG}{=} \frac{BG}{2}$$

Οπότε

$$BN = \frac{BG}{2} \text{ άρα } N \text{ μέσο της } BG$$

Έτσι λοιπόν στο ορθογώνιο τρίγωνο $BE\Gamma$ η EN είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα $B\Gamma$ οπότε $EN = \frac{B\Gamma}{2} = NG$ άρα το τρίγωνο ENG είναι ισοσκελές και επειδή

$DZ \perp GE$ θα είναι $NZ \perp GE$ οπότε NZ ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ENG .

Τελικά λοιπόν Z μέσο του GE .

γ) Αφού $DZ \perp GE$ και Z μέσο του EG η DZ είναι ύψος και διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά EG του τριγώνου $DE\Gamma$ άρα το τρίγωνο $DE\Gamma$ είναι ισοσκελές οπότε $DE=DG$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3796)

Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, BE , ΓZ , τα ύψη από τις κορυφές B , Γ αντίστοιχα και H το ορθόκεντρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται τα M , N , K , Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων AB , $A\Gamma$, ΓH , BH αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $MN=AK$

Μονάδες 6

ii. $NK = M\Lambda = \frac{AH}{2}$.

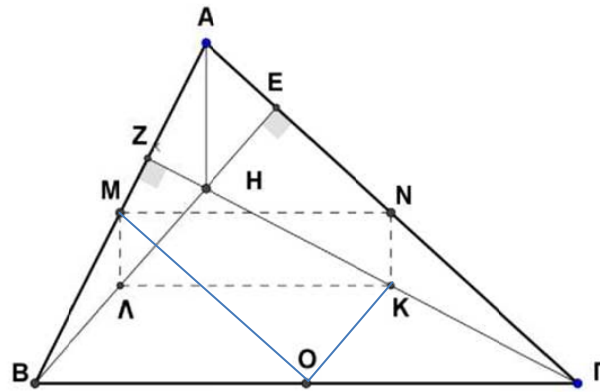
Μονάδες 6

iii. Το τετράπλευρο $MNKA$ είναι ορθογώνιο.

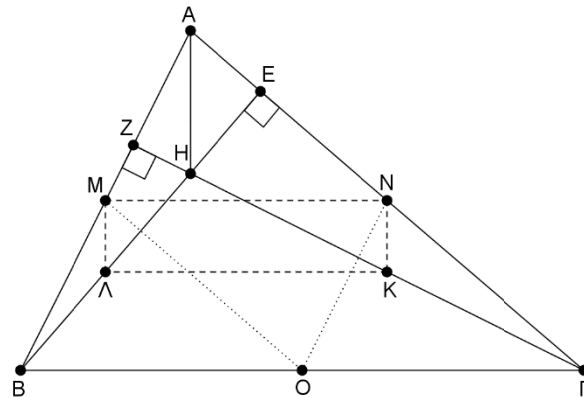
Μονάδες 6

β) Αν το Ο είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι το $\hat{MOK} = 90^\circ$.

Μονάδες 7



Λύση



α) i) Στο τρίγωνο ABΓ το Μ είναι μέσο της AB και το Ν μέσο της ΑΓ άρα

$$MN // = \frac{B\Gamma}{2} \quad (1)$$

Στο τρίγωνο ΗΒΓ το Λ είναι μέσο της ΗΒ και το Κ μέσο της ΗΓ άρα

$$\Lambda K // = \frac{B\Gamma}{2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) είναι $MN = \Lambda K$

ii) Στο τρίγωνο ABΗ το Μ είναι μέσο της AB και το Η μέσο της ΗΒ άρα

$$M\Lambda // = \frac{AH}{2} \quad (3)$$

Στο τρίγωνο ΑΗΓ το Κ είναι μέσο της ΗΗ και το Ν μέσο της ΑΓ άρα

$$NK // = \frac{AH}{2} \quad (4)$$

Από (3) και (4) είναι

$$M\Lambda = NK = \frac{AH}{2}$$

iii) Από (1) και (2) είναι $MN \parallel \Lambda K$ οπότε το τετράπλευρο $MNKL$ είναι παραλληλόγραμμο άρα $ML = NK$, αφού H ορθόκεντρο στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AH \perp B\Gamma$

Όμως $\Lambda K \parallel B\Gamma$ άρα $AH \perp \Lambda K$ και αφού $ML \parallel AH$ είναι $KL \perp \Lambda K$

Έτσι λοιπόν το $MNKL$ είναι παραλληλόγραμμο με μια ορθή γωνία άρα είναι ορθογώνιο.

β) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το M είναι μέσο της AB και το O είναι μέσο της $B\Gamma$ άρα $MO \parallel A\Gamma$
Όμως

$$BE \perp A\Gamma \text{ άρα } MO \perp BE \text{ (5)}$$

Στο τρίγωνο $HB\Gamma$ το K είναι μέσο της $H\Gamma$ και το O μέσο της $B\Gamma$ άρα $OK \parallel BH$ οπότε $OK \parallel BE$ (6)

Από (5) και (6) έχουμε ότι

$$MO \perp OK \text{ άρα } \widehat{MOK} = 90^\circ$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3798)

Δίνεται ορθή γωνία $\chi\hat{O}y = 90^\circ$ και A, B σημεία των ημιευθειών Oy, Ox , με $OA = OB$. Η (ϵ) είναι ευθεία που διέρχεται από την κορυφή O και αφήνει τις ημιευθείες Ox, Oy στο ίδιο ημιεπίπεδο. Η κάθετος από το σημείο A στην (ϵ) την τέμνει στο Δ και η κάθετος από το σημείο B στην (ϵ) την τέμνει στο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $O\Delta\Delta$ και OEB είναι ίσα.

Μονάδες 7

β) $A\Delta + BE = \Delta E$

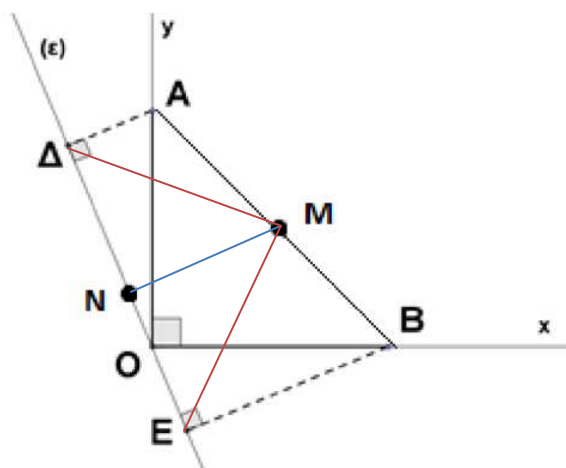
Μονάδες 7

γ) $MN = \frac{\Delta E}{2}$ όπου MN είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των ΔE και AB .

Μονάδες 7

δ) Το τρίγωνο ΔME είναι ορθογώνιο ισοσκελές.

Μονάδες 4



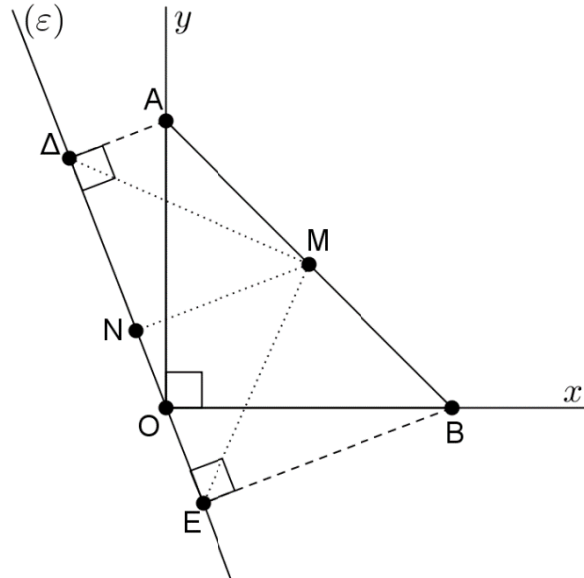
Λύση

α) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΕΒ

1) ΟΑ=ΟΒ (από δεδομένα)

2) $\hat{\Delta} \hat{O} \hat{A} = \hat{O} \hat{B} \hat{E}$ (ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες)

Από το 1^ο κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων έχουμε ότι $\hat{\Delta} \hat{O} \hat{A} = \hat{O} \hat{B} \hat{E}$



β) Αφού $\hat{\Delta} \hat{O} \hat{A} = \hat{O} \hat{B} \hat{E}$ είναι ΔΟ=ΒΕ (1) ΚΑΙ ΑΔ=ΟΕ (2)

Έτσι λοιπόν

$$A\Delta + BE \stackrel{(1)}{=} OE + \Delta O \stackrel{(2)}{=} \Delta E$$

γ) Αφού $A\Delta \perp \varepsilon$ και $BE \perp \varepsilon$ είναι $A\Delta // BE$ άρα το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι τραπέζιο.

Αφού Μ και Ν τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του τραπέζιου ΑΒΔΕ έχουμε

$$MN = \frac{A\Delta + BE}{2} \stackrel{(\beta)}{=} \frac{\Delta E}{2}$$

δ) Αφού ΜΝ διάμεσος στο τραπέζιο ΑΒΔΕ είναι $MN // BE$ και επειδή $BE \perp \Delta E$ θα είναι και $MN \perp \Delta E$.

Άρα στο τρίγωνο ΔΜΕ η ΜΝ είναι διάμεσος και ύψος άρα το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΕ

Επιπλέον, $MN = \frac{\Delta E}{2}$ το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ορθογώνιο με υποτεινούσα τη ΔΕ, τελικά

λοιπόν το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3803)

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τη διαγώνιο ΒΔ κατά τμήμα ΔΕ=ΔΒ. Έστω Μ το μέσο της ΑΔ και Ν το σημείο τομής των ΑΕ και ΓΔ.

α) Να αποδείξετε ότι ΔΝ=ΔΜ.

Μονάδες 8

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΝΜΔ.

Μονάδες 7

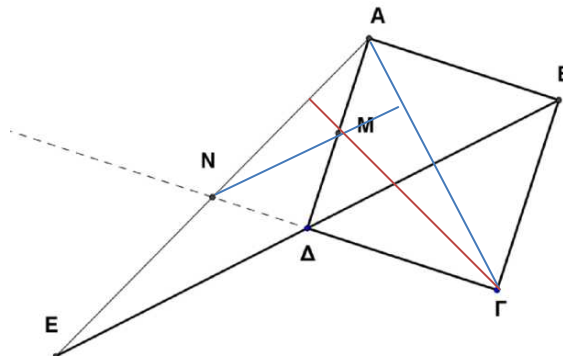
γ) Να αποδείξετε ότι:

ί. $MN \perp AG$

Μονάδες 5

ίι. $GM \perp AN$

Μονάδες 5

**Λύση**α) Αφού $AB\Gamma\Delta$ τετράγωνο είναι $\Gamma\Delta \parallel AB$ άρα και $\Gamma N \parallel AB$ οπότε $\Delta N \parallel AB$ Στο τρίγωνο ABE το Δ είναι μέσο της BE και $\Delta N \parallel AB$ άρα το N μέσο της AE οπότε

$$\Delta N = \frac{AB}{2} = \frac{A\Delta}{2} = M\Delta$$

β) Αφού

$$A\Delta \perp N\Gamma \text{ είναι } \widehat{A\Delta N} = 90^\circ$$

Επίσης αφού $\Delta N = M\Delta$ το τρίγωνο $MN\Delta$ είναι ισοσκελές άρα

$$\widehat{NM\Delta} = \widehat{\Delta NM}$$

Έτσι λοιπόν

$$\widehat{NM\Delta} + \widehat{\Delta NM} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{\Delta NM} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Delta NM} = 45^\circ = \widehat{NM\Delta}$$

γ) i) Αφού $MN \parallel BE$ και $BE \perp AG$ (οι διαγώνιοι τετραγώνου τέμνονται κάθετα) έχουμε ότι $MN \perp AG$ ii) Στο τρίγωνο AGN τα $A\Delta$ και $N\Delta$ είναι ύψη άρα το M είναι το ορθόκεντρο οπότε και $GM \perp AN$ άρα $GM \perp AN$ **ΑΣΚΗΣΗ (4_3806)**

Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στη διαγώνιο AG θεωρούμε σημεία I, O, H ώστε $AI = IO = OH = H\Gamma$. Αν E, Θ και Z τα μέσα των πλευρών $\Delta\Gamma$, AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $OZ\Gamma E$ είναι τετράγωνο.

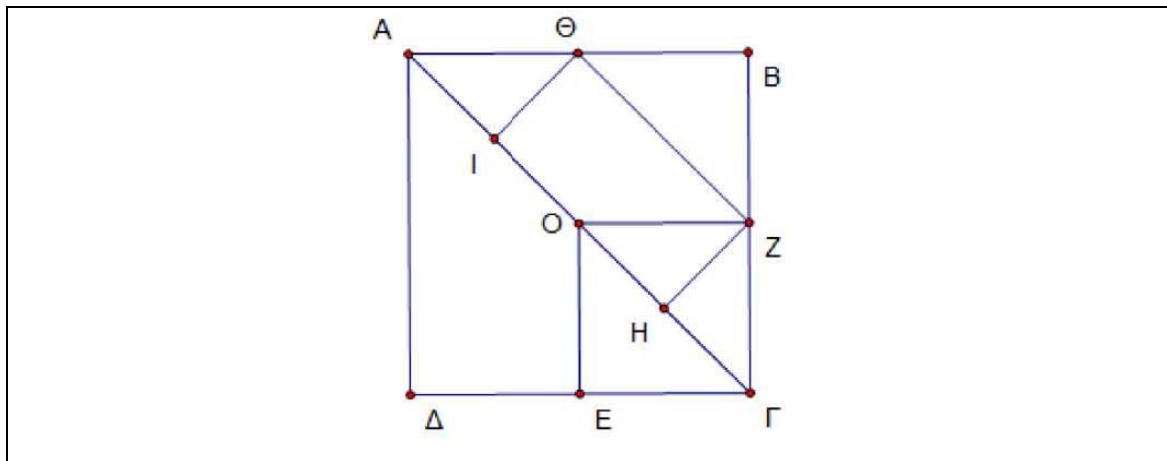
Μονάδες 7

$$\beta) ZH = \frac{AG}{4}$$

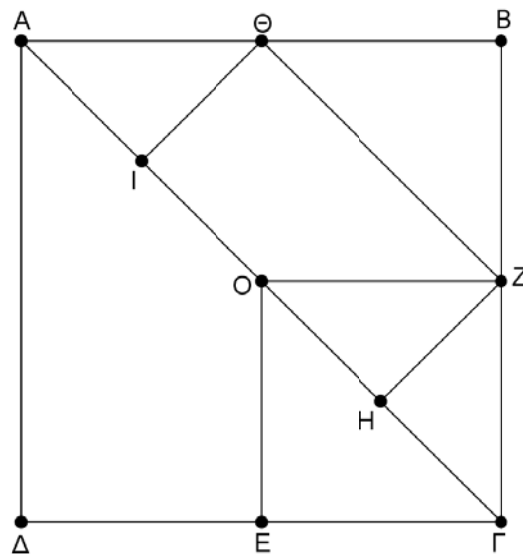
Μονάδες 8

γ) Το τετράπλευρο $I\Theta ZH$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με $\Theta Z = 2\Theta I$.

Μονάδες 10



Λύση



α) Αφού $AI=IO=OH=HG$ έχουμε ότι το O είναι μέσο της $ΑΓ$.

Στο $\triangle AB\Gamma$ το O είναι μέσο της $ΑΓ$ και το Z μέσο της $ΒΓ$ άρα

$$OZ // \frac{AB}{2}$$

Όμως $AB // \Gamma\Delta$ (αφού $AB\Gamma\Delta$ τετράγωνο) άρα

$$OZ // \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow OZ // E\Gamma$$

Οπότε το τετράπλευρο $OZ\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

Αφού $OZ // AB$ και $AB \perp B\Gamma$ θα είναι και $OZ \perp B\Gamma$ άρα

$$OZ \perp Z\Gamma \Leftrightarrow \widehat{OZ\Gamma} = 90^\circ$$

οπότε το παραλληλόγραμμο $OZ\Gamma E$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

Στο $\triangle A\Delta\Gamma$ το O είναι μέσο της $ΑΓ$ και το E μέσο της $\Gamma\Delta$ άρα

$$OE = \frac{A\Delta}{2}$$

Όμως $A\Delta = \Delta\Gamma$ (αφού $AB\Gamma\Delta$ τετράγωνο) άρα

$$OE = \frac{AG}{2} \Leftrightarrow OE = EG$$

Οπότε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΟΖΓΕ είναι ρόμβος άρα είναι τετράγωνο.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΖΓ η ΖΗ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα άρα

$$ZH = \frac{OG}{2} \stackrel{OG=\frac{AG}{2}}{=} \frac{\frac{AG}{2}}{2} = \frac{AG}{4}$$

γ) Στο $\triangle ABG$ το Θ είναι μέσο της ΑΒ και το Ζ μέσο της ΒΓ άρα

$$\Theta Z // = \frac{AG}{2} = \frac{AI + IO + OH + HG}{2} = \frac{2IO + 2OH}{2} = \frac{2IH}{2} = IH$$

Οπότε το τετράπλευρο ΘΖΗΙ είναι παραλληλόγραμμο

Ακόμη το τρίγωνο ΟΖΓ είναι ισοσκελές αφού ΟΖ=ΖΓ οπότε η διάμεσος ΖΗ είναι και ύψος άρα $\widehat{ZH\Gamma} = 90^\circ$ οπότε το παραλληλόγραμμο ΘΖΗΙ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Αφού ΘΖΗΙ παραλληλόγραμμο είναι

$$\Theta Z = IH = \frac{AG}{2} = 2 \frac{AG}{4} = 2ZH = 2\Theta I$$

διότι ΖΗ=ΘΙ (ΘΖΗΙ παραλληλόγραμμο)

ΑΣΚΗΣΗ (4_3808)

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^\circ$), τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών του και το ύψος του ΑΚ. Έστω Θ είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 8

ii. $A\Theta = \Theta E = \frac{BG}{4}$

Μονάδες 7

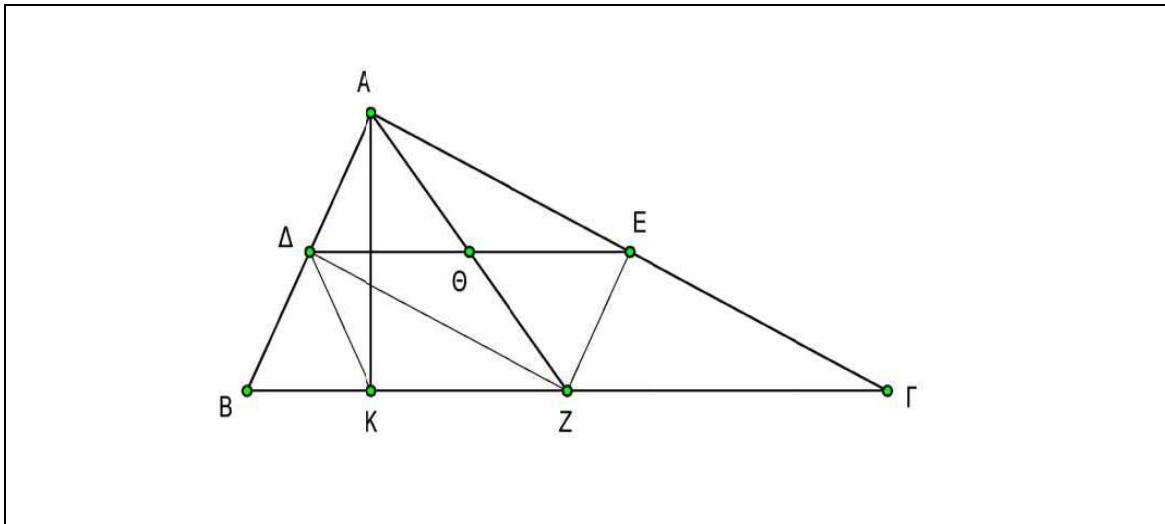
β) Αν επιπλέον είναι γωνία $\widehat{\Gamma} = 30^\circ$

i. Να βρείτε τη γωνία $\widehat{AZB}$

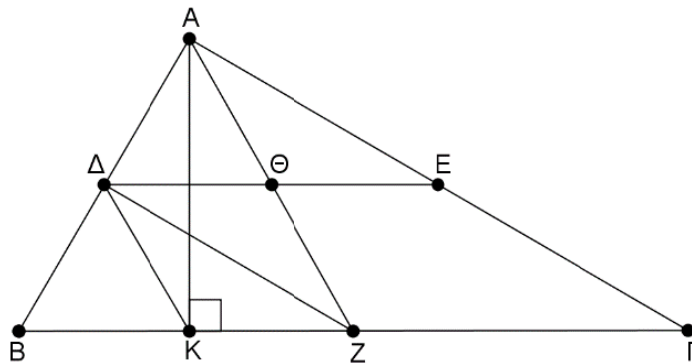
Μονάδες 5

ii. Να αποδείξετε ότι $BK = \frac{BG}{4}$

Μονάδες 5



Λύση



α) i) Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Ζ είναι μέσο της ΒΓ και το Ε μέσο της ΑΓ άρα

$$ΕΖ // = \frac{ΑΒ}{2} \Rightarrow ΕΖ // = \frac{2ΑΔ}{2} \Rightarrow ΕΖ // = ΑΔ$$

Έτσι λοιπόν το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι παραλληλόγραμμο και αφού $\hat{Α} = 90^\circ$ το ΑΕΖΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

ii) Αφού το ΑΕΖΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι ΑΖ=ΔΕ και το Θ είναι μέσο των ΑΖ και ΔΕ οπότε

$$ΑΘ = \frac{ΑΖ}{2} = \frac{ΔΕ}{2} = ΘΕ$$

Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Δ είναι μέσο της ΑΒ και το Ε μέσο της ΑΓ άρα

$$ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$$

$$\text{Έτσι λοιπόν } ΑΘ = \frac{ΔΕ}{2} = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} = \frac{ΒΓ}{4}$$

β) i) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\widehat{AB\Gamma} + \widehat{A\Gamma B} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AB\Gamma} + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{AB\Gamma} = 60^\circ$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ αφού $\widehat{A\Gamma B} = 30^\circ$ είναι

$$AB = \frac{B\Gamma}{2} = BZ \text{ άρα το τρίγωνο } ABZ \text{ είναι ισοσκελές οπότε } \widehat{BAZ} = \widehat{ABZ} = 60^\circ.$$

Έτσι λοιπόν στο τρίγωνο ABZ είναι

$$\widehat{BZA} + \widehat{ZBA} + \widehat{ZAB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BZA} + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{BZA} = 60^\circ$$

ii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABK αφού $\widehat{KBA} = 60^\circ$ έχω

$$\widehat{KBA} + \widehat{BAK} = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \widehat{BAK} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{BAK} = 30^\circ$$

Άρα

$$BK = \frac{AB}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3810)

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) ισχύει $AB + \Gamma\Delta = A\Delta$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Gamma} = 30^\circ$ τέμνει την $B\Gamma$ στο E και την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔAZ είναι ισοσκελές.

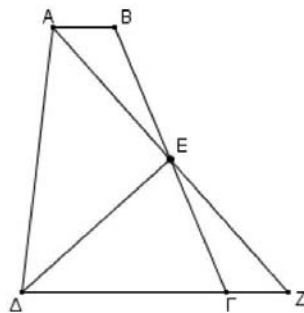
Μονάδες 7

β) Το E είναι το μέσο της $B\Gamma$.

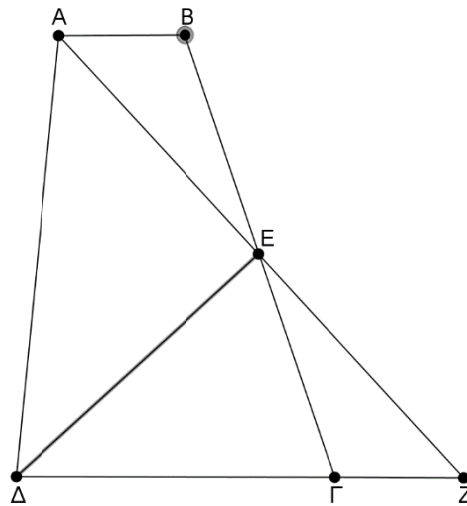
Μονάδες 10

γ) Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$ του τραπεζίου.

Μονάδες 8



Λύση



α) Είναι $\widehat{EAB} = \widehat{ZEA}$ (1) (ως εντός εναλλάξ)

$\widehat{EAB} = \widehat{EAZ}$ (2) (AZ διχοτόμος)

Από (1) και (2) έχουμε ότι $\widehat{ZEA} = \widehat{EAZ}$ άρα το τρίγωνο ΔAZ είναι ισοσκελές

β) Αφού το τρίγωνο ΔAZ είναι ισοσκελές έχουμε ότι $DZ = DA$

Ακόμη

$$\begin{aligned} AB + \Gamma\Delta &= A\Delta \Rightarrow AB = A\Delta - \Gamma\Delta \stackrel{\Delta Z = A\Delta}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow AB = \Delta Z - \Gamma\Delta \Leftrightarrow AB = \Gamma Z \end{aligned}$$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΕΓZ και ΕBA

1) $\widehat{GEZ} = \widehat{BEA}$ (ως εντός εναλλάξ)

2) $\widehat{GZE} = \widehat{BAE}$ (ως εντός εναλλάξ)

3) $\Gamma Z = AB$ (το δείξαμε παραπάνω)

Από Γ-Π-Γ είναι $\widehat{GZE} = \widehat{BEA}$ άρα $EZ = EA$ οπότε E μέσο AZ

γ) Αφού το τρίγωνο ΔAZ είναι ισοσκελές και DE διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του AZ θα είναι και διχοτόμος της $\widehat{AZD}$ του τραπέζιου.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3811)

Δίνεται τραπέζιο ADEB, με $AD \parallel BE$, στο οποίο ισχύει ότι $AB = AD + BE$, και O το μέσον της ΔE. Θεωρούμε σημείο Z στην AB τέτοιο ώστε $AZ = AD$ και $BZ = BE$. Αν γωνία $\widehat{AZD} = \varphi$,

α) να εκφράσετε τη γωνία $\widehat{ZDA}$ σε συνάρτηση με τη φ .

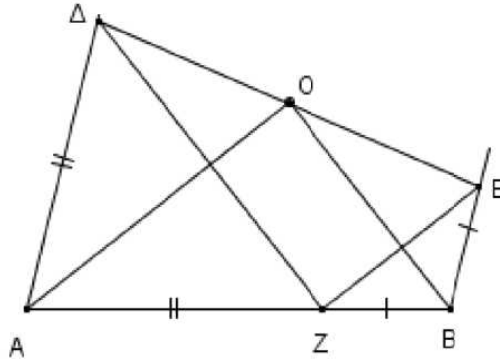
Μονάδες 8

β) Να εκφράσετε τη γωνία $\widehat{E\hat{Z}B}$ σε συνάρτηση με τη φ .

Μονάδες 8

γ) Να αποδείξετε ότι οι OA και OB είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔZ και ZE αντίστοιχα.

Μονάδες 9

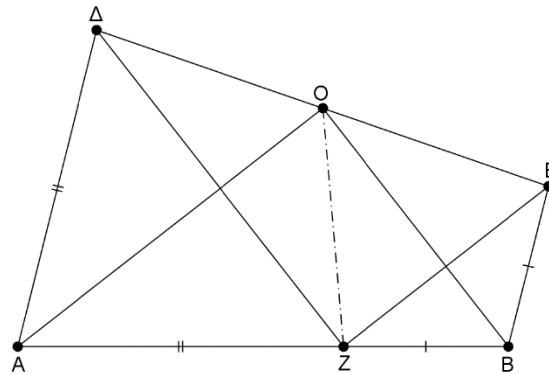


Λύση

α) Αφού $AZ = \Delta Z$ το τρίγωνο $AZ\Delta$ ισοσκελές, οπότε $\widehat{A\hat{\Delta}Z} = \widehat{A\hat{Z}\Delta}$.

Στο τρίγωνο $AZ\Delta$ έχουμε,

$$\widehat{A\hat{\Delta}Z} + \widehat{A\hat{Z}\Delta} + \widehat{\Delta\hat{A}Z} = 180^\circ \Leftrightarrow \varphi + 2\widehat{A\hat{Z}\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{A\hat{Z}\Delta} = 180^\circ - \varphi \Leftrightarrow \widehat{A\hat{Z}\Delta} = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$$



β) Αφού $BZ = BE$ το τρίγωνο EZB είναι ισοσκελές οπότε $\widehat{B\hat{E}Z} = \widehat{B\hat{Z}E}$

Ακόμη

$$\widehat{Z\hat{B}E} + \widehat{\Delta\hat{A}Z} = 180^\circ \quad (1) \text{ ως εντός και επί τα αυτά}$$

Από (1) έχουμε,

$$\widehat{Z\hat{B}E} + \varphi = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{Z\hat{B}E} = 180^\circ - \varphi \quad (2)$$

Στο τρίγωνο EZB έχουμε

$$\widehat{Z\hat{B}E} + \widehat{E\hat{Z}B} + \widehat{Z\hat{E}B} = 180^\circ \Leftrightarrow 180^\circ - \varphi + 2\widehat{E\hat{Z}B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{E\hat{Z}B} = \varphi \Leftrightarrow \widehat{E\hat{Z}B} = \frac{\varphi}{2}$$

γ) Ισχύει ότι

$$\widehat{AZ\Delta} + \widehat{EZB} = 90^\circ - \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} = 90^\circ$$

άρα το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ορθογώνιο στο Ζ

Αφού Ο μέσο της υποτεινούσας ΕΔ στο τρίγωνο ΔΖΕ είναι

$$ZO = \frac{DE}{2} \Rightarrow ZO = DO = OE$$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΟΑ και ΟΑΖ

- 1) ΟΑ κοινή
- 2) ΑΔ=ΑΖ (από δεδομένα)
- 3) ΟΔ=ΟΖ (το δείξαμε παραπάνω)

Από Π-Π-Π είναι $\widehat{\Delta O A} = \widehat{O A Z}$ άρα $\widehat{\Delta A O} = \widehat{O A Z}$ οπότε η ΟΑ είναι διχοτόμος της $\widehat{\Delta A B}$ στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΑΖ άρα και μεσοκάθετος της ΔΖ

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΖΟΒ και ΕΟΒ

- 1) ΟΒ κοινή
- 2) ΖΒ=ΒΕ (από δεδομένα)
- 3) ΟΖ=ΟΕ (το δείξαμε παραπάνω)

Από Π-Π-Π είναι $\widehat{Z O B} = \widehat{E O B}$ άρα $\widehat{Z B O} = \widehat{E B O}$ οπότε η ΟΒ είναι διχοτόμος της $\widehat{E B Z}$ στο ισοσκελές τρίγωνο ΕΒΖ άρα και μεσοκάθετος της ΖΕ

ΑΣΚΗΣΗ (4_3812)

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με $AB > AD$. Θεωρούμε σημεία Κ, Λ, των ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα ώστε $AK = AL$. Έστω Μ το μέσο του ΚΛ και η προέκταση του ΑΜ (προς το Μ) τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) $AD = DE$.

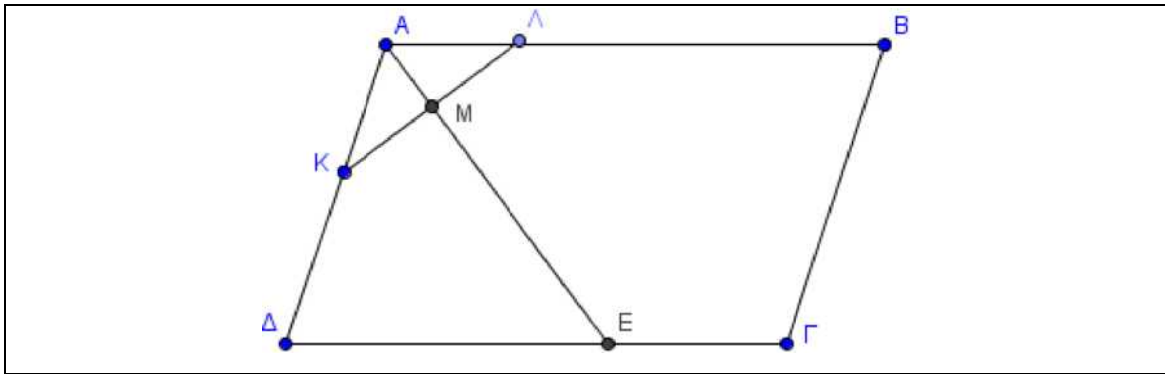
Μονάδες 8

β) $B\Gamma + \Gamma E = AB$.

Μονάδες 10

γ) $\widehat{B} = 2 \cdot \widehat{AK}$

Μονάδες 7

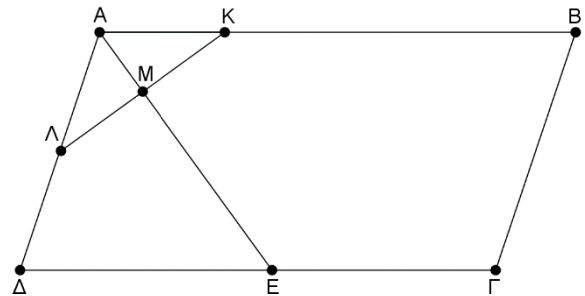
**Λύση**

α) Αφού $AK=AL$ το τρίγωνο AKL είναι ισοσκελές με βάση την KL και επειδή το M είναι μέσο του KL η AM είναι διάμεσος άρα και διχοτόμος της $\widehat{A\Delta B}$ οπότε

$$\widehat{\Delta A E} = \widehat{E A B} \quad (1)$$

Όμως $\widehat{E A B} = \widehat{\Delta E A}$ (2) ως εντός εναλλάξ

Από (1) και (2) έχουμε $\widehat{\Delta A E} = \widehat{\Delta E A}$ άρα το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές οπότε $A\Delta = \Delta E$



β) Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο είναι $B\Gamma = A\Delta$ και $\Delta\Gamma = AB$, οπότε

$$B\Gamma + \Gamma E = A\Delta + \overset{A\Delta = \Delta E}{\Gamma E} = \Delta E + \Gamma E = \Delta\Gamma = AB$$

γ) Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο είναι $\widehat{A\hat{B}\Gamma} = \widehat{A\hat{\Delta}\Gamma}$, οπότε

$$\widehat{B} = \widehat{A\hat{B}\Gamma} = \widehat{A\hat{\Delta}\Gamma} = 180^\circ - \widehat{\Delta\hat{A}B} = \widehat{A\hat{K}L} + \overset{\substack{\Delta \\ AKL \text{ ισοσκελές}}}{\widehat{K\hat{L}A}} = 2\widehat{A\hat{L}K}$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3813)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2 B\Gamma$. Από την κορυφή A φέρουμε την AE κάθετη στην ευθεία $B\Gamma$ και M, N τα μέσα των $AB, \Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $MB\Gamma N$ είναι ρόμβος.

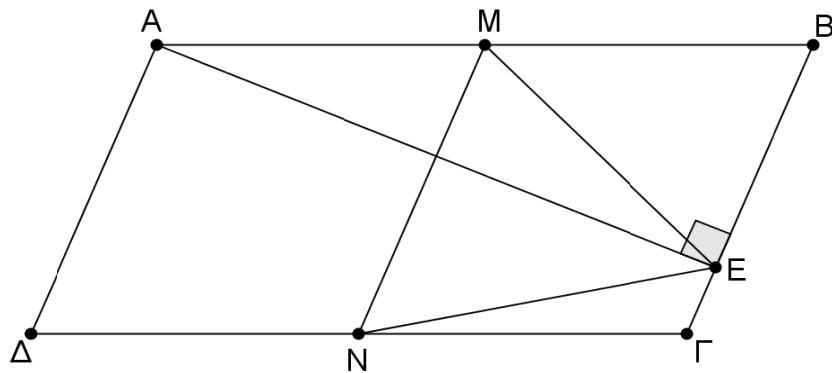
Μονάδες 8

β) Το τετράπλευρο $ME\Gamma N$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 9

γ) Η EN είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ME\Gamma}$.

Μονάδες 8

**Λύση**

α) Αφού το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο έχουμε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$

Ακόμη M μέσο της AB άρα

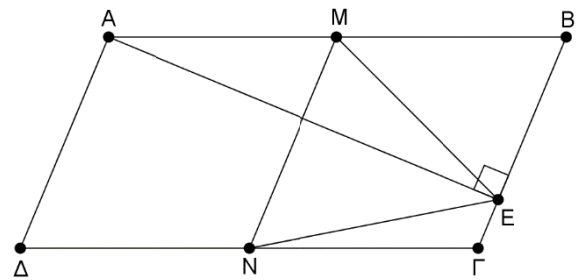
$$MB = \frac{AB}{2}$$

και N μέσο της ΔΓ άρα

$$N\Gamma = \frac{\Delta\Gamma}{2}$$

Έτσι λοιπόν $MB \parallel N\Gamma$ άρα το MBΓN είναι παραλληλόγραμμο

Επιπλέον, $MB = \frac{AB}{2} = \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma$ άρα το MBΓN είναι ρόμβος.



β) Αφού $MN \parallel B\Gamma$ θα είναι και $MN \parallel E\Gamma$ άρα το MNΓE είναι τραπέζιο

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABE η EM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα οπότε είναι

$$EM = \frac{AB}{2} = B\Gamma$$

Επιπλέον αφού MBΓN είναι ρόμβος $B\Gamma = \Gamma N$ άρα $EM = \Gamma N$ οπότε το MNΓE είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Είναι $EM = \frac{AB}{2} = \frac{2MB}{2} = MB$ και $MB = MN$ αφού το MBΓN είναι ρόμβος

Οπότε $ME = MN$ άρα το τρίγωνο MNE είναι ισοσκελές

Έτσι λοιπόν $\widehat{MEN} = \widehat{MNE}$

Αλλά $\widehat{MNE} = \widehat{NE\Gamma}$ (ως εντός εναλλάξ) άρα $\widehat{MEN} = \widehat{NE\Gamma}$ οπότε η EN είναι διχοτόμος της $\widehat{ME\Gamma}$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3815)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$, τη γωνία $\hat{A}$ αμβλεία και M το μέσο της $\Gamma\Delta$. Φέρουμε κάθετη στην $A\Delta$ στο σημείο A , η οποία τέμνει την $B\Gamma$ στο H . Αν η προέκταση της HM τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο E , να αποδείξετε ότι:

α) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta\hat{A}B}$.

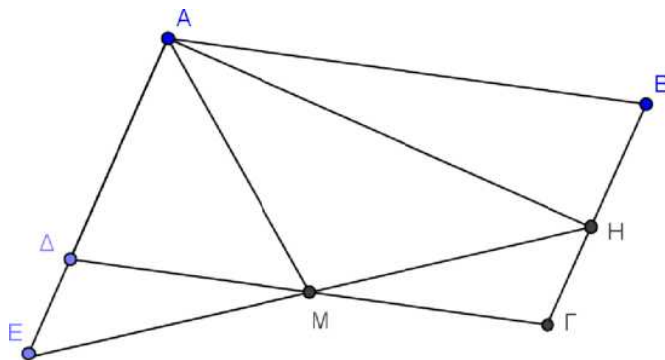
Μονάδες 9

β) Τα τμήματα EH , $\Delta\Gamma$ διχοτομούνται.

Μονάδες 8

γ) $\hat{E} = \hat{\Delta\hat{M}A}$.

Μονάδες 8

**Λύση**

α) Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο είναι $AB = \Delta\Gamma$ και $B\Gamma = A\Delta$

Όμως $AB = 2B\Gamma$ άρα και

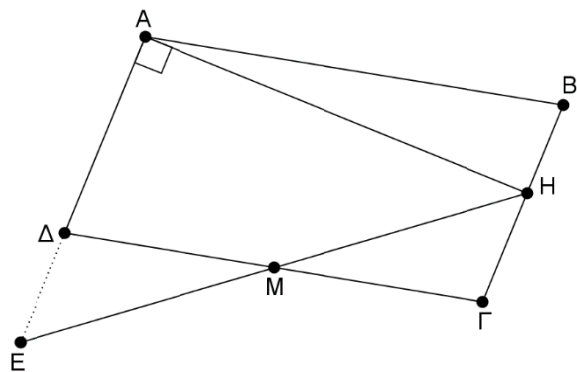
$$\Delta\Gamma = 2A\Delta \Rightarrow 2\Delta M = 2A\Delta \Leftrightarrow \Delta M = A\Delta$$

Έτσι λοιπόν το τρίγωνο $A\Delta M$ είναι ισοσκελές με βάση την AM άρα

$$\hat{M\hat{A}\Delta} = \hat{\Delta\hat{M}A}$$

Όμως $\hat{\Delta\hat{M}A} = \hat{M\hat{A}B}$ (ως εντός εναλλάξ)

άρα $\hat{M\hat{A}\Delta} = \hat{M\hat{A}B}$ οπότε AM διχοτόμος της $\hat{\Delta\hat{A}B}$



β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔEM και $M\hat{H}\Gamma$

1) $\Delta M = M\Gamma$ (M μέσο της $\Gamma\Delta$)

2) $\hat{E\hat{M}\Delta} = \hat{H\hat{M}\Gamma}$ (ως κατακορυφήν)

3) $\hat{E\hat{\Delta}M} = \hat{H\hat{\Gamma}M}$ (ως εντός εναλλάξ)

Από Γ -Π- Γ είναι $\hat{\Delta\hat{E}M} = \hat{M\hat{H}\Gamma}$ άρα $\Delta E = H\Gamma$ και αφού $\Delta E \parallel H\Gamma$ το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma H$

είναι παραλληλόγραμμο άρα οι διαγώνιοι του ΕΗ και ΔΓ διχοτομούνται

γ) Αφού οι διαγώνιοι ΕΗ και ΔΓ διχοτομούνται το Μ αποτελεί μέσο της ΕΗ

Το τρίγωνο ΕΑΗ είναι ορθογώνιο στο Α με διάμεσο την ΑΜ οπότε

$$AM = \frac{EH}{2} = EM$$

άρα το τρίγωνο ΑΕΜ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΕ οπότε

$$\widehat{MAE} = \widehat{MEA}$$

Όμως $\widehat{MAE} = \widehat{DMA}$ αφού το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές άρα

$$\widehat{MEA} = \widehat{DMA}$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3820)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με την γωνία Α ορθή και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ.

Έστω Κ, Μ, Ν τα μέσα των ΓΔ, ΒΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

(α) Το τετράπλευρο ΚΜΝΔ είναι παραλληλόγραμμο

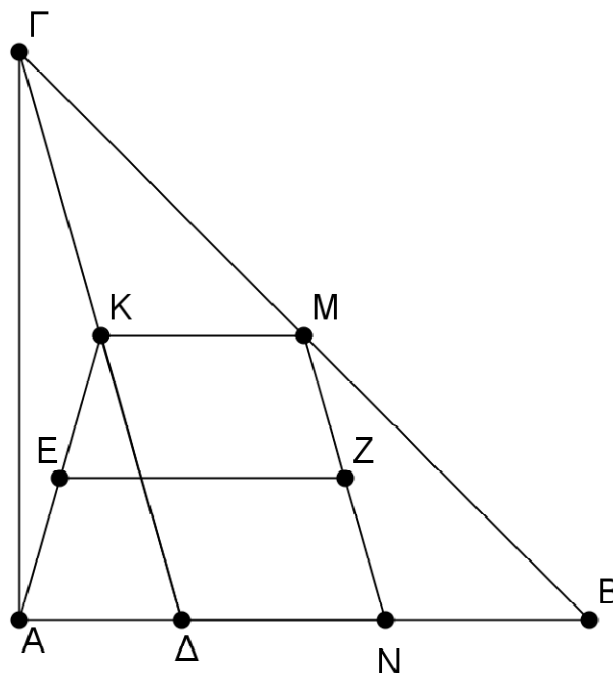
Μονάδες 8

(β) Το τετράπλευρο ΑΚΜΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο

Μονάδες 9

(γ) Η διάμεσος του τραπεζίου ΑΚΜΝ είναι ίση με $\frac{AB}{2}$

Μονάδες 8



Λύση

(α) Στο τρίγωνο $\Gamma\Delta\text{B}$ η KM ενώνει τα μέσα των πλευρών $\Gamma\Delta$ και ΓB .

Άρα $\text{KM} \parallel \Delta\text{B}$.

Επίσης στο ίδιο τρίγωνο, η MN ενώνει τα μέσα των πλευρών $\text{B}\Gamma$ και $\text{B}\Delta$ άρα

$$\text{MN} \parallel \Gamma\Delta$$

Συνεπώς το τετράπλευρο KMNA είναι παραλληλόγραμμο διότι έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

(β) Δείξαμε από το (α) ερώτημα, ότι $\text{KM} \parallel \text{AN}$. Για να δείξουμε ότι το τετράπλευρο KMNA είναι τραπέζιο, αρκεί να δείξουμε ότι οι πλευρές AK και MN δεν είναι παράλληλες.

Πράγματι αν ήταν $\text{AK} \parallel \text{MN}$, τότε από το σημείο K θα είχαμε δύο παράλληλες προς την MN , μία την KA και την άλλη την KD (λόγω του παραλληλογράμμου KMNA). Τούτο όμως αντίκειται στο Ευκλείδειο αίτημα.

Δείξαμε λοιπόν ότι το τετράπλευρο KMNA είναι τραπέζιο.

Επίσης έχουμε: $\text{MN} = \text{KD}$ (ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου) και

$$\text{AK} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \text{ (διότι η AK είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα του ορθογωνίου}$$

τριγώνου $\text{A}\Gamma\Delta$), άρα $\text{AK} = \text{KD}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\text{AK} = \text{MN}$ και άρα το τραπέζιο KMNA είναι ισοσκελές.

(γ) Για την διάμεσο του πιο πάνω τραpezίου έχουμε:

$$\text{EZ} = \frac{\text{KM} + \text{AN}}{2} = \frac{\frac{\Delta\text{B}}{2} + \text{A}\Delta + \Delta\text{N}}{2} = \frac{\text{NB} + \text{A}\Delta + \Delta\text{N}}{2} = \frac{\text{AB}}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3822)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $\text{AB}\Gamma\Delta$ με τη γωνία του B να είναι ίση με 70° και το ύψος του AE . Έστω Z σημείο της $\text{B}\Gamma$ ώστε $\text{BE} = \text{EZ}$.

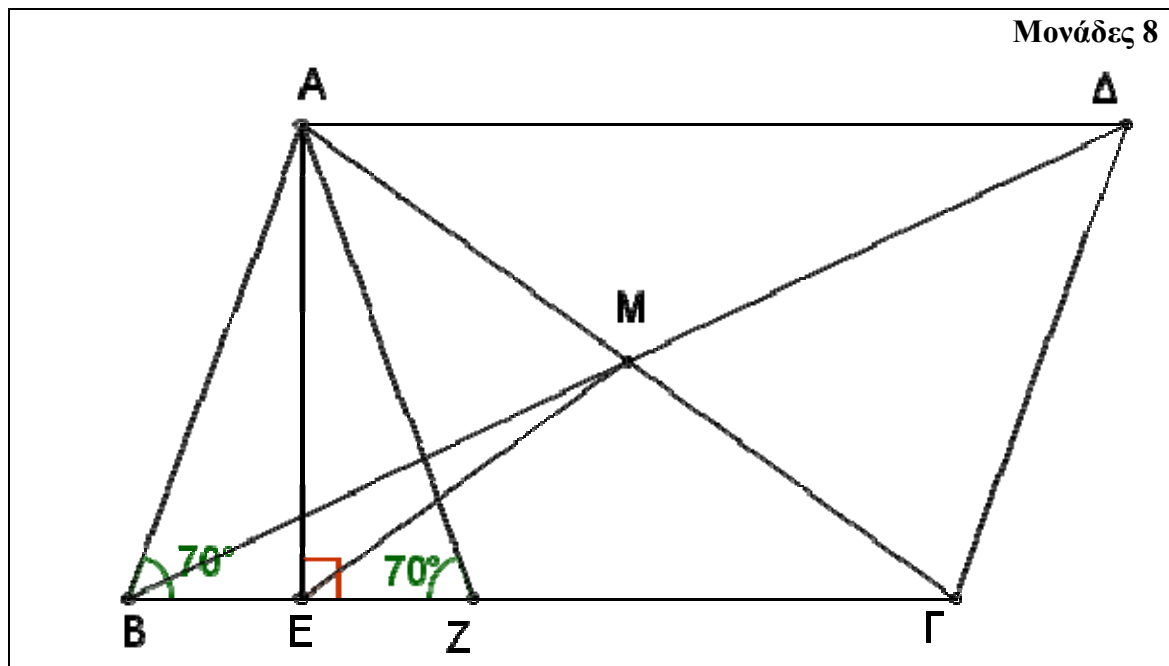
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\text{AZ}\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 8

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραpezίου $\text{AZ}\Gamma\Delta$

Μονάδες 9

γ) Αν M το μέσο του $\text{B}\Delta$ να αποδείξετε ότι $\text{EM} = \frac{\text{A}\Gamma}{2}$

**Λύση**

α) Η ΑΕ είναι μεσοκάθετος του ΒΖ, άρα το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές ($AB = AZ$), όμως $AB = ΓΔ$, από το παραλληλόγραμμο, Οπότε έχουμε $AZ = ΓΔ$, $ZΓ \parallel ΑΔ$, ενώ οι $AZ, ΓΔ$ δεν είναι παράλληλες, αφού $AB \parallel ΓΔ$.

Άρα το ΑΖΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Είναι

$$\hat{B} = \hat{AZB} = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{AZΓ} = 110^\circ$$

Εξάλλου από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι

$$\hat{B} = \hat{\Delta} = 70^\circ$$

Επομένως οι γωνίες του ισοσκελούς τραπέζιου είναι:

$$\hat{\Delta} = \hat{Z\Delta\Gamma} = 70^\circ, \hat{AZΓ} = \hat{\Delta\Gamma Z} = 110^\circ$$

γ) Το Μ είναι και μέσο της ΑΓ, αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Άρα η ΕΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΕΓ, οπότε:

$$EM = \frac{AG}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3824)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Φέρνουμε το ύψος του ΑΔ και την διάμεσό του ΑΜ. Από το Γ φέρνουμε κάθετη στην ευθεία ΑΜ, η οποία την τέμνει στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

(α) Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο.

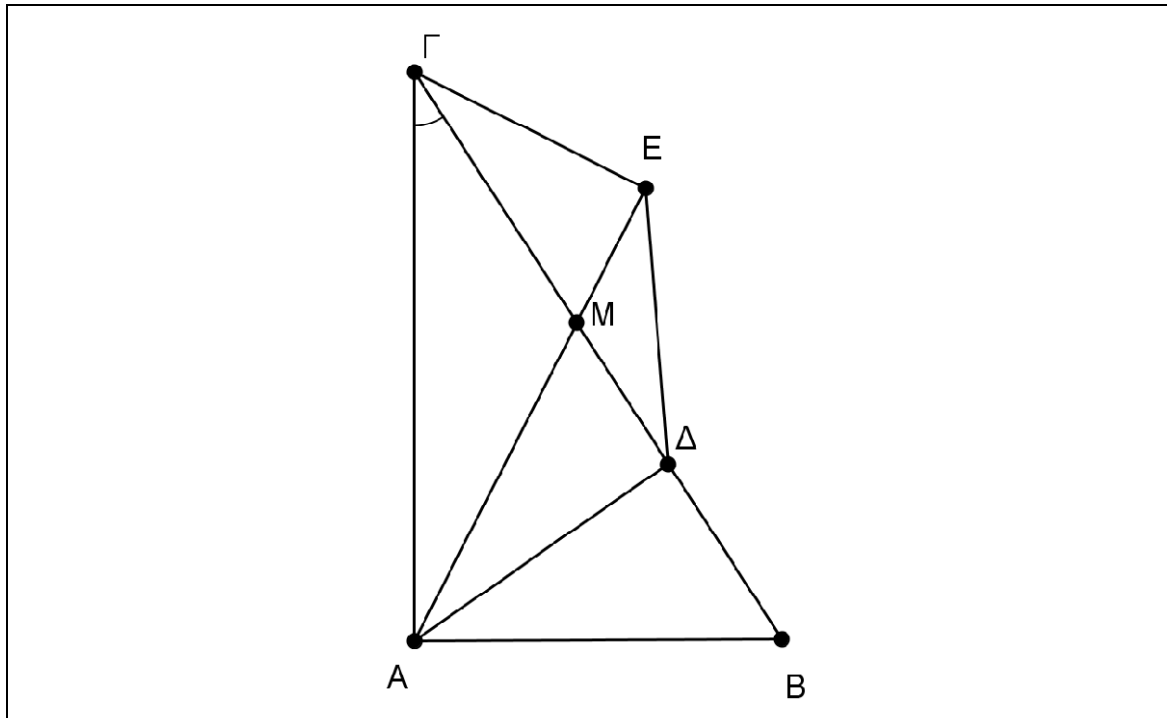
Μονάδες 8

(β) $ME = M\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$

Μονάδες 9

(γ) Το ΑΔΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 8

**Λύση**

(α) Αφού $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, άρα $AB = \frac{B\Gamma}{2} = BM$. Επίσης αφού η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ, έπεται ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2} = BM$.

Άρα $AB = AM = BM$ και άρα το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο.

(β) Τα ορθογώνια τρίγωνα AΔM και MΓE έχουν:

- $AM = MG$ (διότι $AM = \frac{B\Gamma}{2}$) και
- $\widehat{AM\Delta} = \widehat{ΓME}$, ως κατακορυφήν)

Άρα τα εν λόγω τρίγωνα είναι ίσα και άρα θα έχουν και $ME = M\Delta$.

Όμως αφού το τρίγωνο ABM είναι ισόπλευρο, το ύψος του AΔ θα είναι και διάμεσος.
Άρα

$$M\Delta = \frac{MB}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}.$$

(γ) Αφού

$$\hat{\Gamma} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{\Gamma AM} = 30^\circ, \text{ (εφόσον το τρίγωνο } AM\Gamma \text{ είναι ισοσκελές).}$$

Άρα

$$\widehat{\Gamma MA} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{EM\Delta} = 120^\circ, \text{ (ως κατακορυφήν).}$$

Όμως $ME = M\Delta$ (από την ισότητα των πιο πάνω τριγώνων). Άρα

$$\widehat{ME\Delta} = \widehat{M\Delta E} = 30^\circ.$$

Αφού λοιπόν $\widehat{\Gamma\Delta\epsilon} = \widehat{\Delta\epsilon\Gamma} (= 30^\circ)$, θα είναι $\epsilon\Delta // \Gamma\Lambda$.

Θα δείξουμε τώρα ότι οι ευθείες $\Gamma\epsilon$ και $\Lambda\Delta$ δεν είναι παράλληλες.

Έχουμε:

$\widehat{\Delta\Lambda\epsilon} = 30^\circ$, (διότι αφού η $\Lambda\Delta$ είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο $\Lambda\epsilon\beta$, θα είναι και διχοτόμος.)

Επίσης

$\widehat{\epsilon\Gamma\epsilon} = 30^\circ$ (αφού $\widehat{\epsilon\Gamma\epsilon} = \widehat{\epsilon\Lambda\Delta}$ λόγω της ισότητας των τριγώνων $\epsilon\Gamma\epsilon$ και $\Delta\Lambda\epsilon$).

Έχουμε λοιπόν:

$$\widehat{\epsilon\Gamma\Lambda} + \widehat{\Delta\Lambda\Gamma} = \widehat{\epsilon\Gamma\epsilon} + \widehat{\epsilon\Gamma\Lambda} + \widehat{\Delta\Lambda\epsilon} + \widehat{\Delta\Lambda\Gamma} = 30^\circ + 30^\circ + 30^\circ + 30^\circ = 120^\circ < 180^\circ$$

Άρα οι ευθείες $\Gamma\epsilon$ και $\Lambda\Delta$ δεν είναι παράλληλες και άρα το $\Lambda\Delta\epsilon\Gamma$ είναι τραπέζιο.

Επίσης από την ισότητα των τριγώνων $\epsilon\Gamma\epsilon$ και $\Delta\Lambda\epsilon$ έπεται ότι $\Gamma\epsilon = \Delta\Lambda$. Άρα το τραπέζιο $\Lambda\Delta\epsilon\Gamma$ είναι ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3904)

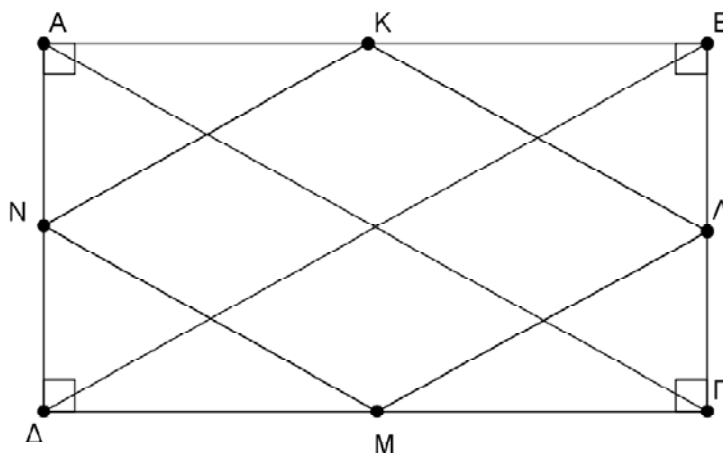
α) Σε ορθογώνιο $\Lambda\beta\Gamma\Delta$ θεωρούμε $\kappa, \Lambda, \epsilon, \epsilon$ τα μέσα των πλευρών του $\Lambda\beta, \beta\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta\Lambda$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\kappa\Lambda\epsilon\epsilon$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 15

β) Σε ένα τετράπλευρο $\Lambda\beta\Gamma\Delta$ τα μέσα $\kappa, \Lambda, \epsilon, \epsilon$ των πλευρών του $\Lambda\beta, \beta\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta\Lambda$ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο $\Lambda\beta\Gamma\Delta$, πρέπει να είναι απαραίτητα ορθογώνιο; Να τεκμηριώσετε τη θετική ή αρνητική σας απάντηση.

Μονάδες 10

Λύση



α) Το $\kappa\Lambda\epsilon\epsilon$ είναι παραλληλόγραμμο αφού ενώνει τα μέσα των πλευρών του ορθογωνίου $\Lambda\beta\Gamma\Delta$ (από εφαρμογή 1 σελ. 106). Είναι

$$\kappa\epsilon = \frac{\beta\Delta}{2} \text{ και } \kappa\Lambda = \frac{\Lambda\Gamma}{2}$$

αφού τα τμήματα KN, KL ενώνουν τα μέσα δύο πλευρών των τριγώνων $AB\Delta$ και $AB\Gamma$ αντίστοιχα.

Όμως $B\Delta = A\Gamma$ ως διαγώνιοι ορθογωνίου, έτσι και $KN = KL$

Άρα το $KLMN$ είναι ρόμβος αφού είναι παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

β) Αν το $KLMN$ είναι ρόμβος τότε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ δεν είναι απαραίτητα ορθογώνιο αφού αρκεί οι διαγώνιοι του να είναι ίσοι ώστε να συμβαίνουν όλα τα παραπάνω.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3906)

Εκτός τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε τετράγωνα $AB\Delta E, A\Gamma ZH$. Αν M το μέσο του $B\Gamma$ και Λ σημείο στην προέκταση της AM τέτοιο, ώστε $AM = M\Lambda$ να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\Lambda = AE$

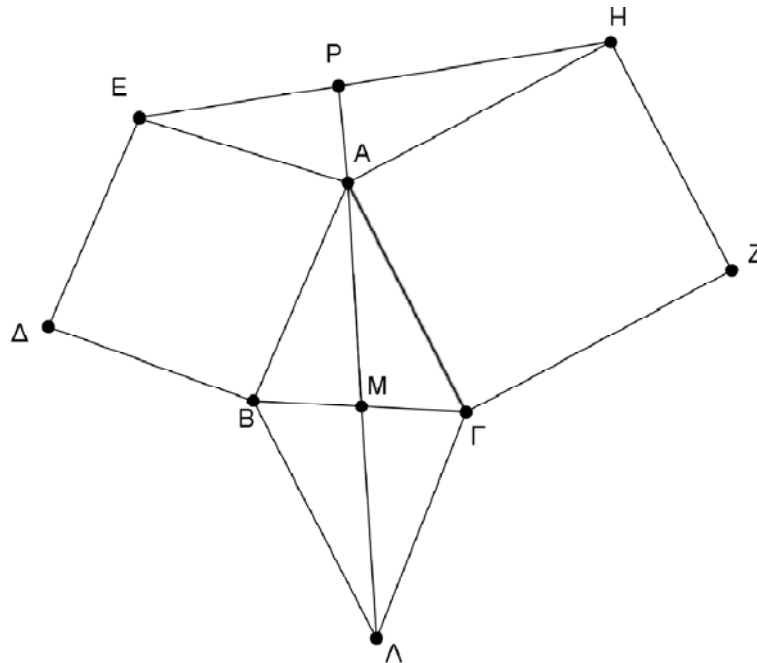
(Μονάδες 10)

β) Οι γωνίες $A\Gamma\Lambda, EAH$ είναι ίσες.

(Μονάδες 10)

γ) Η προέκταση της MA (προς το A) τέμνει κάθετα την EH .

(Μονάδες 5)



Λύση

α) Το $AB\Lambda\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, διότι οι διαγώνιες $A\Lambda, B\Gamma$ διχοτομούνται. Επομένως $\Gamma\Lambda = AB = AE$

β) Οι γωνίες $\hat{A\Gamma\Lambda}, \hat{EAH}$ είναι ίσες, διότι είναι παραπληρωματικές της γωνίας $\hat{B\Lambda\Gamma}$

γ) Τα τρίγωνα $\triangle ΓΑΛ, \triangle ΑΕΗ$ είναι ίσα, διότι $ΓΑ = ΑΗ, ΓΛ = ΑΕ, \hat{ΑΓΛ} = \hat{ΕΑΗ}$

Επομένως :

$$\hat{ΡΑΕ} + \hat{ΡΕΑ} = \hat{ΡΑΕ} + \hat{ΑΛΓ} = \hat{ΡΑΕ} + \hat{ΒΑΛ} = 90^\circ,$$

διότι $\hat{ΕΑΒ} = 90^\circ$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3908)

Δυο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο E . Αν OA και OB είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο O στον κύκλο (K, ρ) να αποδείξετε ότι:

α) $AE = BE$

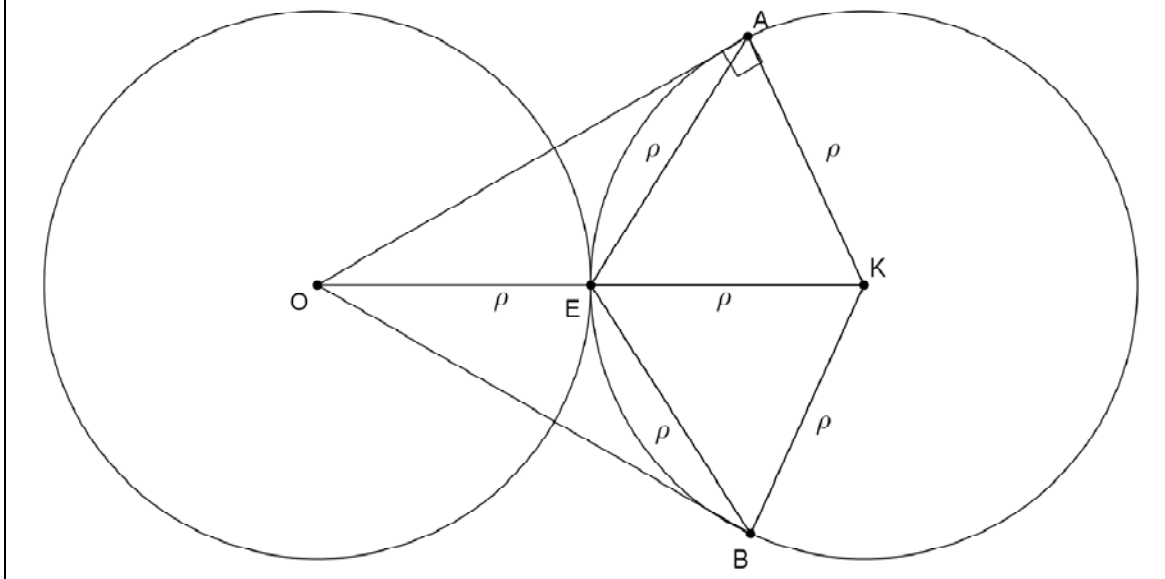
Μονάδες 9

β) $\widehat{ΑΟΚ} = 30^\circ$

Μονάδες 8

γ) Το τετράπλευρο $AKBE$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 8



Λύση

α) Τα τρίγωνα $\triangle AOK$ και $\triangle BOK$ είναι ίσα αφού έχουν:

- OK κοινή πλευρά,
- $KA = KB = \rho$ και
- $OA = OB$ ως εφαπτόμενα τμήματα.

Έτσι

$$\widehat{ΑΟΚ} = \widehat{ΒΟΚ} \quad (1)$$

Τα τρίγωνα $\triangle AOE$ και $\triangle BOE$ είναι ίσα αφού έχουν:

- OE κοινή πλευρά,
- $\widehat{ΑΟΚ} = \widehat{ΒΟΚ}$ από (1) και

- $OA = OB$ ως εφαπτόμενα τμήματα.

Άρα και $AE = BE$

β) Είναι $KA \perp OA$ (ακτίνα στο σημείο επαφής), $AK = \rho$ και $OK = 2\rho$

Άρα $\widehat{AOK} = 30^\circ$ διότι στο ορθογώνιο τρίγωνο AOK η μία κάθετη πλευρά (AK) είναι το μισό της υποτείνουσας (OK) .

γ) Είναι

$$AE = \frac{OK}{2} \Leftrightarrow AE = \rho$$

αφού η AE είναι διάμεσος στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου AOK .

Ομοίως είναι και $BE = AE = \rho$

Άρα $AE = BE = BK = KA = \rho$ δηλαδή το τετράπλευρο $AKBE$ είναι ρόμβος αφού έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3911)

α) Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 13)

β) Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα μέσα K, Λ, M, N των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το $AB\Gamma\Delta$ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Από γνωστή εφαρμογή γνωρίζουμε ότι,

«αν ενώσουμε τα μέσα πλευρών τετράπλευρου, σχηματίζεται παραλληλόγραμμο».

Επομένως το $K\Lambda MN$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι κορυφές του είναι μέσα των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$.

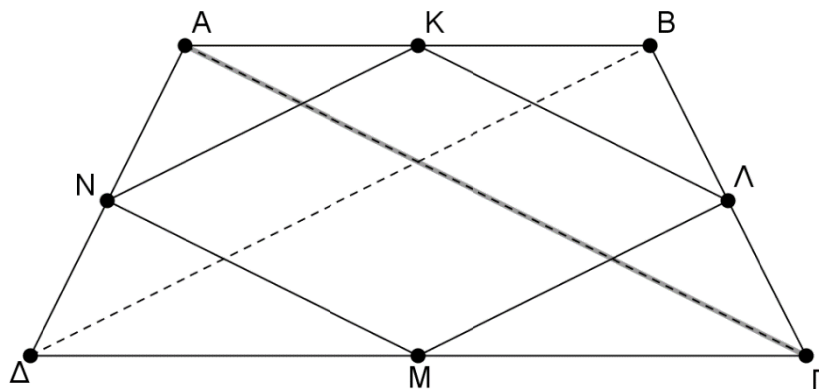
Θα δείξουμε ότι $NK = K\Lambda$.

Στο τρίγωνο $AB\Delta$, τα N, K ενώνουν τα μέσα των πλευρών, άρα $NK // = \frac{B\Delta}{2}$

Όμοια, στο τρίγωνο $AB\Gamma$, τα K, Λ ενώνουν τα μέσα των πλευρών, άρα $K\Lambda // = \frac{A\Gamma}{2}$

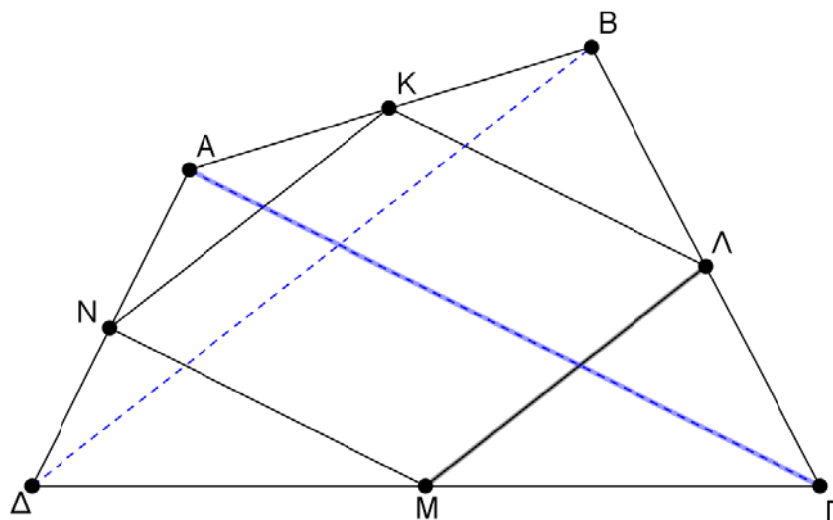
Όμως σε ισοσκελές τραπέζιο οι διαγώνιες $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι ίσες, οπότε $NK = K\Lambda$.

Άρα το $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος (παραλληλόγραμμο + 2 διαδοχικές πλευρές ίσες).



β) Όχι απαραίτητα! Μπορεί το ΑΒΓΔ να είναι ένα τυχαίο τετράπλευρο με διαγώνιες ίσες (στο (α) ερώτημα, τις παράλληλες βάσεις ΑΒ και ΓΔ δεν τις χρησιμοποιήσαμε πουθενά στην απόδειξή μας).

Δείτε και το σχήμα (αν και από μόνο του δεν αποδεικνύει κάτι) για μια καλύτερη εποπτική εικόνα.



ΑΣΚΗΣΗ (4_3915)

(α) Σε ρόμβο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 13

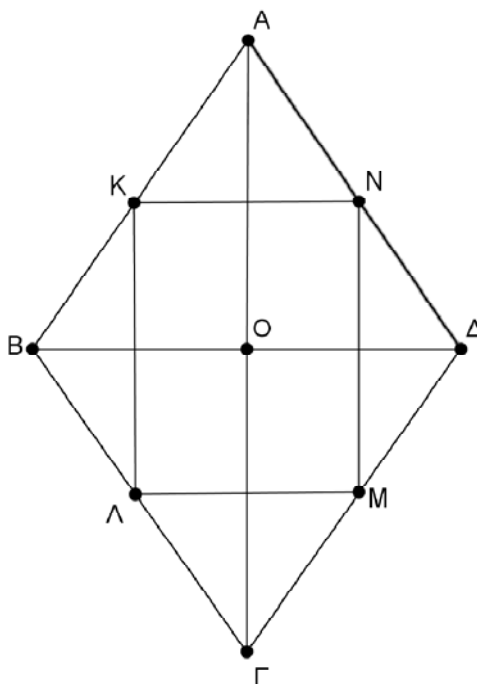
(β) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.

Μονάδες 12

Λύση

(α) Η ΚΝ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΔ του τριγώνου ΑΒΔ. Άρα

$$ΚΝ // = \frac{ΒΔ}{2}$$



Ομοίως έχουμε ότι:

$$ΛΜ // = \frac{ΒΔ}{2}$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι $ΚΝ // = ΛΜ$ και άρα το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο. (Το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου)

Επίσης αφού είναι $ΚΝ // ΒΔ$ και $ΚΛ // ΑΓ$, (διότι η ΚΛ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ), και αφού $\widehat{ΑΟΒ} = 90^\circ$ (διότι οι διαγώνιοι ρόμβου τέμνονται καθέτως), τότε θα είναι και $\widehat{ΝΚΛ} = 90^\circ$, εφόσον οι γωνίες ΑΟΒ και ΝΚΛ έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία. Δείξαμε λοιπόν ότι το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ έχει μία γωνία ορθή άρα είναι ορθογώνιο.

(β) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΛΚ και ΒΚΝ, τα οποία έχουν:

- $ΑΚ = ΚΒ$ (διότι το Κ είναι μέσον του ΑΒ) και
- $ΑΛ = ΒΝ$ (ως μισά των ίσων τμημάτων ΑΔ και ΒΓ).

Άρα τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα και άρα θα έχουν και $ΚΛ = ΚΝ$.

Όμως επί πλέον το τετράπλευρο ΑΚΝΜ είναι παραλληλόγραμμο

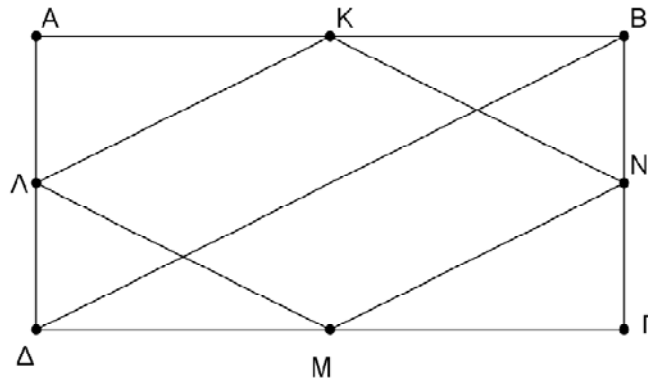
[διότι:

$ΚΛ // = \frac{ΒΔ}{2}$, (αφού ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΔ) και

$ΜΝ // = \frac{ΒΔ}{2}$, (αφού ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΒΔΓ). Δηλαδή είναι

$ΚΛ // = ΜΝ$].

Έτσι, αφού το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, άρα θα είναι ρόμβος.



ΑΣΚΗΣΗ (4_3926)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, τυχαίο σημείο M της βάσης του $B\Gamma$ και το ύψος του BH . Από το M φέρουμε κάθετες $M\Delta$, ME και $M\Theta$ στις AB , $A\Gamma$ και BH αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $MEH\Theta$ είναι ορθογώνιο.

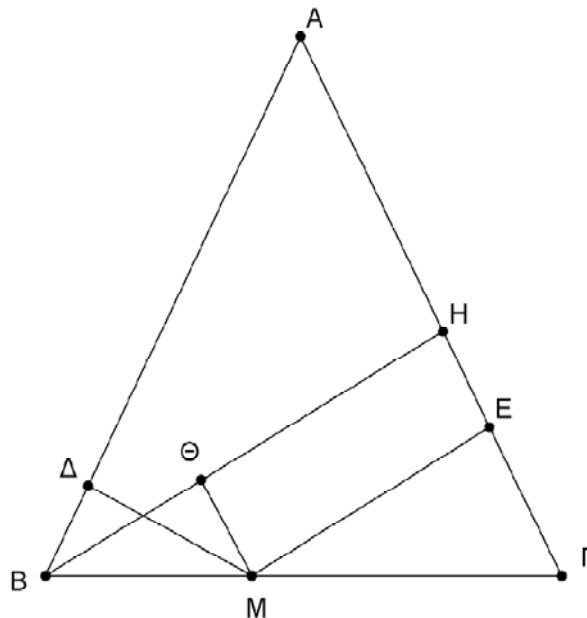
Μονάδες 9

β) $B\Theta = \Theta M$

Μονάδες 9

γ) Το άθροισμα $M\Delta + ME = BH$

Μονάδες 7



Λύση

α) Είναι $\hat{\Theta} = \hat{H} = \hat{E} = 90^\circ$, δηλαδή το τετράπλευρο $MEH\Theta$ είναι ορθογώνιο αφού έχει τρεις ορθές γωνίες.

β) Είναι $M\Theta \parallel \Gamma H$ ως κάθετες στη BH , έτσι $\widehat{\Theta M B} = \hat{\Gamma}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle B\Delta M$ και $\triangle B\Theta M$ είναι ίσα αφού έχουν BM κοινή πλευρά και

$$\widehat{\Theta MB} = \widehat{B} (= \widehat{\Gamma})$$

$$B\Theta = M\Delta \quad (1).$$

γ) Είναι $ME = \Theta H$ (2) από το ορθογώνιο $MEH\Theta$.

$$M\Delta + ME \stackrel{(1),(2)}{=} B\Theta + \Theta H \Leftrightarrow M\Delta + ME = BH$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3932)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Gamma > AB$ και Δ, E, Z τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma, A\Gamma, AB$ αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την ZE στο σημείο M και την προέκταση της ΔE στο σημείο N , να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ZE\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.

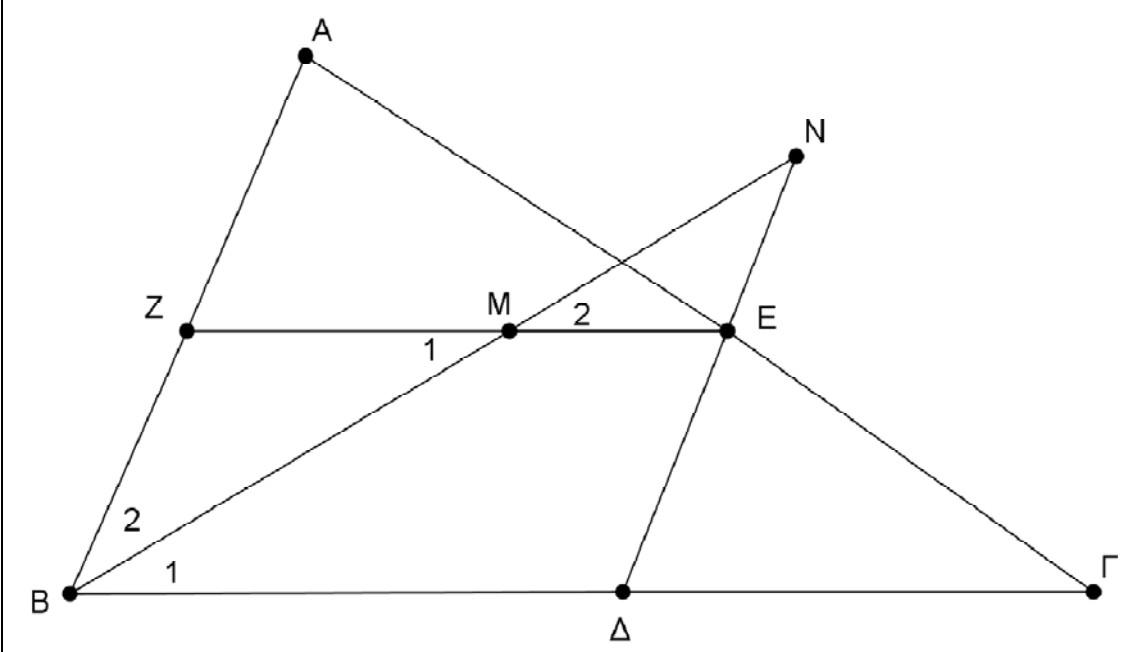
(Μονάδες 7)

β) Τα τρίγωνα BZM και MEN είναι ισοσκελή.

(Μονάδες 10)

γ) $BZ + NE = A\Gamma$.

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Επειδή στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι Z μέσο της πλευράς AB και E μέσο της πλευράς

$A\Gamma$ είναι $ZE \parallel B\Gamma$ και $ZE = \frac{B\Gamma}{2} = B\Delta$ αφού Δ μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Επομένως η

πλευρά ZE είναι παράλληλη και ίση με την πλευρά $B\Delta$ που σημαίνει ότι το τετράπλευρο $ZE\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επομένως $ZE = B\Delta$ (1)

β) Αφού είναι $ZM \parallel B\Delta$ τότε είναι $\hat{B}_1 = \hat{M}_1$ ως εντός εναλλάξ, και επειδή $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ αφού BM διχοτόμος θα είναι και $\hat{B}_2 = \hat{M}_1$ που σημαίνει ότι το τρίγωνο BZM είναι ισοσκελές. Άρα και $BZ = ZM$ (2). Ομοίως είναι $\hat{B}_2 = \hat{N}$ ως εντός εναλλάξ διότι $AB \parallel N\Delta$ αφού το $ZE\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ως κατακορυφήν θα είναι και $\hat{M}_2 = \hat{N}$. Συνεπώς το τρίγωνο MEN είναι ισοσκελές. Επομένως και $ME = EN$ (3).

γ) Με τη βοήθεια των ισοτήτων (2),(3),(1) έχουμε

$$BZ + NE = ZM + ME = ZE = B\Delta = \Delta\Gamma$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3938)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, AM διάμεσός του και K το μέσο του AM . Αν η προέκταση της BK τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο N , και Λ είναι το μέσο του ΓN , να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο N είναι μέσο του $A\Lambda$.

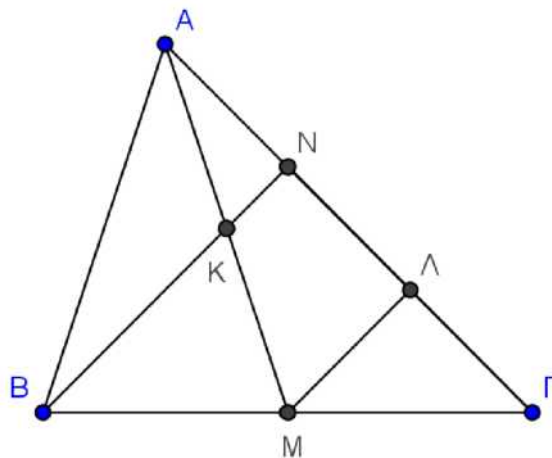
(Μονάδες 9)

β) $\widehat{KM\Gamma} = \widehat{MBK} + \widehat{AKN}$

(Μονάδες 9)

γ) $BK = 3KN$

(Μονάδες 7)



Λύση

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι M μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και Λ μέσο της $A\Gamma$. Τότε είναι $M\Lambda \parallel BN$ και $M\Lambda = \frac{BN}{2}$ (1). Επομένως και $KN \parallel M\Lambda$. Αντιστρόφως στο τρίγωνο $AM\Lambda$ αφού είναι K μέσο της AM και $KN \parallel M\Lambda$ τότε το N είναι μέσο της πλευράς $A\Lambda$ και επομένως θα είναι και

$$KN = \frac{M\Lambda}{2} \Leftrightarrow M\Lambda = 2KN \quad (2)$$

β) Η γωνία $\widehat{KMB}$ και η $\widehat{KM\Gamma}$ είναι παραπληρωματικές. Επομένως είναι

$$\widehat{ΚΜΓ} = 180^\circ - \widehat{ΚΜΒ} \quad (3).$$

Επίσης είναι $\widehat{ΑΚΝ} = \widehat{ΒΚΜ}$ (4) ως κατακορυφήν.

Επομένως στο τρίγωνο ΒΚΜ έχουμε ότι

$$\widehat{ΚΒΜ} + \widehat{ΒΚΜ} + \widehat{ΚΜΒ} = 180^\circ \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} \widehat{ΚΒΜ} + \widehat{ΑΚΝ} = 180^\circ - \widehat{ΚΜΒ} \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (3) και (5) προκύπτει το ζητούμενο

$$\widehat{ΚΜΓ} = \widehat{ΚΒΜ} + \widehat{ΑΚΝ}$$

γ) Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι

$$\frac{BN}{2} = 2KN \Leftrightarrow BN = 4KN \Leftrightarrow BK + KN = 4KN \Leftrightarrow BK = 3KN$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3945)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $BΓ = 2ΑΓ$. Έστω ΑΜ διάμεσος του ΑΒΓ και Κ, Λ τα μέσα των ΜΓ και ΑΒ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{ΜΑΓ} = \widehat{ΑΜΓ}$

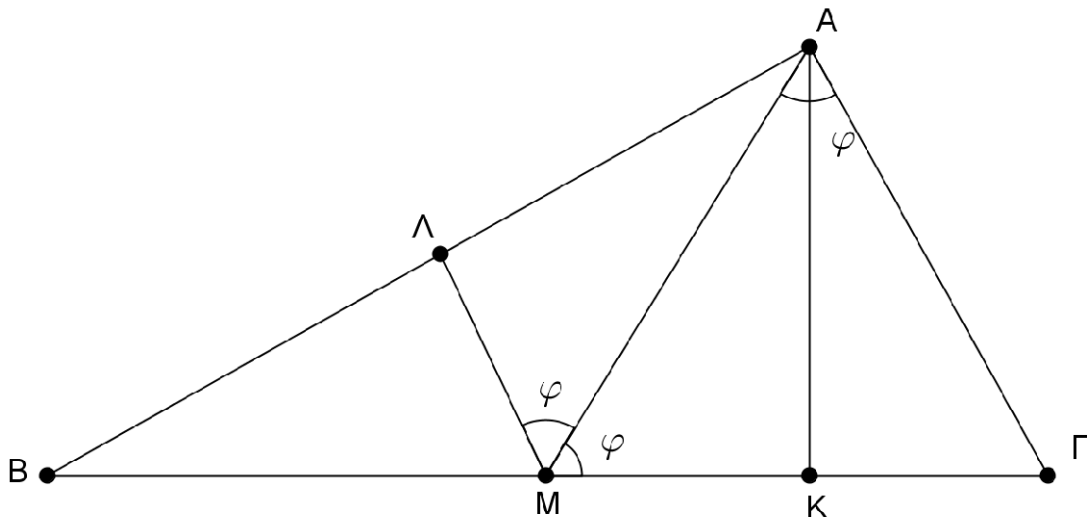
Μονάδες 7

β) $ΜΛ = ΜΚ$

Μονάδες 9

γ) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΛΑΚ}$

Μονάδες 9



Λύση

α) Είναι $ΜΓ = \frac{BΓ}{2}$ αφού το Μ είναι μέσο της ΒΓ και $ΑΓ = \frac{BΓ}{2}$ από υπόθεση.

Έτσι $ΜΓ = ΑΓ$. Δηλαδή το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές οπότε

$$\widehat{ΜΑΓ} = \widehat{ΑΜΓ} = \varphi$$

β) Είναι

$$MK = \frac{M\Gamma}{2} \Leftrightarrow MK = \frac{B\Gamma}{4} \text{ και } \Lambda M = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Lambda M = \frac{B\Gamma}{4}$$

αφού το τμήμα ΛM ενώνει τα μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και ισχύει $\Lambda N \parallel \frac{A\Gamma}{2}$. Έτσι $M\Lambda = MK$

γ) Τα τρίγωνα $\Lambda M\Lambda$ και $\Lambda M\kappa$ είναι ίσα αφού έχουν:

- ΛM κοινή πλευρά,
- $M\Lambda = MK$ από (β) ερώτημα και
- $\widehat{\Lambda M\Lambda} = \widehat{\Lambda M\kappa} = \varphi$ (αφού $\widehat{\Lambda M\Lambda} = \widehat{M\Lambda\Gamma} = \varphi$ ως εντός εναλλάξ των $\Lambda M \parallel A\Gamma$ που τέμνονται από την ΛM και $\widehat{M\Lambda\Gamma} = \widehat{\Lambda M\Gamma} = \varphi$ από (α) ερώτημα).

Άρα $\widehat{\Lambda M\Lambda} = \widehat{\Lambda M\kappa}$ δηλαδή η ΛM είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Lambda A\kappa}$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3948)

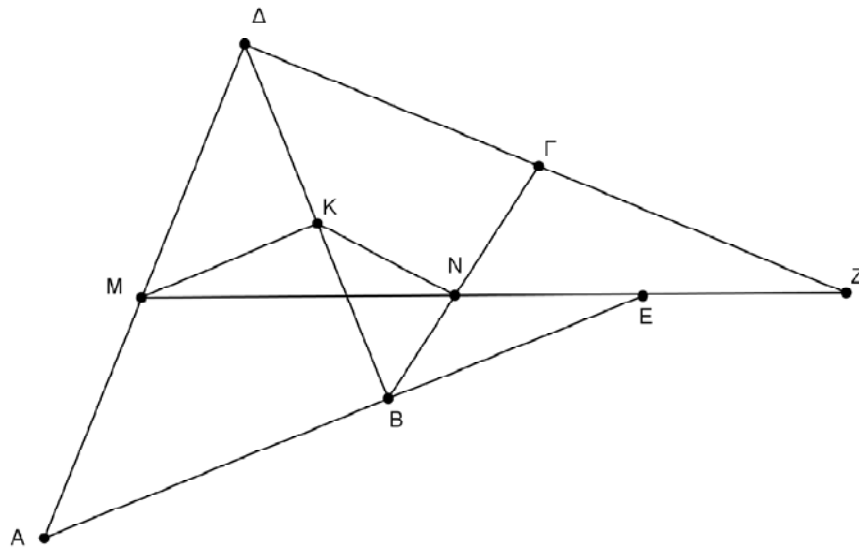
Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = \Gamma\Delta$ και M, N, K τα μέσα των $A\Delta, B\Gamma, B\Delta$ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των AB και $\Delta\Gamma$ τέμνουν την προέκταση της MN στα σημεία E και Z αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α) $MK = KN$

Μονάδες 13

β) $\widehat{ME\Lambda} = \widehat{MZA}$

Μονάδες 12



Λύση

α) Είναι

$$MK \parallel \frac{AB}{2} \quad (1) \text{ και } KN \parallel \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad (2)$$

γιατί τα τμήματα MK, KN ενώνουν τα μέσα δύο πλευρών των τριγώνων $AB\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ αντίστοιχα.

Όμως είναι $AB = \Gamma\Delta$ από την υπόθεση, έτσι από (1), (2) $\Rightarrow MK = KN$

β) Αφού $MK = KN$ το τρίγωνο MKN είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{KMN} = \widehat{KNM}$ (3)

Είναι $\widehat{MEA} = \widehat{KMN}$ (4) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων MK, AB που τέμνονται από την AE .

$\widehat{MZA} = \widehat{KNM}$ (5) ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων KN, AG που τέμνονται από την MZ .

Από τις (4), (5) λόγω της (3) συμπεραίνουμε ότι $\widehat{MEA} = \widehat{MZA}$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3954)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και στην προέκταση της $A\Delta$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Delta E = \Delta\Gamma$ ενώ στην προέκταση της AB θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $BZ = B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\widehat{B\Gamma Z} = \widehat{\Delta\Gamma E}$.

Μονάδες 10

ii. τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά.

Μονάδες 10

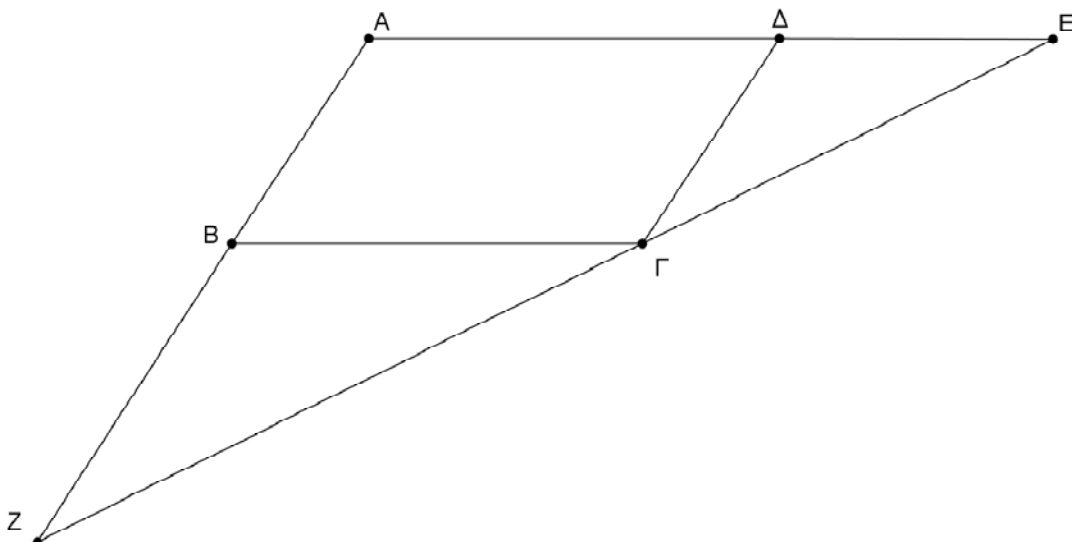
β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό. «Έχουμε: $\widehat{B\Gamma Z} = \widehat{\Delta\Gamma E}$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη ZE και

$\widehat{B\Gamma\Delta} = \widehat{\Gamma\Delta E}$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $\Delta\Gamma$). Όμως $\widehat{\Delta\Gamma E} + \widehat{\Gamma\Delta E} + \widehat{\Delta E\Gamma} = 180^\circ$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\Delta E\Gamma$). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα: $\widehat{\Delta\Gamma E} + \widehat{B\Gamma\Delta} + \widehat{B\Gamma Z} = 180^\circ$.

Οπότε τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά.»

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό.

Μονάδες 5



Λύση

α) i) Είναι $\widehat{\Gamma BZ} = \widehat{\Gamma \Delta E}$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{B}, \hat{\Delta}$ αντίστοιχα του παραλληλογράμμου.

Άρα τα ισοσκελή τρίγωνα ΓBZ και $\Gamma \Delta E$ έχουν τις γωνίες των κορυφών τους ίσες, οπότε τα είναι και οι γωνίες των βάσεων ίσες, δηλαδή $\widehat{B\Gamma Z} = \widehat{\Delta \Gamma E}$.

ii. $\widehat{B\Gamma \Delta} = \widehat{\Gamma \Delta E}$ (1) ως εντός και εναλλάξ.

$$\widehat{B\Gamma Z} + \widehat{B\Gamma \Delta} + \widehat{\Delta \Gamma E} \stackrel{(1),(i)}{=} \widehat{\Delta E \Gamma} + \widehat{\Gamma \Delta E} + \widehat{\Delta \Gamma E} \stackrel{\text{τριγ}\Gamma \Delta E}{=} 180^\circ$$

$$\left(\widehat{B\Gamma Z} = \widehat{\Delta \Gamma E} = \widehat{\Delta E \Gamma} \right)$$

Άρα τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά

β) Το λάθος του μαθητή είναι στο κομμάτι:

«Έχουμε: $\widehat{B\Gamma Z} = \widehat{\Delta E \Gamma}$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη ZE)». Θεώρησε την $Z\Gamma E$ ευθεία, πράγμα το οποίο ζητείται να αποδειχθεί.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3994)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και Δ, E τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Στην προέκταση της ΔE (προς το E) θεωρούμε σημείο Λ ώστε $E\Lambda = AE$ και στην προέκταση της $E\Delta$ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο K τέτοιο ώστε $\Delta K = A\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $K\Delta = \Lambda E$

Μονάδες 6

β) Τα τρίγωνα AKB και $\Lambda A\Gamma$ είναι ορθογώνια.

Μονάδες 9

γ) Τα τρίγωνα AKB και $\Lambda A\Gamma$ είναι ίσα.

Μονάδες 10

Λύση

α) Είναι

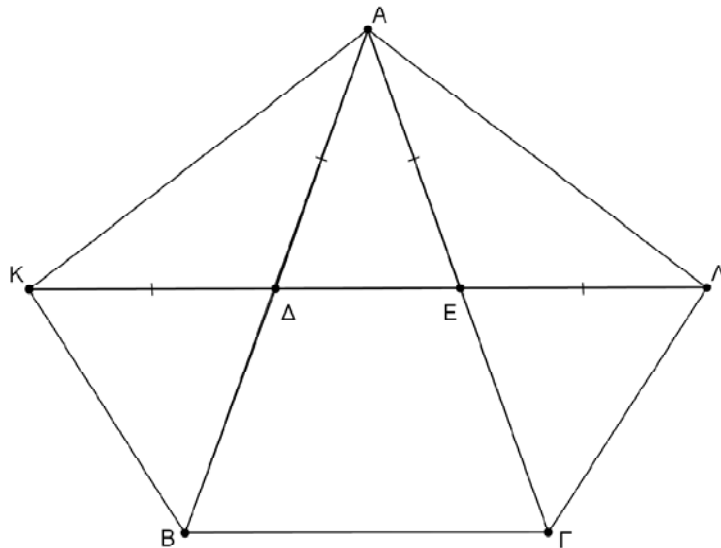
$$K\Delta = A\Delta = \frac{AB}{2} \quad (1) \quad \text{και} \quad \Lambda E = AE = \frac{A\Gamma}{2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \stackrel{AB=A\Gamma}{\Rightarrow} \Lambda E = K\Delta \quad (3)$$

β) Στο τρίγωνο $\Lambda A\Gamma$ η ΛE είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην $A\Gamma$ και είναι

$\Lambda E = \frac{A\Gamma}{2}$, δηλαδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Για τον ίδιο λόγο και το τρίγωνο AKB είναι ορθογώνιο.



γ) Τα τρίγωνα ΑΔΑ και ΑΕΚ είναι ίσα από Π – Γ – Π αφού έχουν:

- $ΑΔ = ΑΕ$ ως μισά των ίσων τμημάτων $ΑΒ, ΑΓ$
- $ΑΔ = ΚΕ$ ως αθροίσματα των ίσων τμημάτων $ΑΕ, ΚΔ$ με το $ΔΕ$
- $\widehat{ΑΕΔ} = \widehat{ΑΔΕ}$ ως γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΔΕ$

Άρα και $ΑΛ = ΑΚ$ (3)

Οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΚΒ$ και $ΑΛΓ$ είναι ίσα αφού έχουν $ΑΒ = ΑΓ$ και $ΑΛ = ΑΚ$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4555)

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και από το μέσο $Μ$ του $ΒΓ$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $ΜΔ$ ίσο και παράλληλο με το $ΒΑ$ και ευθύγραμμο τμήμα $ΜΕ$ ίσο και παράλληλο με το $ΓΑ$ (τα σημεία $Δ$ και $Ε$ είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη $ΒΓ$ και το σημείο $Α$).

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία $Δ, Α, Ε$ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

β) Η περίμετρος του τριγώνου $ΜΔΕ$ είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου $ΑΒΓ$.

(Μονάδες 9)

γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε το ερώτημα αν τα σημεία $Δ, Α, Ε$ είναι συνευθειακά στους μαθητές του, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής:

$\widehat{Ζ}_1 = \widehat{Α}_1$ (εντός εναλλάξ των $ΑΒ//ΜΔ$ που τέμνονται από $ΑΖ$)

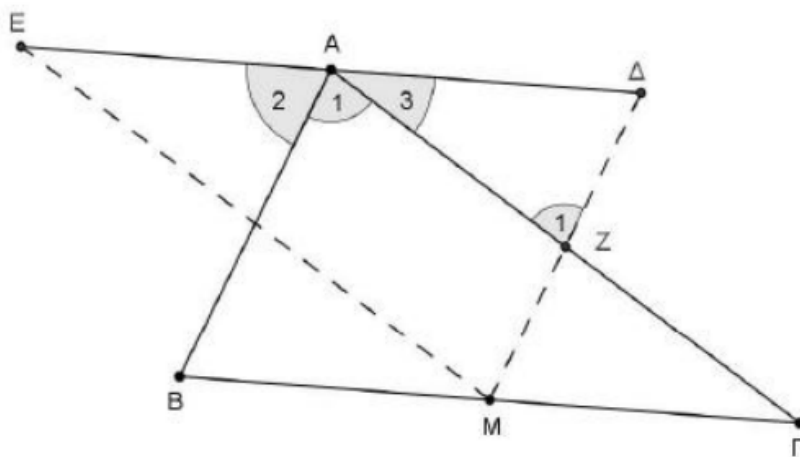
$Α\widehat{Δ}Ζ = \widehat{Α}_2$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των $ΑΒ//ΜΔ$ που τέμνονται από $ΔΕ$)

Όμως $\widehat{Ζ}_1 + \widehat{Α}_3 + Α\widehat{Δ}Ζ = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου $ΑΔΖ$). Άρα σύμφωνα

με τα προηγούμενα έχουμε: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$. Οπότε Δ, Ε, Α συνευθειακά.

Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή;

(Μονάδες 6)



Λύση

α) Αρχικά τα τετράπλευρα ΑΔΜΒ, ΑΕΜΓ είναι παραλληλόγραμμα αφού έχουν δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες (από τα δεδομένα της άσκησης).

Οπότε, $AE \parallel M\Gamma$ και $AD \parallel MB$, δηλαδή $AE \parallel B\Gamma$ και $AD \parallel B\Gamma$, άρα από το 5^ο Ευκλείδειο αίτημα, από σημείο Α εκτός ευθείας ΒΓ άγεται μοναδική παράλληλη προς αυτή, οπότε η ΕΑΔ είναι ευθεία, δηλαδή τα σημεία Ε, Α, Δ είναι συνευθειακά.

β) Θα δείξουμε ότι: $\Pi_{\triangle MAE} = \Pi_{\triangle AB\Gamma}$

Έχουμε,

$$\Pi_{\triangle MAE} = MA + AE + EM$$

$$\stackrel{MA=AB}{=} AB + BM + M\Gamma + A\Gamma \quad (\text{αφού } \Delta E = \Delta A + AE = BM + M\Gamma)$$

$$= AB + B\Gamma + A\Gamma = \Pi_{\triangle AB\Gamma}$$

γ) Ο συλλογισμός του μαθητή είναι εσφαλμένος στο εξής σημείο:

« $\hat{A}\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των $AB \parallel M\Delta$ που τέμνονται από ΔΕ)»

δηλαδή δέχεται ότι η ΔΕ είναι ευθεία! Οπότε έχουμε κυκλικό συλλογισμό.

ΑΣΚΗΣΗ (4_ 4559)

Δίνονται δυο παράλληλες ευθείες (ε) και (η) , και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία A και B αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ .

Αν M είναι το μέσον του AB , να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $B\Delta A$ είναι ορθή

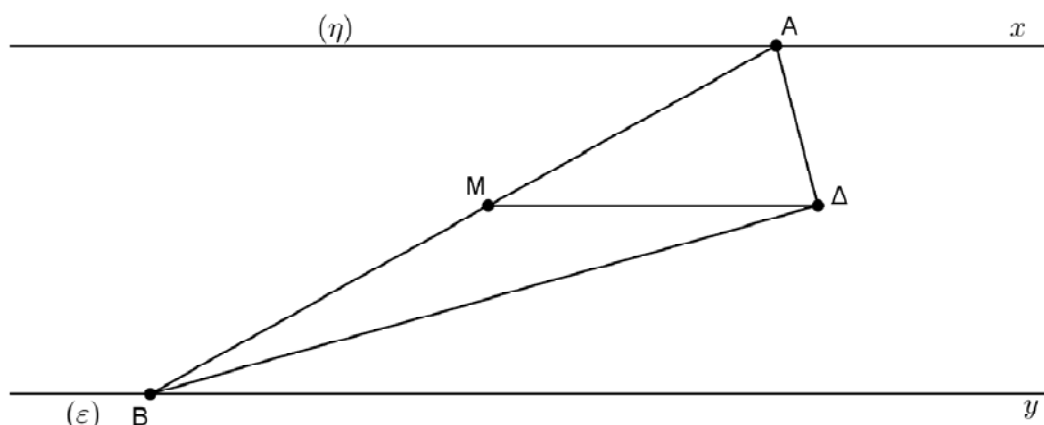
Μονάδες 9

β) $\widehat{BM\Delta} = 2\widehat{M\Delta A}$

Μονάδες 8

γ) $M\Delta \parallel \varepsilon$

Μονάδες 8

**Λύση**

α) Είναι

$$\widehat{B\Delta A} + \widehat{A\Delta B} = \frac{\widehat{BAx}}{2} + \frac{\widehat{ABy}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

αφού οι γωνίες $\widehat{BAx}, \widehat{ABy}$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά.

Έτσι το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ορθογώνιο αφού έχει τις δύο γωνίες του συμπληρωματικές, οπότε $\widehat{B\Delta A} = 90^\circ$

β) Η ΔM είναι διάμεσος στην υποτείνουσα του ορθογώνιου τριγώνου $AM\Delta$ δηλαδή

$$\Delta M = \frac{AB}{2} = AM = MB$$

και το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές οπότε $\widehat{M\Delta A} = \widehat{MA\Delta}$ (1)

Η $\widehat{BM\Delta}$ είναι εξωτερική του τριγώνου $AM\Delta$ και είναι:

$$\widehat{BM\Delta} = \widehat{M\Delta A} + \widehat{MA\Delta} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \widehat{BM\Delta} = 2\widehat{M\Delta A}$$

γ) Από το ισοσκελές τρίγωνο ΔMB ($\Delta M = MB$) είναι $\widehat{MB\Delta} = \widehat{M\Delta B}$ (2) και

$$\widehat{MB\Delta} = \widehat{\Delta Bx} \quad (3)$$

$$\text{Από (2), (3)} \Rightarrow \widehat{MB\Delta} = \widehat{\Delta Bx} \quad (3)$$

Άρα $ΜΔ // ε$ γιατί σχηματίζονται εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

ΑΣΚΗΣΗ (4_ 4562)

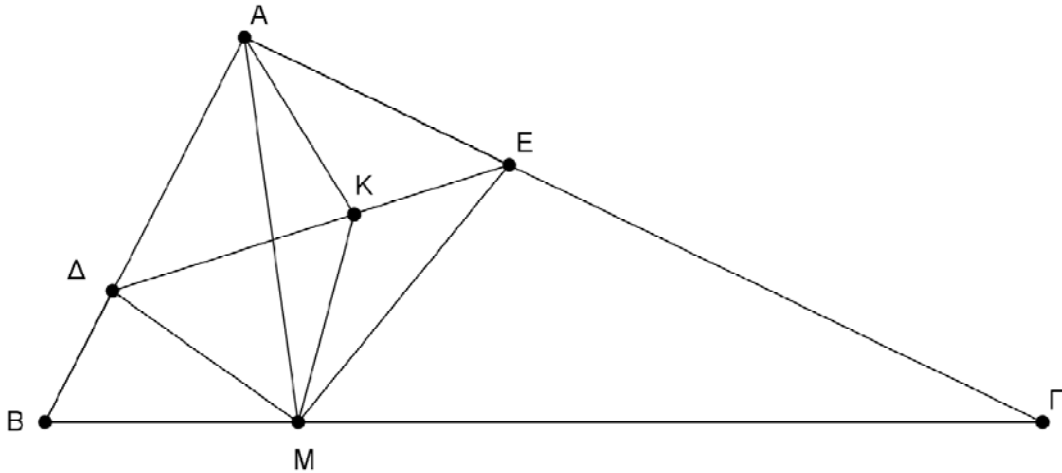
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με τη γωνία $Α$ ορθή και $Μ$ τυχαίο σημείο της πλευράς $ΒΓ$. Φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών $ΒΜΑ$ και $ΑΜΓ$ οι οποίες τέμνουν τις $ΑΒ$ και $ΑΓ$ στα σημεία $Δ$ και $Ε$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι, η γωνία $ΔΜΕ$ είναι ορθή.

Μονάδες 12

β) Αν $Κ$ το μέσο του $ΔΕ$, να αποδείξετε ότι $ΜΚ = ΚΑ$.

Μονάδες 13

**Λύση**

α) Έστω

$$\widehat{ΒΜΔ} = \widehat{ΔΜΑ} = \varphi \text{ και } \widehat{ΑΜΕ} = \widehat{ΕΜΓ} = \omega$$

Τότε

$$\omega + \omega + \varphi + \varphi = 180^\circ \Leftrightarrow \omega + \varphi = 90^\circ \text{ άρα } \widehat{ΔΜΕ} = 90^\circ$$

β) Το $ΜΚ$ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $ΔΜΕ$ που αντιστοιχεί στην

υποτείνουσα άρα $ΜΚ = \frac{ΔΕ}{2}$

Όμοια το $ΑΚ$ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $ΔΑΕ$ που αντιστοιχεί στην

υποτείνουσα άρα $ΑΚ = \frac{ΔΕ}{2}$

Οπότε $ΜΚ = ΑΚ$

ΑΣΚΗΣΗ (4_ 4565)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με τη γωνία $Α$ ορθή και $ΑΜ$ η διάμεσός του.

Από το $Μ$ φέρουμε $ΜΚ$ κάθετη στην $ΑΒ$ και $ΜΛ$ κάθετη στην $ΑΓ$.

Αν $Ν, Ρ$ είναι τα μέσα των $ΒΜ$ και $ΓΜ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{ΝΚΜ} = \widehat{ΝΜΚ}$

Μονάδες 7

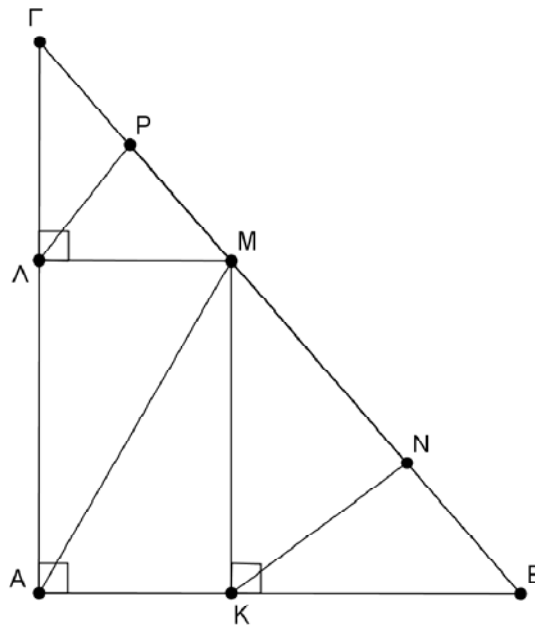
β) Η $ΜΚ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΝΜΑ$

Μονάδες 9

γ) $AM = KN + AP$

Μονάδες 9

Λύση



α) Είναι

$$KN = \frac{MB}{2} = MN$$

ως διάμεσος στην υποτείνουσα MB του ορθογωνίου τριγώνου MKB .

Έτσι το τρίγωνο KNM είναι ισοσκελές δηλαδή $\widehat{NKM} = \widehat{NMK}$

β) Είναι

$$AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB$$

ως διάμεσος στην υποτείνουσα $B\Gamma$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$.

Έτσι στο ισοσκελές τρίγωνο AMB το MK είναι ύψος στη βάση του AB άρα είναι και διχοτόμος της γωνίας NMA .

γ) Είναι

$$AP = \frac{\Gamma M}{2}$$

ως διάμεσος στην υποτείνουσα $M\Gamma$ του ορθογωνίου τριγώνου ΓAM

$$KN + AP = \frac{MB}{2} + \frac{M\Gamma}{2} = \frac{B\Gamma}{2} = AM$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4567)

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο $MB\Gamma$. Αν η προέκταση της AM τέμνει τη $B\Delta$ στο σημείο E , να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{\Delta \hat{A} E} = 15^\circ$

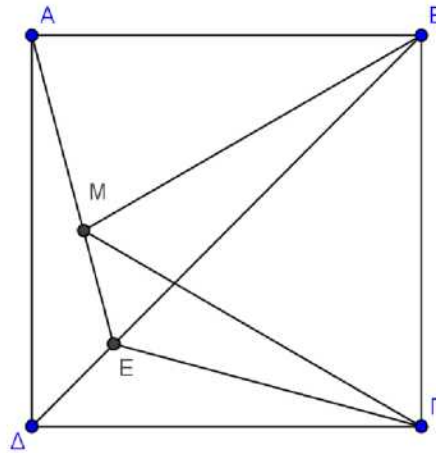
(Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα $\Delta A E$ και $\Delta E \Gamma$ είναι ίσα.

(Μονάδες 8)

γ) Η ΓE είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta \Gamma M$

(Μονάδες 9)

**Λύση**α) Επειδή το τρίγωνο $M B \Gamma$ είναι ισόπλευρο θα είναι $A B = B M$ και

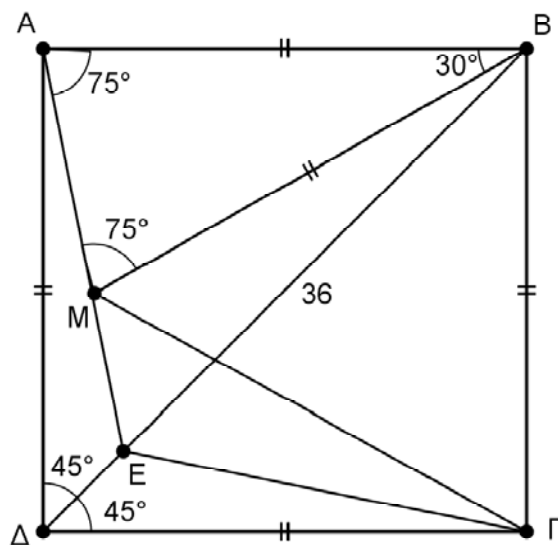
$$\widehat{A \hat{B} M} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Άρα:

$$\widehat{B \hat{A} M} = \widehat{A \hat{M} B} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

Οπότε:

$$\widehat{\Delta \hat{A} E} = 90^\circ - 75^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Delta \hat{A} E} = 15^\circ$$

β) Τα τρίγωνα $\Delta A E$ και $\Delta E \Gamma$ είναι ίσα, επειδή έχουν:

- ΔE κοινή πλευρά,
- $A \Delta = \Gamma \Delta$ (πλευρές τετραγώνου) και
- $\widehat{A \hat{\Delta} E} = \widehat{E \hat{\Delta} \Gamma} = 45^\circ$ (η διαγώνιος τετραγώνου διχοτομεί τις γωνίες του).

γ) Από την ισότητα των τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος προκύπτει ότι $\widehat{E\Gamma\Delta} = \widehat{\Delta\Lambda E} = 15^\circ$ κι επειδή $\widehat{M\Gamma\Delta} = 30^\circ$, θα είναι και $\widehat{M\Gamma E} = 15^\circ$, δηλαδή η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\Gamma M$

ΑΣΚΗΣΗ (4_ 4569)

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB = \Lambda\Delta + B\Gamma$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$ τέμνει την AB στο σημείο M , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\Lambda\Delta M$ είναι ισοσκελές.

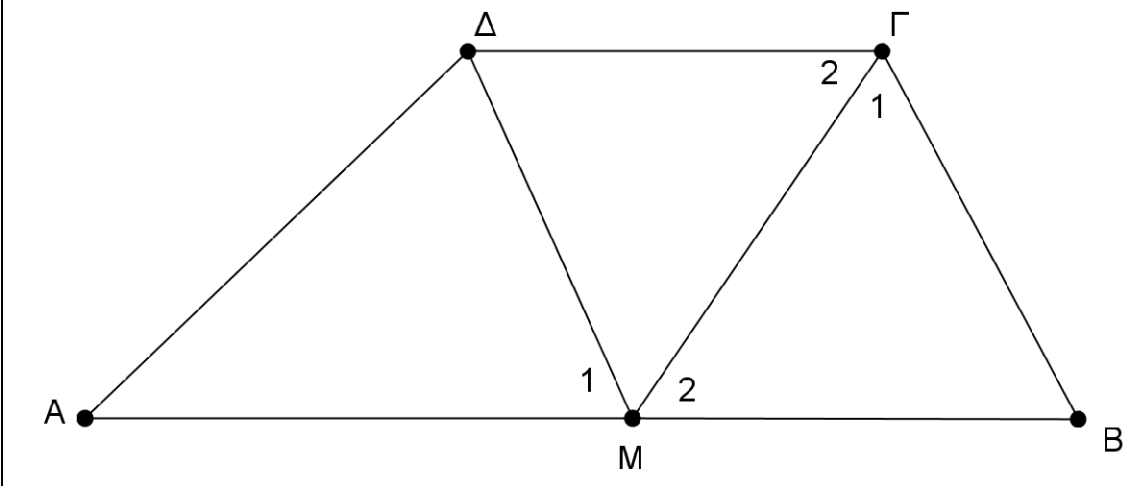
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $MB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

γ) Η GM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τραπέζιου.

(Μονάδες 8)

**Λύση**

α) Είναι $\hat{M}_1 = \hat{\Delta}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\Delta\Gamma, AB$ με τέμνουσα την ΔM .

Επίσης $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ αφού ΔM διχοτόμος. Επομένως είναι και $\hat{M}_1 = \hat{\Delta}_2$. Συνεπώς το τρίγωνο ΔAM είναι ισοσκελές και άρα $\Lambda\Delta = AM$ (1)

β) Είναι

$$AB = \Lambda\Delta + B\Gamma \stackrel{(1)}{=} AM + B\Gamma \Leftrightarrow B\Gamma = AB - AM = MB$$

άρα το τρίγωνο ΓMB ισοσκελές και άρα $\hat{M}_2 = \hat{\Gamma}_1$ (2)

γ) Είναι $\hat{M}_2 = \hat{\Gamma}_2$ (3) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\Delta\Gamma, AB$ με τέμνουσα την GM

Από (2),(3) είναι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ άρα GM διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$

ΑΣΚΗΣΗ (4_ 4571)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και σημείο Δ στην προέκταση της $B\Gamma$. Από το Δ φέρουμε κάθετη στην AB και ΔE κάθετη στην προέκταση της $A\Gamma$.

Από το σημείο Γ φέρουμε ΓΗ κάθετη στην ΑΒ και ΓΖ κάθετη στην ΚΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΖΓΔ είναι ίση με τη γωνία Β.

(Μονάδες 4)

β) Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΓΕ

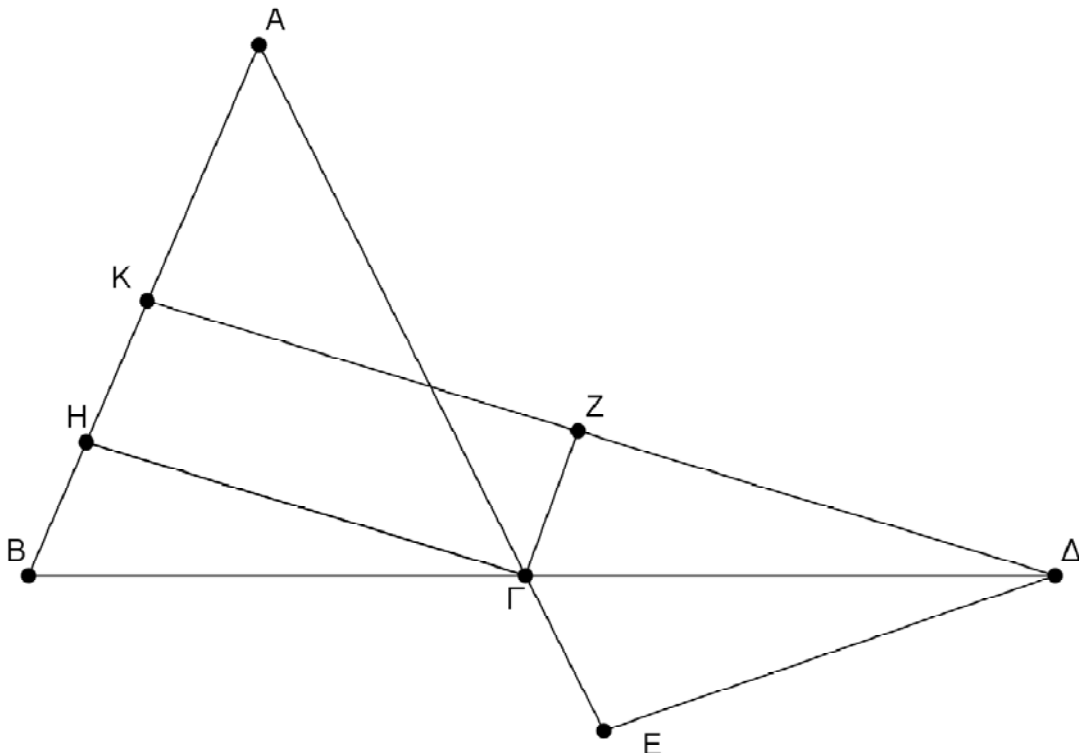
(Μονάδες 4)

γ) Το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

δ) $\Delta K - \Delta E = H\Gamma$

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Έχουμε

$$\Delta K \perp AB, \Gamma H \perp AB, \Gamma Z \perp K\Delta$$

άρα το ΚΗΓΖ είναι ορθογώνιο αφού έχει 3 ορθές γωνίες.

Άρα

$$KH // \Gamma Z \Rightarrow AB // \Gamma Z$$

δηλαδή

$$\widehat{B} = \widehat{Z\Gamma\Delta}$$

ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των $AB // \Gamma Z$ που τέμνονται από την ΒΓ

β) $\widehat{\Delta\Gamma E} = \widehat{A\Gamma B}$ ως κατακορυφήν

$\widehat{B} = \widehat{A\Gamma B}$ αφού το $\Delta B\Gamma$ τρίγωνο ισοσκελές

και $\widehat{B} = \widehat{Z\Gamma\Delta}$ από ερώτημα (α)

Άρα

$$\widehat{\Delta Γ Ε} = \widehat{Ζ Γ Δ} \Rightarrow 90^0 - \widehat{\Delta Γ Ε} = 90^0 - \widehat{Ζ Γ Δ}$$

άρα $\widehat{\Gamma Δ Ε} = \widehat{Ζ Δ Γ}$ και έχουμε ότι η $\Gamma Δ$ είναι διχοτόμος της $\widehat{Ζ Γ Ε}$

γ) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $ΖΓΔ, ΓΔΕ$ αυτά έχουν:

- $\Gamma Δ$ κοινή πλευρά
- $\widehat{\Gamma Δ Ε} = \widehat{Ζ Δ Γ}$ από ερώτημα (β)

Άρα τα τρίγωνα $ΖΓΔ, ΓΔΕ$ είναι ίσα άρα έχουν $\Delta Ζ = ΔΕ$ άρα το τρίγωνο $\Delta ΖΕ$ είναι ισοσκελές.

Εναλλακτικά για το (γ)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΖΓΔ, ΓΔΕ$ αυτά έχουν:

- $\widehat{\Delta Γ Ε} = \widehat{Ζ Γ Δ}$ από ερώτημα (β)
- $\Gamma Δ$ κοινή πλευρά
- $\widehat{\Gamma Δ Ε} = \widehat{Ζ Δ Γ}$ από ερώτημα (β)

Άρα τα τρίγωνα $ΖΓΔ, ΓΔΕ$ είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες γωνίες μία προς μία ίσες ($\Gamma-Π-Γ$) άρα έχουν $\Delta Ζ = ΔΕ$ άρα το τρίγωνο $\Delta ΖΕ$ είναι ισοσκελές.

δ) Από ερώτημα (α) $ΚΗΓΖ$ ορθογώνιο. Άρα $KZ = ΗΓ$ (1) (απέναντι πλευρές ορθογωνίου). Από ερώτημα (γ) $\Delta Ζ = ΔΕ$ (2)

Έχουμε,

$$\Delta K = \Delta Z + ZK \Rightarrow (1), (2) \Delta K = \Delta E + ΗΓ \Rightarrow \Delta K - \Delta E = ΗΓ$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4579)

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΔ$ και $ΑΕ$ αντίστοιχα η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $Α$ ($Δ, Ε$ σημεία της ευθείας $ΒΓ$).

Φέρουμε BZ κάθετη στην $ΑΔ$ και BH κάθετη στην $ΑΕ$ και θεωρούμε M το μέσο του $ΔΓ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AZBH$ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 5

β) Η γωνία HZA είναι ίση με τη γωνία $ΖΑΓ$.

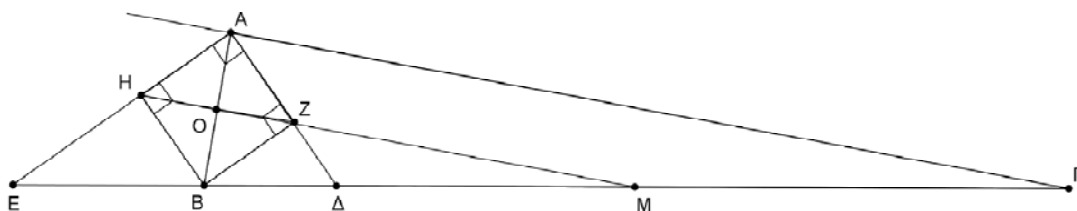
Μονάδες 6

γ) Η ευθεία HZ διέρχεται από το M .

Μονάδες 6

δ) $MH = \frac{AB + ΑΓ}{2}$

Μονάδες 8



Λύση

α) Είναι $AD \perp AE$ ως διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών. Έτσι το τετράπλευρο $AZBH$ είναι ορθογώνιο αφού έχει τρεις ορθές γωνίες.

β) Αν O είναι το κέντρο του τότε $OA = OZ$ ως μισά των ίσων διαγώνιων AB, HZ οπότε το τρίγωνο AOZ είναι ισοσκελές δηλαδή

$$\widehat{HZA} = \widehat{BAZ} = \frac{\widehat{A}}{2} = \widehat{ZAG}.$$

γ) Το O είναι μέσο της AB και το M της $B\Gamma$, έτσι από το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι

$$OM // = \frac{A\Gamma}{2}$$

Από το (β) ερώτημα είναι $\widehat{HZA} = \widehat{ZAG}$ δηλαδή η HOZ είναι παράλληλη στην $A\Gamma$ αφού σχηματίζονται εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Άρα η HZ διέρχεται από το M αφού από το O μία μόνο παράλληλη διέρχεται προς την $A\Gamma$.

δ) Είναι:

$$MH = MO + HO \Leftrightarrow MH = \frac{A\Gamma}{2} + \frac{HZ}{2} \stackrel{HZ=AB}{\Leftrightarrow} MH = \frac{A\Gamma}{2} + \frac{AB}{2} \Leftrightarrow MH = \frac{AB + A\Gamma}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4583)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος του $A\Delta$ και ευθεία (ε) παράλληλη από το B προς την $A\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην $A\Delta$ η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Z , την ευθεία (ε) στο σημείο Λ και την προέκταση της BA στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AEZ και $B\Lambda E$ είναι ισοσκελή.

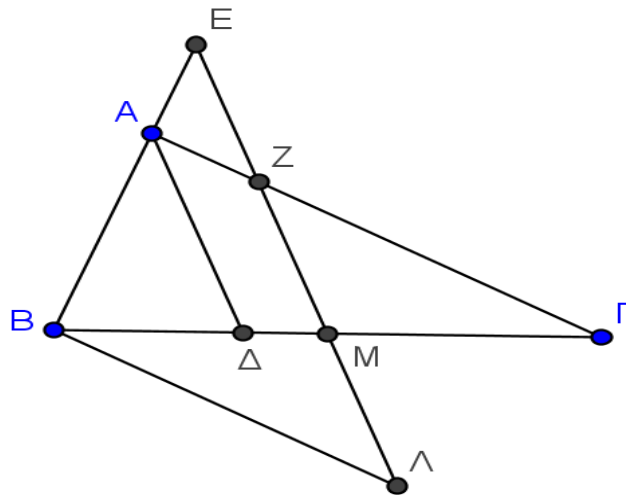
(Μονάδες 8)

β) $B\Lambda = \Gamma Z$.

(Μονάδες 9)

γ) $AE = A\Gamma - B\Lambda$.

(Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

α) Για το τρίγωνο AEZ συγκρίνουμε τις γωνίες AEZ και AZE :

$AEZ = B\Lambda\Delta$ (εντός, εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $A\Delta, E\Lambda$ που τέμνονται από την AE) ,

$B\Lambda\Delta = \Delta AZ$ ($A\Delta$ διχοτόμος της $\hat{A}$)

$\Delta AZ = AZE$ (εντός, εναλλάξ των παραλλήλων $A\Delta, E\Lambda$ που τέμνονται από την AZ)

άρα θα είναι $AEZ = AZE$ άρα το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.

Για το τρίγωνο τώρα $B\Lambda E$ συγκρίνουμε τις γωνίες $BE\Lambda$ και $B\Lambda E$:

$BE\Lambda = B\Lambda\Delta$ (εντός, εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $A\Delta, E\Lambda$ που τέμνονται από την AE)

$B\Lambda\Delta = \Delta AZ$ ($A\Delta$ διχοτόμος της $\hat{A}$)

$\Delta AZ = AZE$ (εντός, εναλλάξ των παραλλήλων $A\Delta, E\Lambda$ που τέμνονται από την AZ)

$AZE = \Lambda Z\Gamma$ (ως κατακορυφήν)

$\Lambda Z\Gamma = B\Lambda E$ (εντός, εναλλάξ των παραλλήλων $A\Gamma, B\Lambda$ που τέμνονται από την ΛZ)

επομένως θα είναι $BE\Lambda = B\Lambda E$ άρα το τρίγωνο $B\Lambda E$ είναι ισοσκελές.

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $B\Lambda M$ και ΓMZ , οπότε έχουμε:

$BM=MG$ (M μέσο της BG από υπόθεση)

$\hat{B}M\Lambda = \hat{G}M\hat{Z}$ (ως κατακορυφήν)

$\hat{M}B\Lambda = \hat{M}G\hat{Z}$ (εντός, εναλλάξ των παραλλήλων $ZG, B\Lambda$ που τέμνονται από την ΛZ)

άρα $\hat{B}M\Lambda = \hat{M}G\hat{Z}$ ($\Gamma - \Pi - \Gamma$), επομένως είναι $B\Lambda=GZ$

γ) Έχουμε $AE=AZ$ (από (α) $\triangle AEZ$ ισοσκελές) $AZ=AG-ZG$ $AE = AG - GZ$ και επειδή $B\Lambda=GZ$ από (β)) θα είναι τελικά $AE=AG-B\Lambda$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4593)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι διάμεσοι του AA , BE και ΓZ . Προεκτείνουμε το τμήμα ZE (προς το E) κατά τμήμα $EH = ZE$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $EH\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.

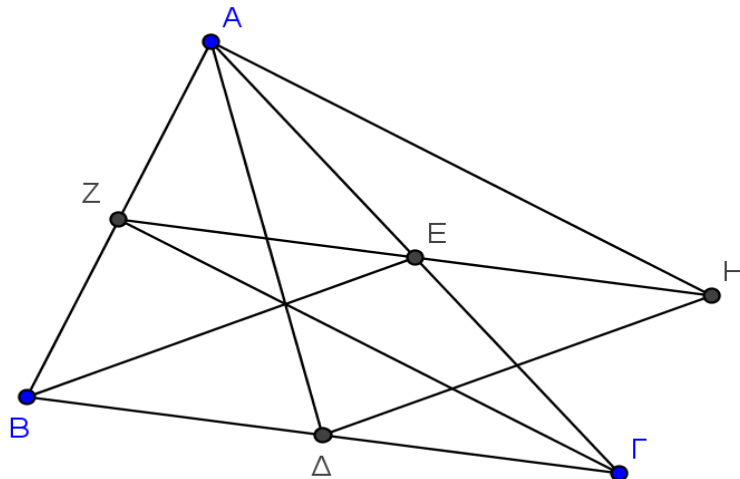
(Μονάδες 8)

β) Η περίμετρος του τριγώνου $\Lambda\Delta H$ είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)

γ) Οι ευθείες BE και ΔH τριχοτομούν το τμήμα $Z\Gamma$.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, το Z μέσο της AB και E μέσον της AG , άρα $ZE \parallel \frac{B\Gamma}{2}$,

επομένως $EH \parallel B\Delta$. Εφόσον τώρα Δ μέσον της $B\Gamma$, τότε $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$ και επειδή E

μέσον της ZH , τότε $EH=ZE$. Οπότε, $EH=B\Delta$. Επομένως το τετράπλευρο $EH\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει δύο απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες.

β) Ισχύει $\Delta H=BE$ (αφού $EH\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο)

Ακόμη $AH=ZΓ$ (αφού $AHΓZ$ παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοί του $AΓ, ZH$ διχοτομούνται επειδή έχουν κοινό μέσο το E)

Επομένως, $AΔ+ΔH+HA=AΔ+BE+ZΓ$

γ) Αν G το βαρύκεντρο του τριγώνου $ABΓ$ και $Θ$ το σημείο τομής της διαμέσου $ΓZ$ και της $ΔH$ τότε επειδή το $Δ$ μέσο της $BΓ$ και $ΔΘ//BG$ λόγω των απέναντι πλευρών του παραλληλογράμμου $EHΔB$ το $Θ$ είναι μέσο της $ΓΓ$ και επειδή $GG=\frac{2}{3} ZΓ$ θα είναι $GΘ=ΘΓ=\frac{1}{3} ΓZ=GZ$, άρα οι ευθείες BE και $ΔH$ τριχοτομούν το τμήμα $ZΓ$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4599)

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $ABΓΔ$ ($A = Δ = 90^\circ$) με $BΓ = ΓΔ = 2AB$ και $K, Λ$ τα μέσα των $BΓ$ και $ΓΔ$. Η παράλληλη από το K προς την AB τέμνει την $ΑΔ$ στο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) $BΓ = 2 ΔZ$.

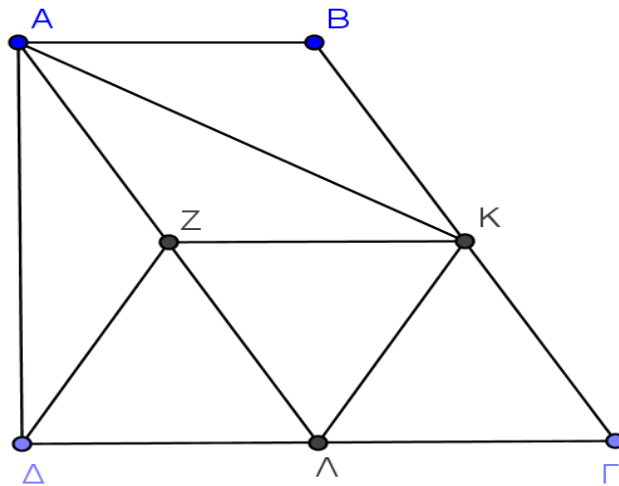
(Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο $ZKΓΛ$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 9)

γ) $AKΛ = 90^\circ$

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Οι παράλληλες ευθείες AB, ZK και $ΔΓ$ ορίζουν στην $BΓ$ ίσα τμήματα $BK=KΓ$ (K μέσο της $BΓ$), επομένως θα ορίζουν και ίσα τμήματα και στην $ΑΔ$, άρα $AZ=ZΔ$ δηλαδή Z μέσο της $ΑΔ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AΔΔ$ η $ΔZ$ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα του άρα θα ισχύει

$$\Delta Z = \frac{A\Delta}{2} \quad \text{άρα} \quad 2\Delta Z = A\Delta,$$

οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $BΓ=AΔ$.

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΛ επειδή $\Lambda\Gamma = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ (Λ μέσο της ΔΓ) θα έχουμε ότι $2\Lambda\Gamma = \Gamma\Delta$ και επειδή από υπόθεση έχουμε $\Gamma\Delta = 2AB$ θα ισχύει ότι $AB = \Lambda\Gamma$ και αφού $AB \parallel \Lambda\Gamma$ (βάσεις τραπέζιου) το ΑΒΓΛ παραλληλόγραμμο (δύο απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες) άρα $B\Gamma = \Lambda\Lambda$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.

β) Το τετράπλευρο ΖΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει απέναντι πλευρές παράλληλες γιατί $ZK \parallel \Lambda\Gamma$ (από υπόθεση) και $K\Gamma \parallel Z\Lambda$ (αφού ΑΒΓΛ παραλληλόγραμμο) και επειδή $K\Gamma = \Gamma\Lambda$ (ως μισά των ίσων τμημάτων ΒΓ, ΓΔ) έχει 2 διαδοχικές πλευρές ίσες άρα ΖΚΓΛ είναι ρόμβος.

γ) Επειδή $KZ = Z\Lambda$ (το ΖΚΓΛ ρόμβος) και $Z\Lambda = \frac{A\Lambda}{2}$ (Ζ μέσο της ΑΛ) θα ισχύει ότι $KZ = \frac{A\Lambda}{2}$ δηλαδή η διάμεσος είναι το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί, επομένως ΑΚΛ είναι ορθογώνιο τρίγωνο και άρα $\angle A\Lambda\Gamma = 90^\circ$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4603)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$), και τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΒΓ. Από το σημείο Μ φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Θ αντίστοιχα. Αν ΑΔ και ΑΗ τα ύψη των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΘΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\angle A\Lambda\Gamma = 90^\circ$

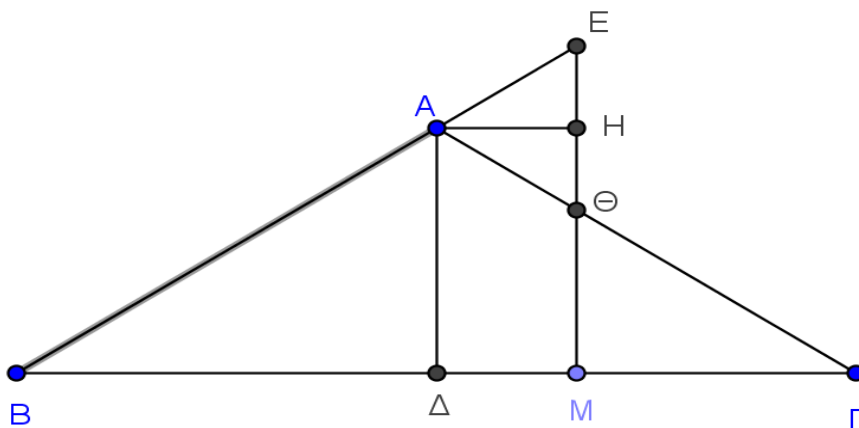
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) $M\Theta + ME = 2A\Lambda$.

(Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Το τετράπλευρο ΑΗΜΔ έχει τρεις γωνίες ορθές $\angle AHM = \angle ADM = \angle HMD = 90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, άρα $\angle A\Lambda\Gamma = 90^\circ$.

β) Στο τρίγωνο ΑΘΕ η ΑΗ είναι ύψος του τριγώνου:

$\Theta A H = A \Gamma B$ (1) , (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΗ και ΒΓ (κάθετες στην ίδια ευθεία ΕΜ) που τέμνονται από την ΑΓ).

$E A H = A B \Gamma$ (2) , (ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΗ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ).

$A B \Gamma = A \Gamma B$ (3) γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές οπότε από (1), (2), (3) $\Theta A H = E A H$

οπότε το ΑΗ ύψος είναι και διχοτόμος του τριγώνου ΑΕΘ, άρα ΑΕΘ ισοσκελές.

γ) Είναι $E H = H \Theta$ γιατί στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΕΘ, ΑΗ ύψος και διχοτόμος άρα και διάμεσος. Τότε έχουμε ότι:

$$M \Theta + M E = M \Theta + (M \Theta + \Theta E) = 2 M \Theta + 2 \Theta H = 2 (M \Theta + \Theta H) = 2 M H = 2 A \Delta$$

(γιατί ΑΗΜΔ ορθογώνιο και οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες)

ΑΣΚΗΣΗ (4_4606)

Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και δυο μη αντιδιαμετρικά σημεία του Α και Β. Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Α και Β οι οποίες τέμνονται στη σημείο Γ. Φέρουμε επίσης και τα ύψη ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ τα οποία τέμνονται στο σημείο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΗΑ είναι ισοσκελές.

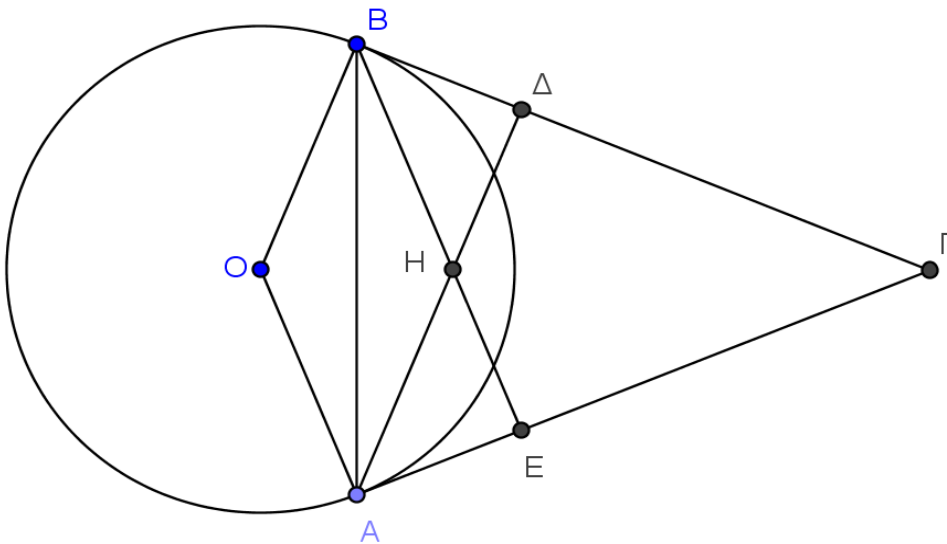
(Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΟΒΗΑ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 9)

γ) Τα σημεία Ο, Η, Γ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Gamma A = \Gamma B$ (ως εφαπτόμενα τμήματα στον ίδιο κύκλο) άρα $\Gamma A B$ τρίγωνο ισοσκελές άρα $\Gamma A B = \Gamma B A$ (1) (ως προσκείμενες παρά την βάση ισοσκελούς)

οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta B \Gamma$ και $B E \Delta$ είναι ίσα αφού έχουν την υποτείνουσα AB κοινή και τις οξείες γωνίες $\Delta B \Gamma$ και $B E \Delta$ αντίστοιχα ίσες .

Έτσι θα έχουν και τις άλλες γωνίες αντίστοιχα ίσες οπότε $\Delta B \Gamma = B E \Delta$ δηλαδή θα ισχύει ότι $B \Delta = B E$ άρα το τρίγωνο $B \Delta E$ ισοσκελές αφού έχει δύο γωνίες ίσες.

β) Είναι $OB \parallel \Delta \Gamma$ (αφού $OB \perp B \Gamma$ ακτίνα και εφαπτομένη του κύκλου και $\Delta \Gamma \perp B \Gamma$ από υπόθεση). Ομοίως $BE \parallel OA$ άρα το $OB \Delta E$ παραλληλόγραμμο.

Επίσης, $OB=OA$ (ως ακτίνες του ίδιου κύκλου), δηλαδή το $OB \Delta E$ έχει 2 διαδοχικές πλευρές ίσες, άρα είναι ρόμβος.

γ) Επειδή ισχύουν $\Delta A = \Delta B$ (α) $HA=HB$ (β) και $OA=OB$ (ακτίνες του ίδιου κύκλου) τα σημεία Γ, H, O ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος AB άρα είναι όλα σημεία της μεσοκάθετου του AB άρα ανήκουν στην ίδια ευθεία.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4611)

Δίνεται τρίγωνο $AB \Gamma$ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B \Delta = AB$ ενώ στην προέκταση της $B \Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Gamma E = \Gamma A$.

Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών B και Γ τέμνουν τις $A \Delta$ και $A E$ στα σημεία K και Λ αντίστοιχα, και η $K \Lambda$ τέμνει τις AB και $A \Gamma$ στα σημεία M και N αντίστοιχα,

να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία K και Λ είναι μέσα των $A \Delta$ και $A E$ αντίστοιχα.

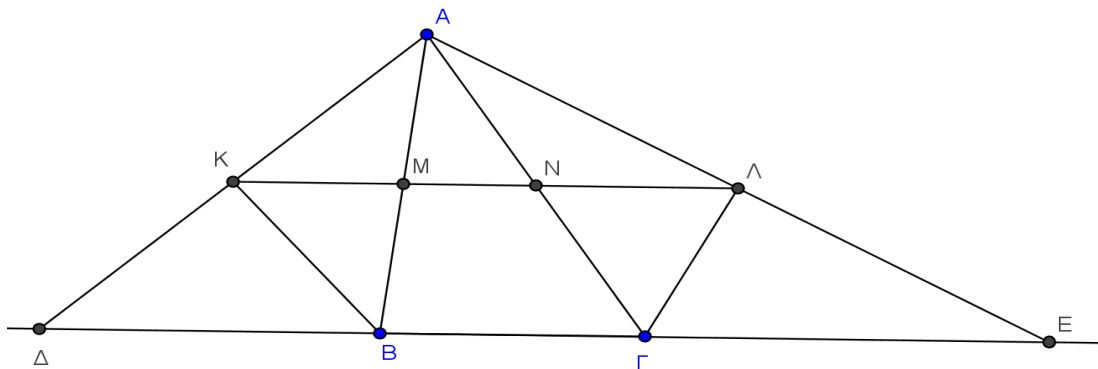
(Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα $K M A$ και $A N \Lambda$ είναι ισοσκελή.

(Μονάδες 9)

γ) $K \Lambda = \frac{AB + A \Gamma + B \Gamma}{2}$

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Έχουμε, $B \Delta = AB$ (από υπόθεση), άρα το τρίγωνο $AB \Delta$ είναι ισοσκελές. Επομένως, η διχοτόμος του $B \Delta$ είναι ύψος και διάμεσος. Άρα K μέσο της $A \Delta$.

Ομοίως, έχουμε, $\Gamma E = \Gamma A$ (από υπόθεση), άρα το τρίγωνο $A \Gamma E$ είναι ισοσκελές.

Συνεπώς η διχοτόμος του $\Gamma \Lambda$ είναι ύψος και διάμεσος. Άρα Λ μέσο της $A E$.

β) Στο τρίγωνο ΑΔΕ το Κ μέσο της ΑΔ και Λ μέσο της ΑΕ άρα ΚΛ//ΔΕ (αφού έχουμε τμήμα που ενώνει μέσα πλευρών τριγώνου)

$AKM = ADB$ (1) (ως εντός, εκτός και επί τα αυτά των ΚΜ//ΒΔ τεμνόμενες από την ΑΔ)

$ADB = DAB$ (2) (αφού το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές)
Από (1), (2),

$AKM = DAB$ δηλαδή $AKM = KAM$, άρα ΚΜΑ ισοσκελές.

Ομοίως, $ALN = AEG$ (3) (ως εντός, εκτός και επί τα αυτά των ΝΛ//ΓΕ τεμνόμενες από την ΑΕ) και $AEG = GAE$ (4) (αφού το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές)

Από (3), (4), έχουμε ότι $ALN = GAE$ δηλαδή $ALN = NAE$, άρα το τρίγωνο ΑΝΑ ισοσκελές.

γ) Έχουμε,

$$AB=BD \text{ και } GE=AG,$$

οπότε

$$\frac{AB + AG + BG}{2} = \frac{BD + GE + BG}{2} = \frac{DE}{2}.$$

Όμως, ισχύει επίσης $KL = \frac{DE}{2}$ (ΚΛ αφού ενώνει μέσα πλευρών τριγώνου θα ισούται και με το μισό της τρίτης πλευράς), άρα θα ισχύει ότι

$$KL = \frac{AB + AG + BG}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4614)

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΔΓ. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΖ της γωνίας ΕΑΒ και τη ΔΗ κάθετη από το Δ προς την ΑΖ, η οποία τέμνει την ΑΕ στο Μ και την ΑΒ στο Ν.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ είναι ίσα.

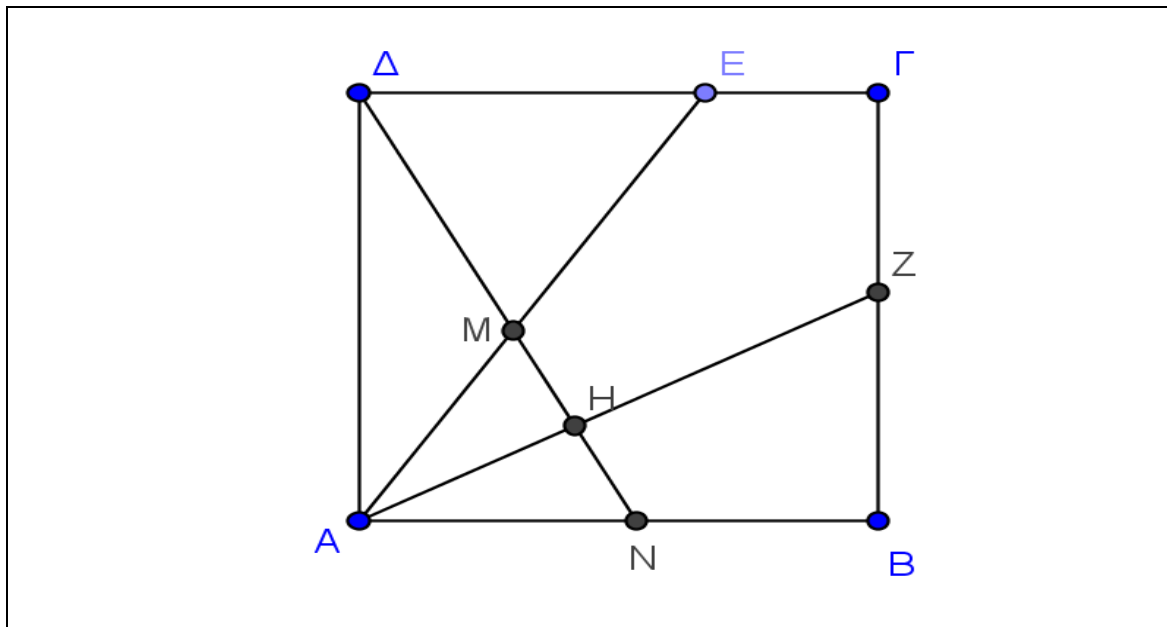
(Μονάδες 8)

β) ΑΜ=ΑΝ και ΔΕ=ΕΜ.

(Μονάδες 10)

γ) ΑΕ=ΔΕ+ΒΖ

(Μονάδες 7)

**ΛΥΣΗ**

α) Τα τρίγωνα $A\Delta N$ και ABZ είναι ορθογώνια και έχουν

- $A\Delta = AB$ (ως πλευρές τετραγώνου) και
- $\hat{A\Delta N} = \hat{BAZ}$ (είναι οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες).

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Στο τρίγωνο AMN το AH είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε είναι ισοσκελές.

Δηλαδή $AM = AN$ και $\hat{AMN} = \hat{ANM}$.

$\hat{AMN} = \hat{\Delta ME}$ (ως κατακορυφήν).

$\hat{ANM} = \hat{M\Delta E}$ (ως εντός εναλλάξ των $AB \parallel \Delta\Gamma$ που τέμνονται από την ΔN).

Άρα:

$$\hat{M\Delta E} = \hat{\Delta ME} \Leftrightarrow \Delta E = EM$$

γ) Είναι $AE = AM + ME$ και επειδή $AM = AN$, $ME = \Delta E$ (από β) θα είναι

$AE = AN + \Delta E$ και επειδή $AN = BZ$ (από α). θα είναι $AE = BZ + \Delta E$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4616)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και M το μέσο της πλευράς $\Delta\Gamma$. Φέρουμε κάθετη στην AM στο σημείο της M , η οποία τέμνει την ευθεία $A\Delta$ στο σημείο P και την $B\Gamma$ στο Σ .

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta P = \Sigma\Gamma$.

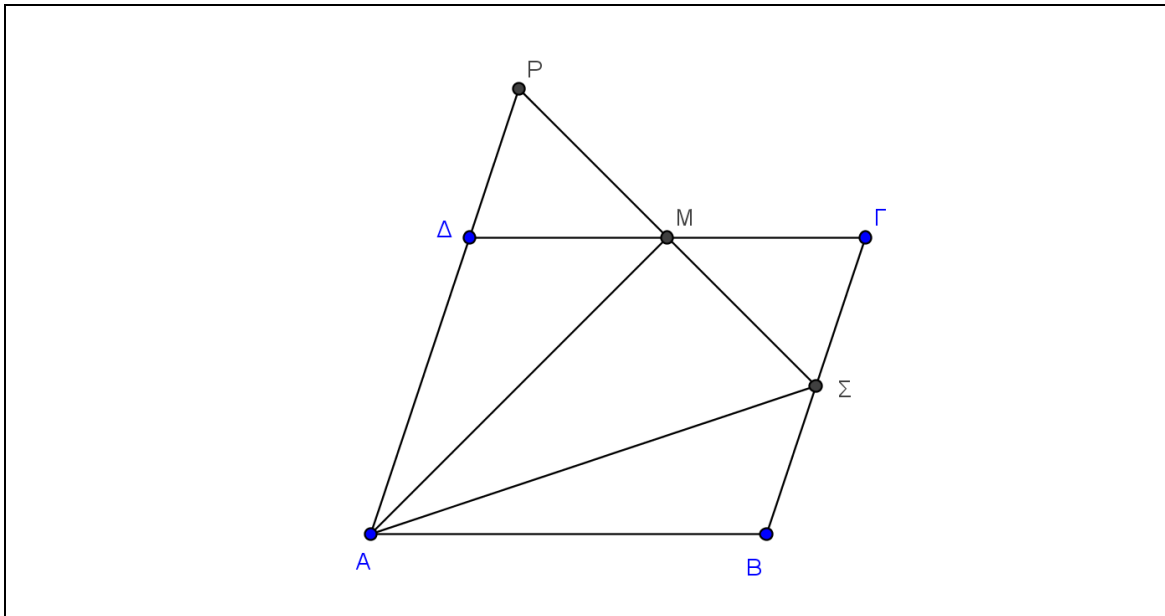
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $AP\Sigma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) $A\Sigma = A\Delta + \Gamma\Sigma$.

(Μονάδες 9)

**ΛΥΣΗ**

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle PAM$ και $\triangle GSM$, που έχουν:

- $DM = MG$ (M μέσο της DG)
- $\angle MPD = \angle GMS$ (ως κατακορυφήν)
- $\angle PAM = \angle GSM$ (ως εντός εναλλάξ των $AD // BG$ που τέμνονται από την DG)

Άρα $\triangle PAM = \triangle GSM$ (Γ-Π-Γ)

Οπότε θα έχουμε και $AP = GS$ και $PM = MS$.

β) Στο τρίγωνο APS έχουμε AM ύψος και διάμεσος, τότε το APS είναι ισοσκελές, δηλαδή $AP = AS$.

γ) Έχουμε $AS = AP$ (από (β)) και $AP = AD + PD \stackrel{(a)}{=} AD + GS$ οπότε $AS = AD + GS$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4619)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διάμεσου BA . Στην προέκταση της AE θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $EZ = AE$ και έστω Θ το σημείο τομής της AZ με την πλευρά $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

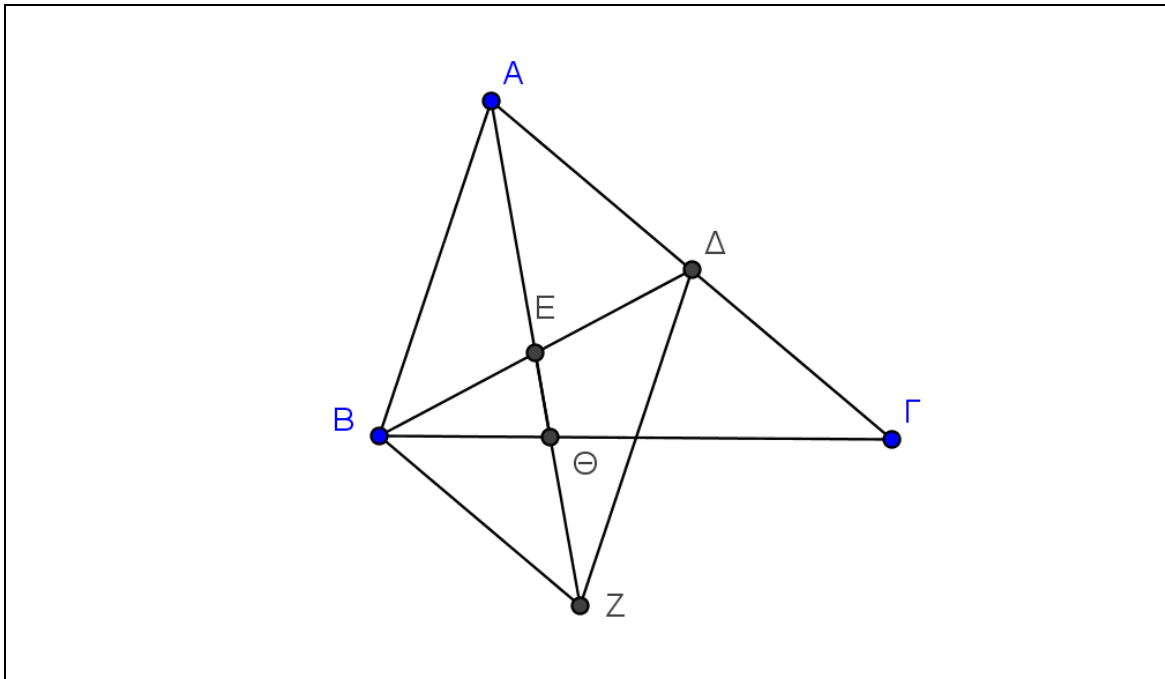
(Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο $BA\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

γ) Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου BAZ .

(Μονάδες 9)

**ΛΥΣΗ**

α) Το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο επειδή οι διαγώνιοί του διχοτομούνται στο E ($BE=ED$ και $AE=EZ$).

β) Επειδή $ABZ\Delta$ παραλληλόγραμμο τότε $A\Delta//BZ$ και επειδή $A\Delta=D\Gamma$ (αφού $B\Delta$ διάμεσος), τότε $BZ//D\Gamma$, οπότε το $B\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Επειδή $BZ\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο, τότε οι διαγώνιοί του διχοτομούνται έστω στο O . Επομένως, στο τρίγωνο $B\Delta Z$, έχουμε: BO, ZE διάμεσοι που τέμνονται στο Θ , οπότε το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του $B\Delta Z$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4626)

Σε μια ευθεία (ϵ) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ έτσι ώστε $AB = 2 B\Gamma$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$. Αν H είναι το μέσο του $A\Delta$ και η ευθεία ΔE τέμνει την ευθεία (ϵ) στο σημείο Z να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $BH\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

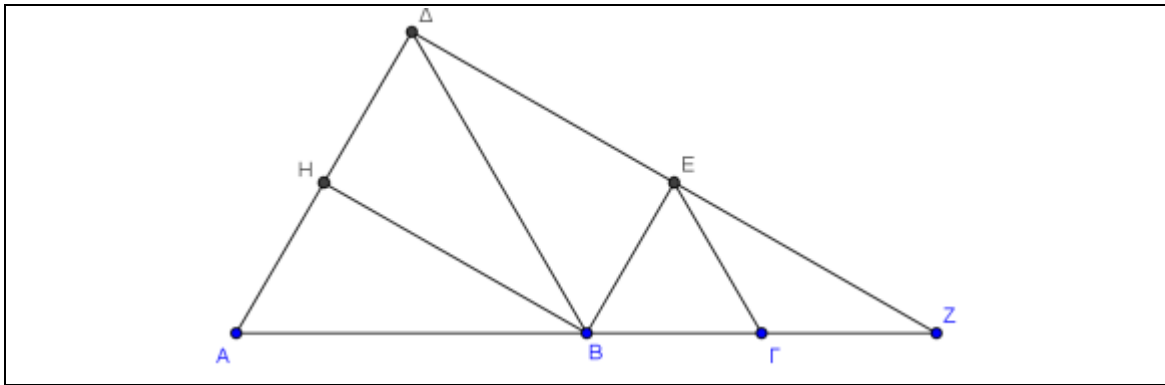
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΓZE είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο $HE\Gamma A$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 9)

**ΛΥΣΗ**

α) Επειδή τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $BE\Gamma$ είναι ισόπλευρα τότε οι γωνίες $\Delta AB = E\Gamma = 60^\circ$, οπότε $BE \parallel A\Delta$ (είναι εντός εκτός και επί τ' αυτά μέρη γωνίες των $BE, A\Delta$ που τέμνονται από την AB).

Το H μέσο της $A\Delta$ άρα

$$\Delta H = \frac{A\Delta}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma = BE$$

Οπότε $\Delta H \parallel B\Gamma$, δηλαδή το $BH\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο. Στο ισόπλευρο τρίγωνο $B\Delta A$, έχουμε BH διάμεσος τότε και ύψος. Επομένως, εφόσον $BH\Delta E$ παραλληλόγραμμο και έχει μια γωνία ορθή είναι ορθογώνιο.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο BEZ ($BEZ = 90^\circ$), έχουμε:

$$E\Gamma = 60^\circ \text{ (από το ισόπλευρο } BE\Gamma) \text{ άρα } EZ\Gamma = 30^\circ$$

Επίσης,

$$\Gamma EZ = BEZ - BE\Gamma = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \text{ (αφού } BE\Gamma = 60^\circ \text{ γωνία ισόπλευρου)}$$

Άρα

$$EZ\Gamma = \Gamma EZ = 30^\circ$$

επομένως το ΓEZ είναι ισοσκελές.

γ) Στο τρίγωνο ΔBZ είναι ισοσκελές άρα το ύψος BE είναι και διάμεσος άρα το E είναι μέσο της ΔZ . Έτσι το HE ενώνει μέσα πλευρών του τριγώνου $A\Delta Z$ άρα $HE \parallel \Delta Z$ οπότε το $HE\Gamma A$ είναι τραπέζιο αφού έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες (οι άλλες $AH, \Gamma E$ δεν είναι παράλληλες αφού $AH \parallel BE$ και BE, HE τέμνονται) και επειδή $AH = BE = E\Gamma$, το $HE\Gamma A$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4630)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και K το σημείο τομής των διαγωνίων του.

Φέρουμε AH κάθετη στην $B\Delta$ και στην προέκταση της AH (προς το H) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AH = HE$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο AEK είναι ισοσκελές.

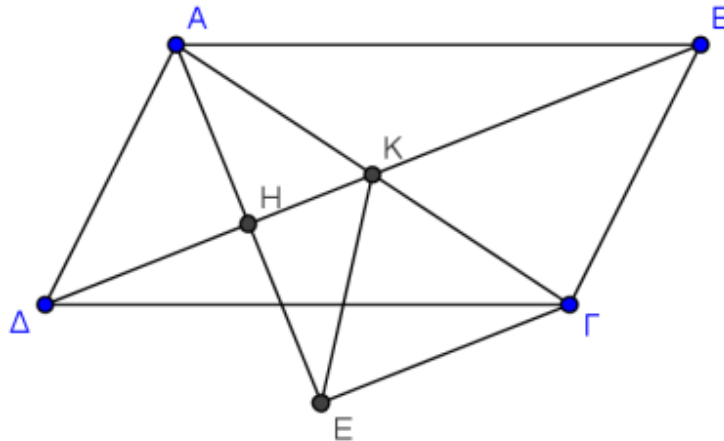
(Μονάδες 7)

β) Το τρίγωνο $AE\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Το τρίγωνο ΑΕΚ είναι ισοσκελές αφού ΚΗ είναι μεσοκάθετος της ΑΕ.

β) Εφόσον, ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοι του διχοτομούνται στο Κ, άρα $AK = \frac{AG}{2} = KE$, οπότε στο τρίγωνο ΑΕΓ, έχουμε $EK = \frac{AG}{2}$, άρα από γνωστό θεώρημα,

$\angle AEG = 90^\circ$ άρα το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο.

γ) Στο τρίγωνο ΑΕΓ, έχουμε Η μέσο της ΑΕ και Κ μέσο της ΑΓ άρα είναι $HK \parallel EG$ επομένως $BD \parallel EG$ άρα το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι τραπέζιο επειδή έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες (οι ΔΕ, ΒΓ θα τέμνονται αφού η ΔΕ τέμνεται με την ΑΔ//ΒΓ).

Τώρα επειδή Β σημείο της μεσοκάθετου του ΑΕ θα ισχύει ότι $AB = BE$ και επειδή $AB = \Delta\Gamma$ (απέναντι παραλληλογράμμου) θα είναι και $BE = \Delta\Gamma$ δηλαδή οι διαγώνιοι του τραπέζιου είναι ίσες, άρα το ΔΒΓΕ ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4635)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και γωνία $B = 2\Gamma$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην προέκταση της ΑΒ τέτοιο ώστε $BE = B\Delta$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ.

(Μονάδες 9)

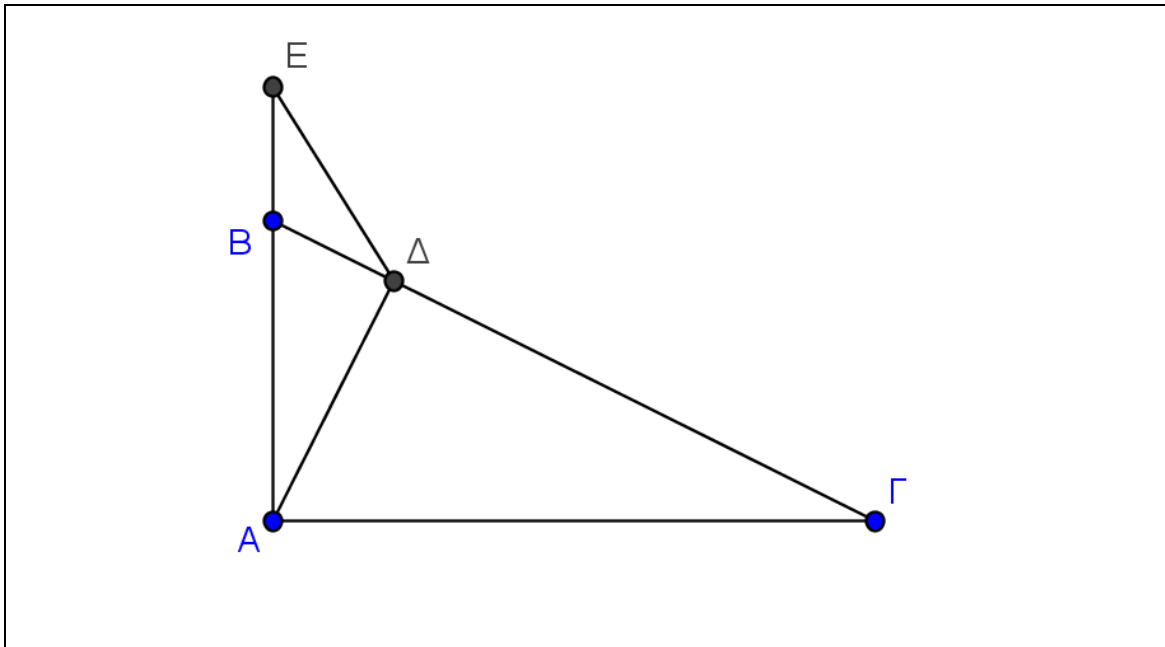
β) Να αποδείξετε ότι:

i. $BE = \frac{AB}{2}$

(Μονάδες 8)

ii. $AE = \Gamma\Delta$

(Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) έχουμε $B + \Gamma = 90^\circ$ και επειδή $B = 2\Gamma$ (από υπόθεση) ισχύει

$$2\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Rightarrow 3\Gamma = 90^\circ \Rightarrow \Gamma = 30^\circ, \text{ άρα γωνία } B = 60^\circ$$

Τώρα η $EB\Delta$ είναι παραπληρωματική της γωνίας B άρα είναι γωνία $EB\Delta = 120^\circ$ και επειδή το τρίγωνο $EB\Delta$ είναι ισοσκελές ($BE = B\Delta$ από υπόθεση) οι άλλες δύο θα έχουν άθροισμα 60° και θα είναι ίσες με $E\Delta B = B\Delta E = 30^\circ$

β) i) Στο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε $\Delta = 90^\circ$ και επειδή $B = 60^\circ$ (από (α)) θα είναι $A = 30^\circ$ άρα για η απέναντι πλευρά θα είναι το μισό της υποτεινουσας του άρα $B\Delta = \frac{AB}{2}$ και επειδή

$$BE = B\Delta \text{ θα ισχύει ότι } BE = \frac{AB}{2}.$$

ii) Είναι

$$AE = AB + BE = AB + \frac{AB}{2} = \frac{3AB}{2}$$

και $\Gamma\Delta = B\Gamma - B\Delta$ και επειδή

$$AB = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2AB = B\Gamma \text{ (η } AB \text{ είναι απέναντι } 30^\circ \text{ στο ορθογώνιο τρίγωνο } AB\Gamma),$$

$$\text{και } B\Delta = \frac{AB}{2} \text{ θα ισχύει ότι } \Gamma B = 2AB - \frac{AB}{2} = \frac{3AB}{2} \text{ επομένως θα ισχύει } AE = \Gamma\Delta.$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4640)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνίες B και Γ οξείες και Δ , M και E τα μέσα των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των AB και $B\Gamma$ και εκτός του τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε σημεία Z και H αντίστοιχα, τέτοια ώστε

$$\Delta Z = \frac{AB}{2} \text{ και } EH = \frac{B\Gamma}{2} .$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΒΔΜΕ είναι παραλληλόγραμμο.

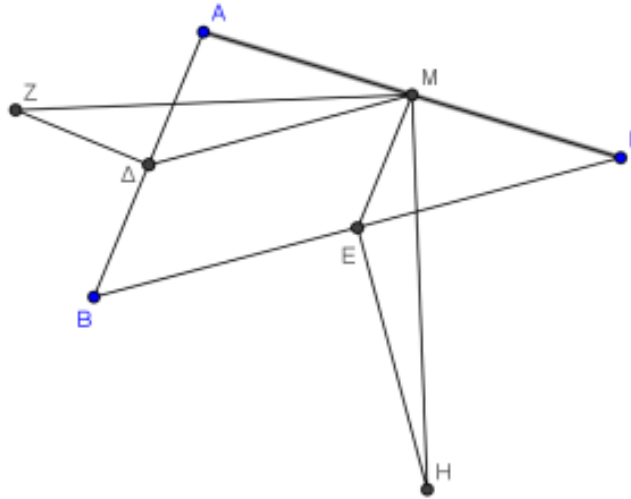
(Μονάδες 5)

ii. Τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

β) Αν τα σημεία Ζ, Δ, Ε είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι η γωνία Α=90° .

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) i) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, η ΔΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ άρα θα ισχύει ότι $\Delta M // = \frac{B\Gamma}{2} = BE$ οπότε το τετράπλευρο ΒΔΜΕ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες.

ii) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ, οπότε έχουμε:

- $ME = BD = \Delta D$ (αφού ΒΔΜΕ παραλληλόγραμμο)
- $\Delta M = BE = EH$ (αφού ΒΔΜΕ παραλληλόγραμμο) και
- $\angle ZDM = \angle MEH$ γιατί έχουν πλευρές κάθετες και είναι και οι δύο αμβλείες (ΔD κάθετη στην $AB // ME$ και EH κάθετη στην $B\Gamma // \Delta M$)

άρα τα τρίγωνα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο (Π-Γ-Π)

β) Αν τα σημεία Ζ, Δ, Ε είναι συνευθειακά το τμήμα ΔΕ ενώνει μέσα πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, οπότε $\Delta E // A\Gamma$, άρα η ΒΑΓ θα είναι εντός εναλλάξ της γωνίας $\angle ZDA = 90^\circ$ αφού ΖΕ μεσοκάθετος της ΑΒ, άρα $\angle B\Gamma = 90^\circ$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4643)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\angle A = 90^\circ$). Φέρουμε τη διάμεσο του ΑΜ την οποία προεκτείνουμε (προς το μέρος του Μ) κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Θεωρούμε ευθεία ΔΚ κάθετη στη ΒΓ, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας Β στο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι ορθογώνιο

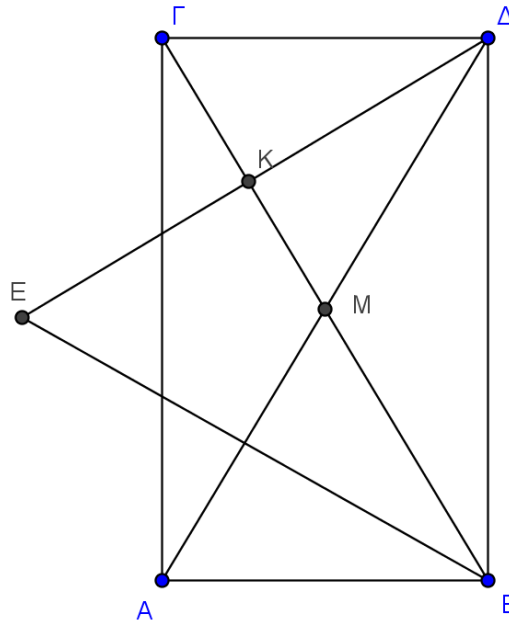
(Μονάδες 8)

β) $\angle KEB = 90^\circ - \frac{B}{2}$

(Μονάδες 8)

γ) $\Delta E = \Delta B$

(Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, επειδή οι διαγώνιοί του ΑΔ, ΒΓ διχοτομούνται στο Μ.

Οπότε, το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία ορθή γωνία.

β) Αφού ΒΕ διχοτόμος της Β θα είναι

$$\angle ABE = \angle KBE = \frac{B}{2}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΕΒ, έχουμε:

$$\angle KEB = 90^\circ - \angle KBE = 90^\circ - \frac{B}{2}$$

γ) Έχουμε

$$\angle ABE = 90^\circ - \angle ABE = 90^\circ - \frac{B}{2},$$

οπότε από το προηγούμενο ερώτημα, ισχύει $\angle KEB = \angle EBA$, άρα το τρίγωνο ΔΕΒ είναι ισοσκελές, επομένως $\Delta E = \Delta B$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4645)

Στο παρακάτω τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύουν: $ΑΔ=ΒΓ$, $ΑΓ=ΒΔ$ και $ΑΒ<ΓΔ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΟΒ$ και $ΔΟΓ$ είναι ισοσκελή.

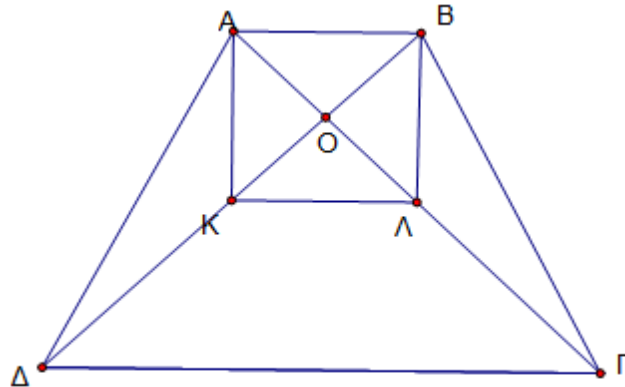
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι τραπέζιο.

(Μονάδες 8)

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $ΓΔ=3ΑΒ$ και $Κ, Λ$ τα μέσα των διαγώνιων $ΒΔ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΒΛΚ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 9)

**ΛΥΣΗ**

α) Τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΔΒΓ$ είναι ίσα γιατί έχουν τρεις πλευρές ίσες,

- $ΑΔ=ΒΓ$,
- $ΑΓ=ΒΔ$ και
- $ΔΓ$ κοινή

Συνεπώς θα έχουμε $ΒΔΓ = ΑΓΔ$ άρα το τρίγωνο $ΔΟΓ$ είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα τώρα $ΑΔΒ$ και $ΑΒΓ$ θα είναι και αυτά ίσα μεταξύ τους επειδή θα έχουν τρεις πλευρές ίσες τις,

- $ΑΔ=ΒΓ$,
- $ΑΓ=ΒΔ$ και
- $ΑΒ$ κοινή

Επομένως γωνίες $ΒΑΓ = ΑΒΔ$ άρα το τρίγωνο $ΑΟΒ$ είναι ισοσκελές.

β) Οι $ΑΟΒ$, $ΔΟΓ$ είναι κατακορυφήν, και τα τρίγωνα $ΑΟΒ$, $ΔΟΓ$ στα οποία περιέχονται είναι ισοσκελή (από (α)) άρα οι γωνίες των βάσεων τους θα είναι ίσες, οπότε θα ισχύει $ΒΑΟ = ΟΓΔ$ που σημαίνει ότι οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες άρα $ΑΒ // ΔΓ$ οπότε το τετράπλευρο έχει δύο απέναντι πλευρές παράλληλες.

Αν οι άλλες δύο πλευρές του ΑΔ, ΒΓ ήταν παράλληλες τότε το ΑΒΓΔ θα ήταν παραλληλόγραμμο και θα ίσχυε $AB=ΔΓ$ που είναι άτοπο αφού $AB<ΔΓ$. Έτσι το ΑΒΓΔ έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες άρα είναι τραπέζιο.

γ) Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος του τραpezίου διέρχεται από τα μέσα των διαγώνιων του και είναι παράλληλη στις βάσεις του και ισχύει ότι

$$ΚΛ = \frac{ΔΓ - AB}{2} = \frac{3AB - AB}{2} = AB$$

άρα το ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο.

Συγκρίνοντας τώρα τα τρίγωνα ΑΟΒ, ΚΟΛ είναι ίσα γιατί

- $AB=ΚΛ$,
- $BAO = OΛΚ$ και
- $ABO = OKΛ$ (ως εντός εναλλάξ)

(σύμφωνα με το κριτήριο Γ-Π-Γ) είναι ισοσκελή, άρα οι διαγώνιοι του παρ/μου είναι ίσες, άρα είναι ορθογώνιο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4646)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) και $\Gamma = 30^\circ$ με Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η ΒΕ είναι διχοτόμος της Β.

(Μονάδες 6)

ii) $AE = \frac{ΓΕ}{2}$

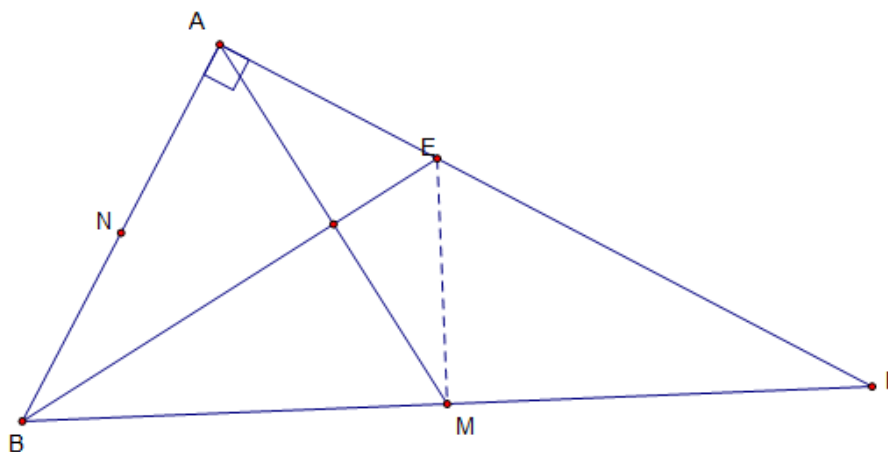
(Μονάδες 6)

iii) η ΒΕ είναι μεσοκάθετος της διάμεσου ΑΜ.

(Μονάδες 7)

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνει την ΒΕ στο Η, να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Η και Ν είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

α) i) Αφού η ME μεσοκάθετος της BΓ έχουμε BE=ΕΓ και άρα $EBM = EMΓ = 30^\circ$, όμως $B = 60^\circ$ άρα $ABE = EBM = 30^\circ$ δηλαδή BE διχοτόμος της γωνίας B.

ii) Στο ορθογώνιο ABE έχουμε,

$$ABE = 30^\circ \text{ άρα } AE = \frac{BE}{2} = \frac{GE}{2} \quad (1)$$

Επειδή στο ορθογώνιο ABΓ, η γωνία $\Gamma = 30^\circ$ έχουμε $AB = \frac{B\Gamma}{2} = BM$, άρα το B ανήκει στη μεσοκάθετο της AM. Στο ορθογώνιο BME έχουμε,

$$EBM = 30^\circ \text{ άρα } EM = \frac{BE}{2} \quad (2)$$

Από (1), (2) $AE = EM$ άρα το E ανήκει στη μεσοκάθετο του AM. Τελικά η BE είναι η μεσοκάθετος του AM (από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.)

β) Έστω ότι η BE τέμνει την AM στο K. Τα AΔ, BK είναι ύψη του τριγώνου BAM, άρα H είναι το ορθόκентρο.

Αρκεί να δείξουμε ότι MN είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου. Η $MN \parallel AG$ (ενώνει μέσα πλευρών τριγώνου) και επειδή BA κάθετη στην ΓΑ ισχύει ότι MN κάθετη στην AB άρα ύψος του τριγώνου BAM.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4648)

Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου κέντρου O φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA, PB και τη διακεντρική ευθεία PO που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ τέμνει τις προεκτάσεις των PA και PB στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\triangle AP = \triangle AP$

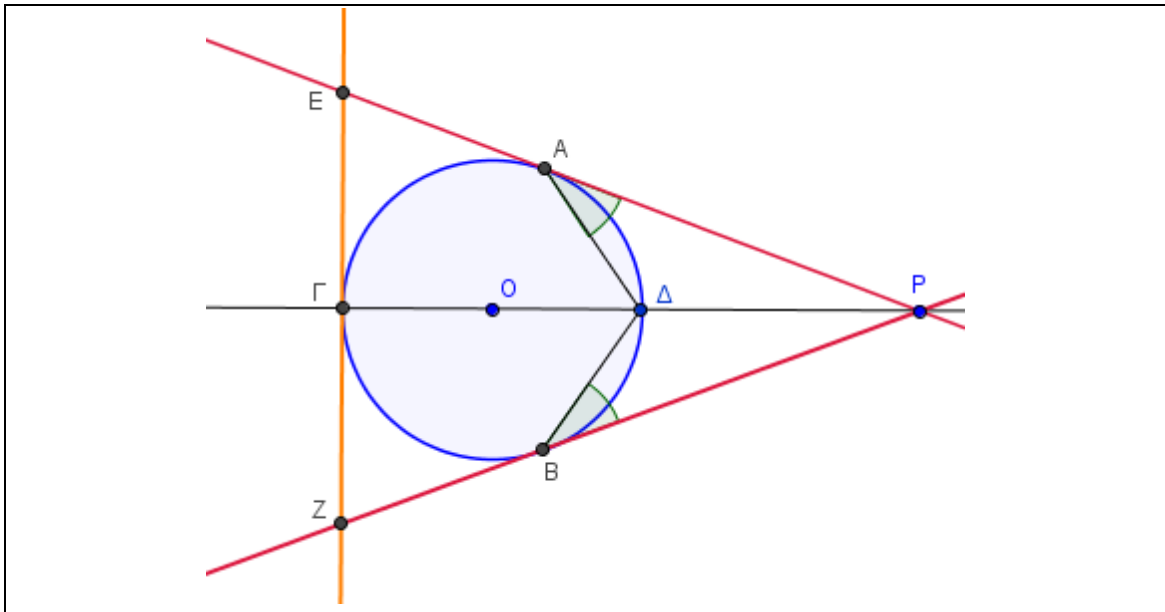
(Μονάδες 8)

β) $EA = ZB$

(Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ABZE είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΡΑΔ, ΡΒΔ που έχουν:

- ΡΑ=ΡΒ (εφαπτόμενα τμήματα στον ίδιο κύκλο από εξωτερικό σημείο)
- ΡΔ κοινή πλευρά
- ΑΡΟ = ΒΡΟ (η διακεντρική ευθεία ΡΟ διχοτομεί την ΑΡΒ)

άρα σύμφωνα με το κριτήριο (Π-Γ-Π) είναι ίσα οπότε και γωνίες $\Delta AP = \Delta BP$

β) Στο τρίγωνο ΡΕΖ η ΡΓ ύψος και διχοτόμος, άρα ΡΕΖ ισοσκελές, οπότε ΡΕ = ΡΖ και επειδή ΡΑ=ΡΒ τα ΕΑ=ΖΒ ως υπόλοιπα ίσων τμημάτων.

γ) Η διακεντρική ευθεία ΡΟ είναι κάθετη στην χορδή ΑΒ και στην εφαπτομένη ΕΖ, άρα ΑΒ//ΕΖ (κάθετες στην ίδια ευθεία ΡΟ) και οι ΑΕ, ΒΖ τέμνονται στο Ρ, άρα το ΑΒΖΕ είναι τραπέζιο. Ακόμη από το ισοσκελές τρίγωνο ΡΕΖ έχουμε γωνίες ΡΕΖ = ΡΖΕ, οπότε το ΑΒΖΕ ισοσκελές τραπέζιο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4649)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < BG$ και η διχοτόμος ΒΕ της Β. Αν $AZ \perp BE$, όπου Ζ σημείο της ΒΓ και Μ το μέσον της ΑΓ, να αποδείξετε ότι :

α) Το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

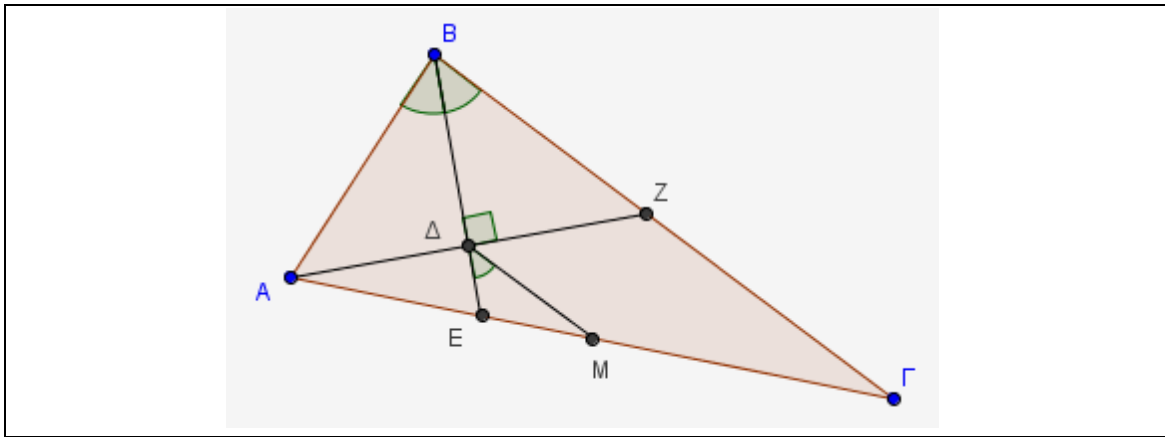
(Μονάδες 7)

β) $AM \parallel BG$ και $AM = \frac{BG - AB}{2}$

(Μονάδες 10)

γ) $\angle EAM = \frac{B}{2}$, όπου Β η γωνία του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

α) το τρίγωνο BAZ είναι ισοσκελές αφού η BΔ διχοτόμος και ύψος.

β) Το τρίγωνο BAZ ισοσκελές άρα $BA=BZ$ (1) και AΔ διάμεσος, άρα Δ μέσο της AZ (2).

Στο τρίγωνο AZΓ το τμήμα ΔM ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών του AZ (από (2)) και AΓ (από υπόθεση), άρα $DM \parallel ZΓ$, δηλαδή $DM \parallel BΓ$ και

$$\Delta M = \frac{B\Gamma - BZ}{2} \stackrel{(1)}{=} \frac{B\Gamma - AB}{2}.$$

γ) $E\Delta M = EBF = \frac{B}{2}$ (ως εντός εκτός και επί τ' αυτά των παραλλήλων ΔM, BΓ που τέμνονται από την BΔ)

ΑΣΚΗΣΗ (4_4650)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο ABΓ, η διχοτόμος Bx της γωνίας B του τριγώνου ABΓ και η διχοτόμος By της εξωτερικής γωνίας B. Αν Δ και E είναι οι προβολές της κορυφής A του τριγώνου ABΓ στην Bx και By αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο AΔBE είναι ορθογώνιο.

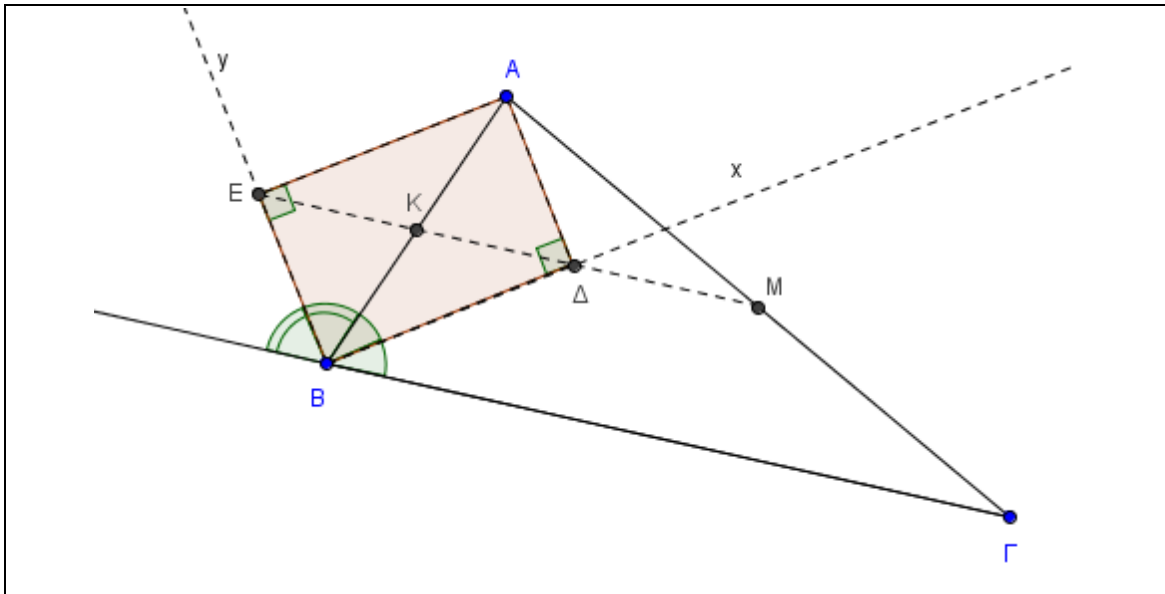
(Μονάδες 7)

β) Η ευθεία EΔ είναι παράλληλη προς τη BΓ και διέρχεται από το μέσο M της AΓ.

(Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο KMGΒ είναι τραπέζιο και θ διάμεσος του είναι ίση με $\frac{3a}{4}$, όπου $a=BΓ$.

(Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

α) Γνωρίζουμε ότι οι διχοτόμοι των εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών τέμνονται κάθετα, οπότε γωνία $\Delta BE = 90^\circ$. Επομένως, ΔBE είναι ορθογώνιο επειδή έχει τρεις ορθές γωνίες.

β) Αφού ΔBE είναι ορθογώνιο τότε οι διαγώνιοί του ΔE , AB διχοτομούνται στο K και είναι ίσες, οπότε $K\Delta = KB$, άρα το τρίγωνο $KB\Delta$ ισοσκελές, οπότε $KB\Delta = K\Delta B$ (1).

Η EKB είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου $KB\Delta$ οπότε ισχύει:

$EKB = K\Delta B + K\Delta B \stackrel{(1)}{=} 2K\Delta B = B$, οπότε $E\Delta // B\Gamma$ αφού οι EKB, B είναι εντός εναλλάξ. Έτσι στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε ότι K μέσο της AB και $KM // B\Gamma$ άρα M μέσο της $A\Gamma$

γ) Αφού $KM // B\Gamma$ και οι πλευρές $M\Gamma$, KB τέμνονται στο A τότε το τετράπλευρο $KM\Gamma B$ είναι τραπέζιο. Αν δ η διάμεσος του τραπέζιου $KM\Gamma B$ τότε ισούται με:

$$\delta = \frac{KM + B\Gamma}{2} \quad (2)$$

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, έχουμε ότι K μέσο της AB και ότι M μέσο της $A\Gamma$ άρα

$$KM // = \frac{B\Gamma}{2} \quad (3)$$

Από τις (2), (3) έχουμε:

$$\delta = \frac{\frac{B\Gamma}{2} + B\Gamma}{2} = \frac{\frac{3}{2}B\Gamma}{2} = \frac{3 \cdot B\Gamma}{4} = \frac{3a}{4}$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4651)

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία E, Z, H, Θ στις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα, με $AE = \Gamma H$ και $BZ = \Delta\Theta$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο.

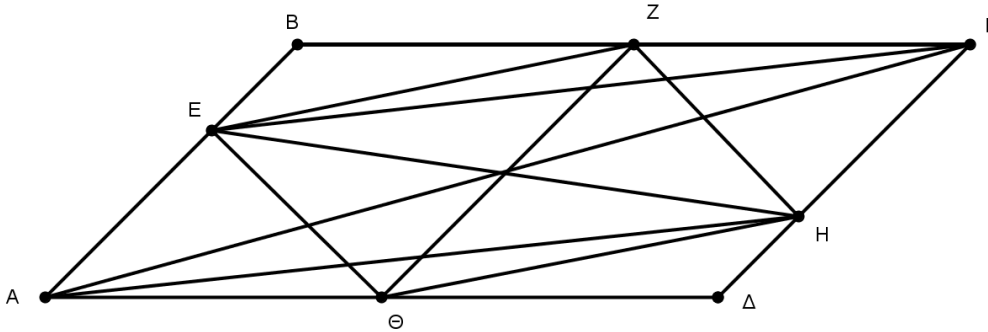
(Μονάδες 6)

β) Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

γ) Τα τμήματα ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΖΘ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Επειδή ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο τότε $AB \parallel \Delta\Gamma$, οπότε $AE \parallel H\Gamma$ άρα το τετράπλευρο ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΘΕ και ΓΖΗ, που έχουν

- $A\Theta = A\Delta - \Theta\Delta = B\Gamma - BZ = \Gamma Z$
- $AE = \Gamma H$
- $\angle A\Theta E = \angle H\Gamma Z$ (απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου)

άρα ίσα σύμφωνα με το κριτήριο (Π-Γ-Π), οπότε $\Theta E = HZ$ (1)

Όμοια για τα τρίγωνα ΔΗΘ και ΒΕΖ είναι ίσα άρα και $\Theta H = EZ$ (2).

Από (1),(2) οι απέναντι πλευρές τετραπλεύρου ΕΖΗΘ είναι ίσες άρα παραλληλόγραμμο.

γ) Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο τότε οι διαγώνιοι του ΒΔ, ΑΓ διχοτομούνται, έστω στο Ο.

Αφού το ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο τότε οι διαγώνιοι του ΑΓ και ΕΗ διχοτομούνται στο Ο, λόγω της μοναδικότητας του μέσο του ΑΓ.

Αφού το ΘΕΖΗ παραλληλόγραμμο τότε οι διαγώνιοί του ΕΗ, ΘΖ διχοτομούνται στο Ο λόγω της μοναδικότητας του μέσου της ΕΗ.

Επομένως, τα τμήματα ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ, ΖΘ διέρχονται από το Ο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4652)

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημεία Κ, Λ της διαγωνίου του ΒΔ, τέτοια ώστε να ισχύει $BK = K\Lambda = \Lambda\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

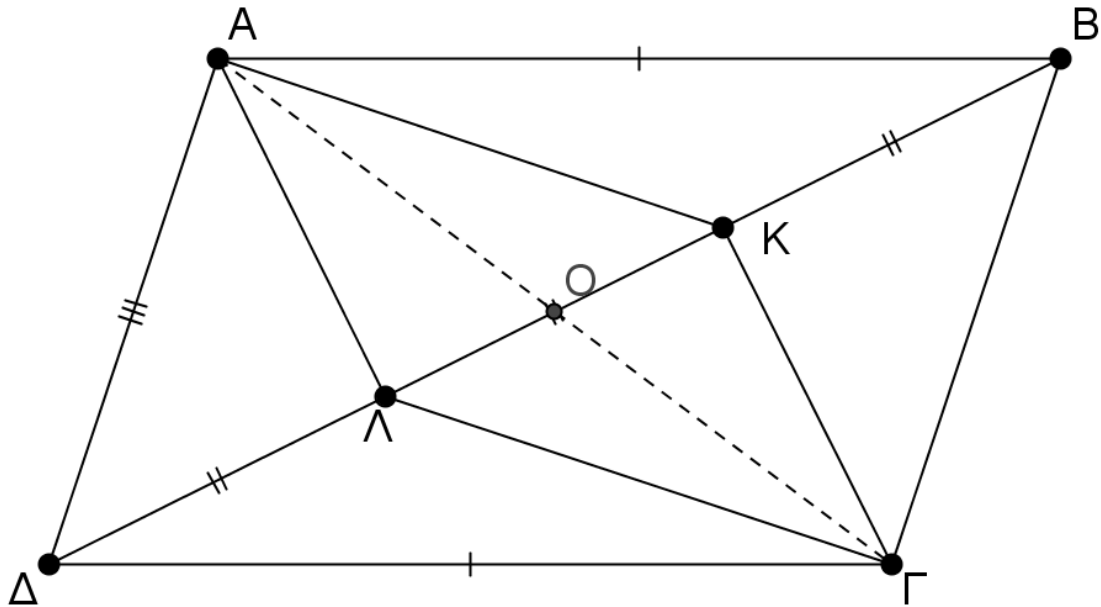
β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε και το ΑΚΓΛ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)

γ) Ποιά πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, ώστε το ΑΚΓΛ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ



α) Αν Ο το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τότε ισχύει Ο μέσο της διαγωνίου ΒΔ άρα $OB=OD$ (1)

Όμως $OK=OB-BK$ και από υπόθεση $BK=OL$ άρα και λόγω (1) $OK=OD-OL$ άρα Ο μέσο και της ΛΚ.

Επομένως οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΚΓΛ διχοτομούνται άρα είναι παραλληλόγραμμο.

β) Αφού ΑΒΓΔ είναι ρόμβος τότε οι διαγώνιοι του ΑΓ, ΒΔ τέμνονται κάθετα, οπότε και το ΑΚΓΛ θα είχε κάθετες διαγώνιους, άρα θα ήταν ρόμβος.

γ) Αν το ΑΚΓΛ είναι ορθογώνιο τότε οι διαγώνιοι του είναι ίσες, δηλαδή

$$AG=KL \Leftrightarrow AG=\frac{BD}{3}$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4653)

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ. Φέρνουμε την ΑΕ κάθετη στην διαγώνιο ΒΔ. Εάν Ζ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την διαγώνιο ΒΔ, τότε να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 7)

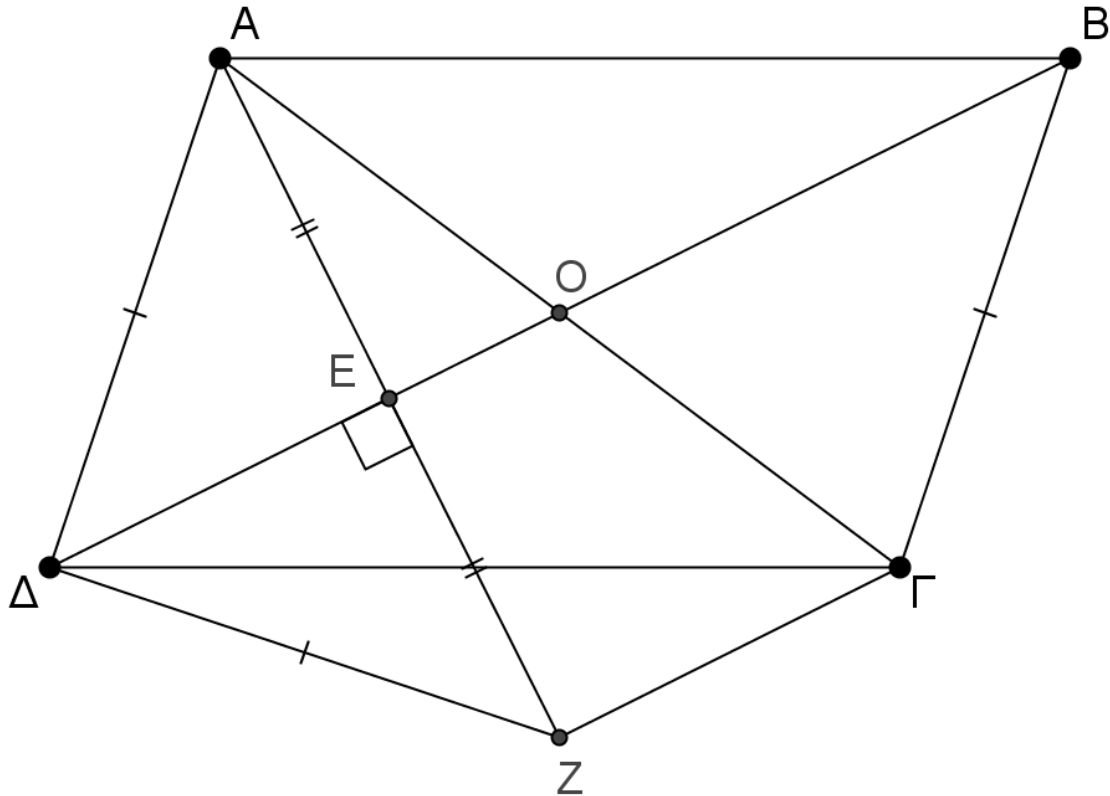
β) $Z\Gamma = 2OE$.

(Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία B, Δ, Z και Γ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ



α) Αφού Z είναι συμμετρικό του A ως προς τη διαγώνιο BΔ τότε ΔΕ μεσοκάθετος του AZ, οπότε $\Delta A = \Delta Z$ δηλαδή το ΔAZ είναι ισοσκελές.

β) Στο τρίγωνο AZΓ, έχουμε ότι E μέσο της AZ και O μέσο της AG (σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου) άρα το τμήμα OE ενώνει μέσα πλευρών του τριγώνου AGZ άρα $OE \parallel \frac{Z\Gamma}{2}$, άρα $Z\Gamma = 2OE$

γ) Αφού $Z\Gamma \parallel B\Delta$ (από το προηγούμενο ερώτημα) και οι πλευρές BΓ, ΔZ τέμνονται, αφού $B\Gamma \parallel \Delta\Delta$ και $\Delta\Delta$, ΔZ τέμνονται στο Δ οπότε οι BΓ, ΔZ τέμνονται. Επομένως το BΔΖΓ είναι τραπέζιο και επειδή $\Delta Z = \Delta\Delta = B\Gamma$ το BΔΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4655)

Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Στην προέκταση της πλευράς AB παίρνουμε τμήμα BE=AB και στην προέκταση της πλευράς ΑΔ τμήμα ΔZ=ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τετράπλευρα BΔΓE και BΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμα.

(Μονάδες 7)

ii. Τα σημεία E, Γ και Z είναι συνευθειακά.

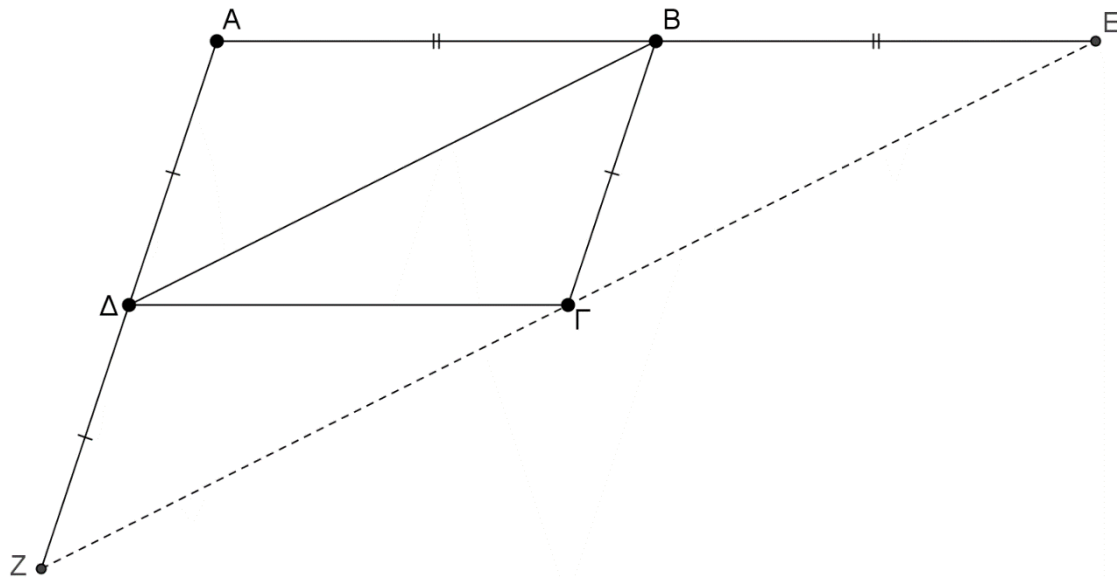
(Μονάδες 9)

β) Αν K και Λ είναι τα μέσα των BE και ΔZ αντίστοιχα, τότε $K\Lambda \parallel \Delta B$ και

$$ΚΛ = \frac{3}{2} ΔΒ.$$

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ



α) i) Αφού ABΓΔ παραλληλόγραμμο τότε $AB \parallel \Delta\Gamma$ και $AD \parallel B\Gamma$.

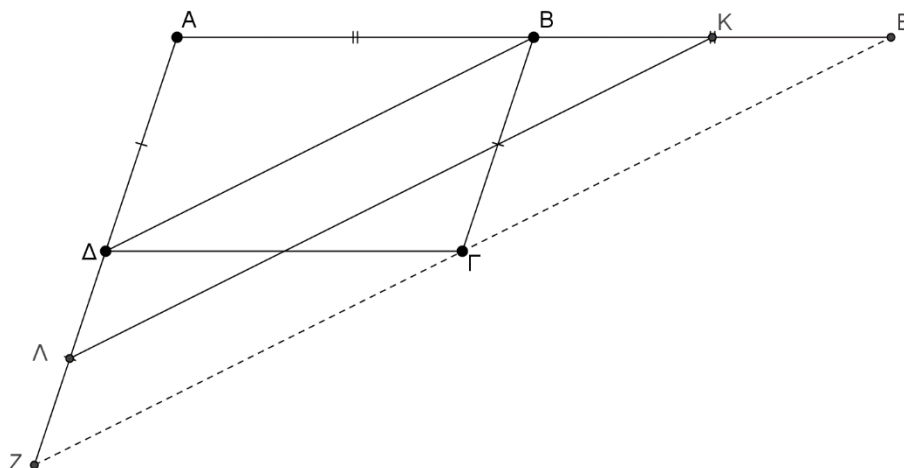
Οπότε BΔΓΕ παραλληλόγραμμο, αφού $BE \parallel \Delta\Gamma$ ($BE = AB$) και BΔΖΓ παραλληλόγραμμο, αφού $B\Gamma \parallel \Delta Z$ ($AD = \Delta Z$).

ii) Αφού BΔΓΕ, BΔΖΓ παραλληλόγραμμο τότε $\Gamma E \parallel B\Delta$ και $\Gamma Z \parallel B\Delta$ και επειδή Γ σημείο που δεν ανήκει στην ευθεία BΔ τότε από το αίτημα παραλληλίας τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά.

β) Αφού $B\Delta \parallel ZE$ και οι πλευρές BE, ΔZ τέμνονται στο A έχουμε ότι το τετράπλευρο BΔZE είναι τραπέζιο.

Επειδή K, Λ μέσα των μη παράλληλων πλευρών του τραπεζίου BΔZE τότε ΚΛ διάμεσος, οπότε $ΚΛ \parallel \Delta B$ και

$$ΚΛ = \frac{B\Delta + ZE}{2} = \frac{B\Delta + Z\Gamma + \Gamma E}{2} = \frac{3}{2} B\Delta.$$



ΑΣΚΗΣΗ (4_4731)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και το ύψος του AM . Φέρουμε $M\Delta$ κάθετη την $A\Gamma$ και θεωρούμε H το μέσο του τμήματος $M\Delta$. Από το H φέρουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει τις AM και $A\Gamma$ στα σημεία K και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $HZ = \frac{B\Gamma}{4}$

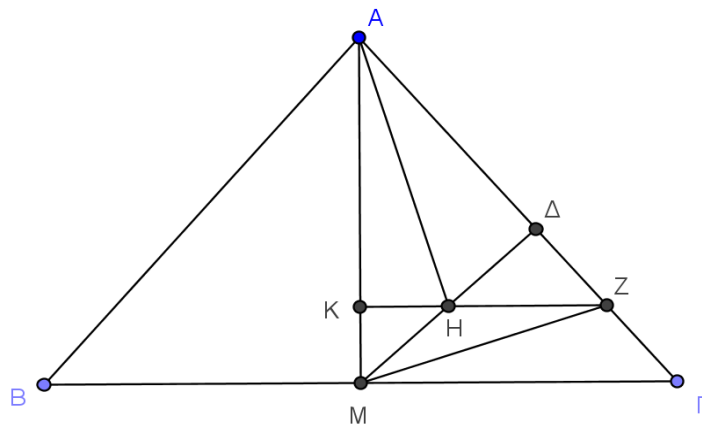
(Μονάδες 9)

β) $MZ \parallel B\Delta$

(Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία AH είναι κάθετη στη $B\Delta$.

(Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

α) Στο τρίγωνο $M\Delta\Gamma$, έχουμε ότι το H μέσο της $M\Delta$ και $HZ \parallel M\Gamma$ άρα Z μέσο της $\Delta\Gamma$ άρα

$$HZ = \frac{M\Gamma}{2} \quad (1) \quad (HZ \text{ ενώνει μέσα των πλευρών στο τρίγωνο } M\Delta\Gamma)$$

Τώρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και AM ύψος οπότε και διάμεσος, οπότε

$$MB = M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \quad (2)$$

Από τις (1), (2) έχουμε:

$$HZ = \frac{M\Gamma}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$$

β) Στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$, έχουμε ότι M μέσο της $B\Gamma$ και Z μέσο της $\Delta\Gamma$ άρα $MZ \parallel B\Delta$ (MZ ενώνει μέσα πλευρών στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$)

γ) Αφού $ZK \parallel B\Gamma$ και $B\Gamma$ κάθετη στην AM οα είναι ZK κάθετη στην AM και τότε στο τρίγωνο AMZ , έχουμε ότι τα ZK , $M\Delta$ ύψη του τριγώνου που τέμνονται στο H , οπότε H ορθόκεντρο, επομένως AH κάθετη στη MZ και επειδή AH κάθετη στην MZ και $MZ \parallel B\Delta$ θα είναι AH κάθετη στην $B\Delta$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4735)

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και AD η διχοτόμος της γωνίας A , για την οποία ισχύει $AD=AG$. Η DE είναι διχοτόμος της γωνίας ADB και η DH παράλληλη στην AB . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ED και AG είναι παράλληλα.

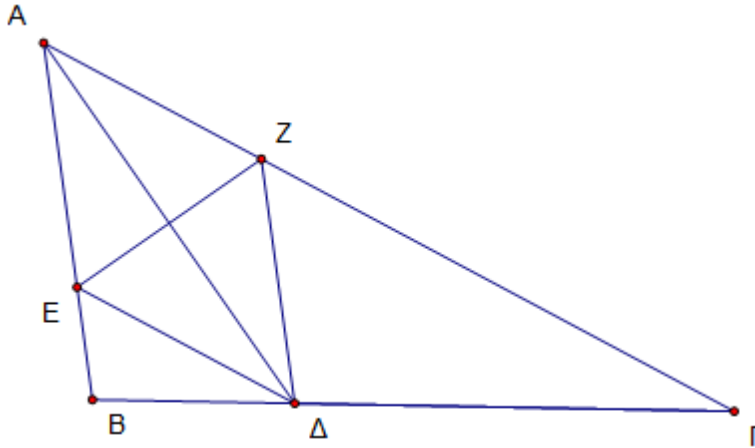
(Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) Τα τμήματα AD και EH διχοτομούνται.

(Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

α) Έχουμε αφού ED διχοτόμος της γωνίας ADB γωνίες $EDA = EDB = \varphi$ και ακόμη επειδή AD διχοτόμος της γωνίας A γωνίες έχουμε $BAD = DAG = \omega$ και επειδή $AD=AG$ το τρίγωνο ADG ισοσκελές άρα γωνίες $DAG = DGA = \omega$.

Όμως η ADB εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ADG άρα θα ισχύει

$ADG = DAG + DGA = 2\omega$ και επειδή $ADG = ADE + EDB = 2\varphi$ θα είναι $2\varphi = 2\omega$ άρα $EDB = AGD$ άρα $ED \parallel AG$, αφού οι EDB, AGD είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ED, AG που τέμνονται από την BG και είναι ίσες.

β) Από (α) έχουμε $\omega = \varphi$ άρα $EAD = EDA$ οπότε το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές.

γ) Το τετράπλευρο $AEDZ$ είναι παραλληλόγραμμο, συνεπώς οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Άρα οι ED, EZ διχοτομούνται.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4737)

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία $B = 60^\circ$. Φέρνουμε τα ύψη AD και GE που τέμνονται στο H . Φέρνουμε KZ διχοτόμο της γωνίας EHA και $ΘH$ κάθετο στο ύψος AD . Να αποδείξετε ότι:

α) Για το τμήμα ZE ισχύει $ZH=2EZ$.

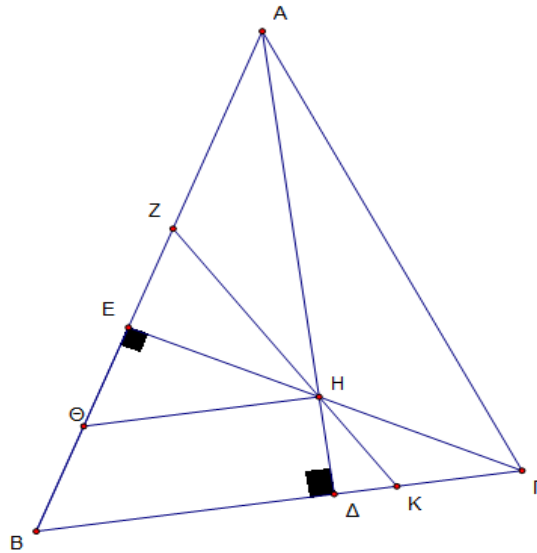
(Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο ΘZH είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΘHKB είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΔAB , επειδή γωνία $B = 60^\circ$ έχουμε $\Delta AB = 30^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου HEA έχουμε:

$$\angle AHE + \angle EAH = 90^\circ \Leftrightarrow \angle AHE + \angle \Delta AB = 90^\circ \Leftrightarrow \angle AHE + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \angle AHE = 60^\circ$$

Επειδή η ZK είναι διχοτόμος της AHE θα είναι

$$\angle ZHE = 30^\circ$$

Επομένως στο ορθογώνιο τρίγωνο HEZ , έχουμε ότι:

$$\angle HEZ = 90^\circ \text{ και } \angle EHZ = 30^\circ$$

τότε (κάθετη πλευρά ορθογωνίου απέναντι από γωνία 30°)

$$EZ = \frac{ZH}{2} \Leftrightarrow ZH = 2 \cdot EZ$$

β) Επειδή ΘH και $B\Gamma$ είναι κάθετες στην AD είναι παράλληλες οπότε $\angle Z\Theta H = B = 60^\circ$ και στο ορθογώνιο τρίγωνο ZEH από (α) είναι $\angle EZH = 60^\circ$ άρα το τρίγωνο $ZH\Theta$ είναι ισοσκελές με δύο γωνίες ίσες με 60° άρα είναι ισόπλευρο.

γ) Το τετράπλευρο ΘHKB έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες τις $\Theta H // BK$ (οι άλλες δύο $B\Theta$, KH τέμνονται στο Z) άρα είναι τραπέζιο και οι παρά την βάση του BK γωνίες ίσες με 60° (αφού $B = 60^\circ$ από υπόθεση και $Z = 60^\circ$ από (β)) άρα και $K = 60^\circ$) άρα είναι ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4753)

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Έστω σημείο A εξωτερικό του κύκλου και τα εφαπτόμενα τμήματα AB και AG ώστε να ισχύει $\angle BAG = 60^\circ$. Έστω ότι η εφαπτόμενη του κύκλου στο Δ τέμνει τις AB και AG στα E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ABOG$ είναι εγγράψιμο με $OA=2OB$.

Μονάδες 6

β) Το τρίγωνο AEZ είναι ισόπλευρο.

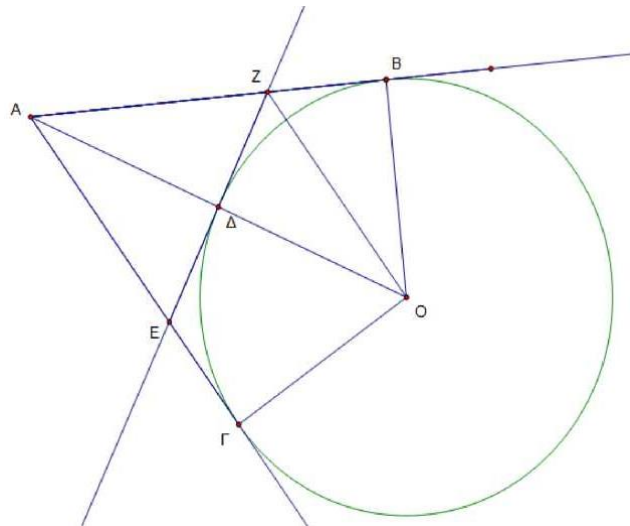
Μονάδες 6

γ) $2ZB = AZ$

Μονάδες 7

δ) Το τετράπλευρο $EZBG$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 6



Λύση

α) Το τετράπλευρο $ABOG$ είναι εγγράψιμο, αφού

$$\angle B + \angle G = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

β) Γνωρίζουμε ότι η διακεντρική ευθεία AO είναι διχοτόμος της γωνίας A , άρα στο τρίγωνο AZE έχουμε το $A\Delta$ ύψος και διχοτόμος, επομένως είναι ισοσκελές.

Όμως η γωνία A είναι 60° , άρα το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο.

γ) Έχουμε,

$$2ZB = 2Z\Delta \quad (Z\Delta, ZB \text{ εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου } (O, \rho))$$

$$= ZE \quad (\text{αφού } \Delta \text{ μέσο του } EZ)$$

$$= ZA \quad (\text{αφού το τρίγωνο } AZE \text{ είναι ισόπλευρο})$$

δ) Θα δείξουμε ότι: $BG \parallel EZ$

Αρχικά τα δύο τρίγωνα AZE και ABG είναι ισόπλευρα τρίγωνα (ως ισοσκελές με μια γωνία 60°). Επομένως οι γωνίες AZE και ABG είναι ίσες με 60° , άρα οι εντός εκτός και επί τ' αυτά γωνίες είναι ίσες, οπότε $BG \parallel EZ$.

Θα δείξουμε ότι: $ZB = E\Gamma$

Έχουμε, $ZB = Z\Delta = \Delta E = E\Gamma$ ($\Delta E, E\Gamma$ εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου (O, ρ))

Τέλος οι πλευρές ZB και $E\Gamma$ είναι μη παράλληλες αφού τέμνονται στο A , άρα το $EZB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4756)

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και $A\Gamma$ μια διάμετρος του. Θεωρούμε τις χορδές $A\Delta = B\Gamma$.

Έστω K και Λ τα μέσα των χορδών $\Delta\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι χορδές AB και $\Delta\Gamma$ είναι παράλληλες.

Μονάδες 6

β) Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

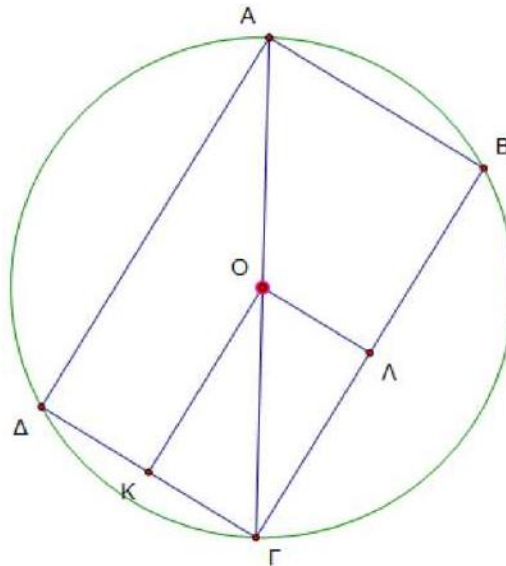
Μονάδες 6

γ) Η $B\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου.

Μονάδες 7

δ) Το τετράπλευρο $ΟΛΓΚ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 6



Λύση

α) Τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι ίσα γιατί,

- οι γωνίες Δ και B είναι ορθές (αφού βαίνουν σε ημικύκλιο)
- $A\Gamma = A\Gamma$ (κοινή πλευρά)
- $A\Delta = B\Gamma$ (δεδομένο)

άρα οι γωνίες $A\Gamma\Delta$ και ΓAB είναι ίσες, δηλαδή οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες, άρα $AB \parallel \Gamma\Delta$

β) Έχουμε, $\Delta\Gamma = AB$ (από την προηγούμενη σύγκριση τριγώνων) και $A\Delta = B\Gamma$ από τα δεδομένα, άρα οι απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου είναι ίσες, οπότε το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. Όμως η γωνία B είναι ορθή, άρα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

γ) Επειδή $BD = AG = 2\rho$, η χορδή BD είναι διάμετρος του κύκλου (O, ρ) .

δ) Στο τρίγωνο $\Gamma\Delta A$ το ευθύγραμμο τμήμα KO ενώνει τα μέσα των πλευρών $\Delta\Gamma$ και AG αντίστοιχα, οπότε $OK \parallel \Delta\Delta$, άρα η γωνία K είναι ορθή. Όμοια αποδεικνύουμε στο τρίγωνο $AB\Gamma$, ότι η γωνία Λ είναι ορθή. Επομένως το τετράπλευρο $ΟΛΓΚ$ έχει τρεις γωνίες ορθές, άρα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4762)

Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο $EZH\Theta$ παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Μια μπάλα του μπιλιάρδου ξεκινάει από σημείο A της μεσοκαθέτου του τμήματος EZ και χτυπώντας διαδοχικά στους τοίχους του μπιλιάρδου $E\Theta$, ΘH , HZ στα σημεία B , Γ και Δ αντίστοιχα, καταλήγει στο σημείο εκκίνησης A . Για τη διαδρομή $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow A$ που ακολουθεί η μπάλα ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ η γωνία ABE) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ η γωνία $\Theta B\Gamma$) και η κάθε μια απ' αυτές είναι 45° .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ABE και $AZ\Delta$ είναι ίσα.

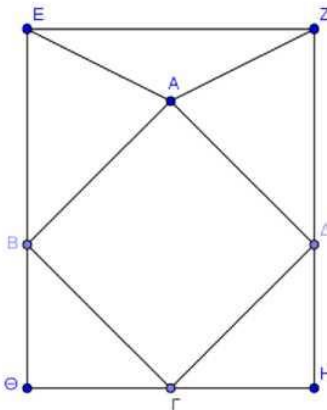
Μονάδες 9

ii. Η διαδρομή $AB\Gamma\Delta A$ της μπάλας σχηματίζει τετράγωνο.

Μονάδες 8

β) Αν η AZ είναι διπλάσια από την απόσταση του A από τον τοίχο EZ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AEZ .

Μονάδες 8



Λύση

α) i. Έχουμε $\triangle ABE = \triangle AZ\Delta$, γιατί

- $\angle B_1 = \angle \Delta_1 = 45^\circ$
- $AE = AZ$ (A σημείο της μεσοκαθέτου EZ)
- $\angle E_2 = \angle Z_2$, ως διαφορές ίσων γωνιών

(άρα $AB = A\Delta$).

ii. Επειδή,

$$\angle AB\Gamma = \angle B\Gamma\Delta = \angle \Gamma\Delta A = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$$

είναι ορθογώνιο, αφού έχει τρεις γωνίες ορθές.

Επίσης, $AB = AD$ (από την προηγούμενη σύγκριση τριγώνων), δηλαδή έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, άρα το $ABGD$ είναι ρόμβος, άρα συνολικά τετράγωνο.

β) Έχουμε,

$$AZ = 2AK \Rightarrow AK = \frac{AZ}{2}$$

όμως το τρίγωνο AKZ είναι ορθογώνιο, οπότε $Z_1 = E_1 = 30^\circ$, άρα

$$ZAE = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4767)

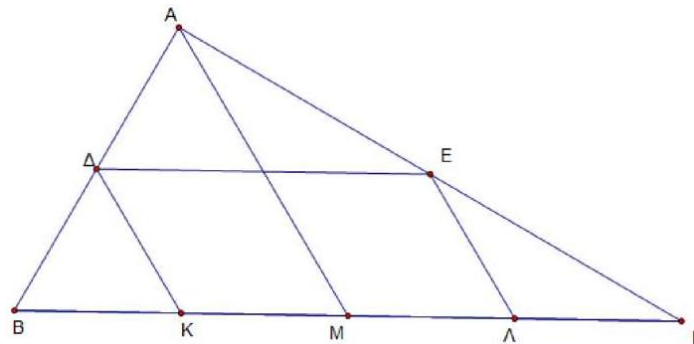
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία K, M, Λ ώστε $BK = KM = M\Lambda = \Lambda\Gamma$. Αν τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $\Delta E \Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο

Μονάδες 13

β) Η διάμεσος του τραπεζίου $K\Delta AM$ ισούται με $\frac{3}{8}B\Gamma$

Μονάδες 12



Λύση

α) Στο τρίγωνο ABM , τα Δ και K είναι μέσα των πλευρών AB και BM αντίστοιχα, άρα

$$\Delta K \parallel AM \text{ και } \Delta K = \frac{AM}{2}$$

Όμοια στο τρίγωνο ΓMA , τα E και Λ είναι μέσα των πλευρών $A\Gamma$ και $M\Gamma$ αντίστοιχα, άρα

$$E\Lambda \parallel AM \text{ και } E\Lambda = \frac{AM}{2}$$

άρα οι απέναντι πλευρές ΔK και $E\Lambda$ είναι παράλληλες και ίσες, άρα το $\Delta E \Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Η διάμεσος του τραπεζίου $K\Delta AM$ ισούται

$$\frac{\Delta K + AM}{2} = \frac{\frac{AM}{2} + AM}{2} = \frac{3AM}{4} = \frac{3 \cdot \frac{B\Gamma}{2}}{4} = \frac{3B\Gamma}{8}$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4769)

Έστω ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) με $B = 2\Gamma$ και $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας B , η οποία τέμνει το $\Delta\Gamma$ στο K και η κάθετη από το K προς το $B\Gamma$ το τέμνει στο M .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του $AB\Gamma\Delta$

Μονάδες 10

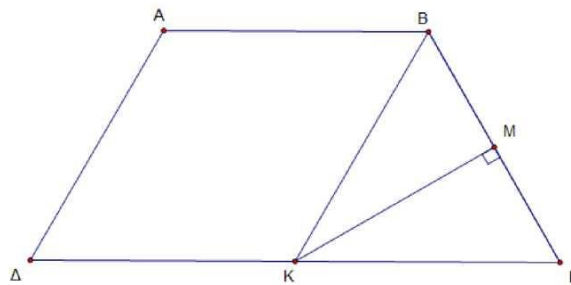
β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $ABK\Delta$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 8

ii. Το σημείο M είναι το μέσο του $B\Gamma$.

Μονάδες 7



Σημείωση: Το δεδομένο της τελευταίας ισότητας $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ είναι περιττό (μπορούμε να το αποδείξουμε με τα άλλα δεδομένα).

Λύση

α) Επειδή $AB \parallel \Delta\Gamma$ έχουμε,

$$B + \Gamma = 180^\circ \Rightarrow 2\Gamma + \Gamma = 180^\circ \Rightarrow 3\Gamma = 180^\circ \Rightarrow \Gamma = 60^\circ$$

άρα $\Gamma = \Delta = 60^\circ$ και $A = B = 120^\circ$, αφού οι γωνίες της βάσης ισοσκελούς τραπέζιου είναι ίσες.

β) i. Επειδή η BK είναι διχοτόμος της γωνίας B , άρα $ABK = KB\Gamma = 60^\circ$.

Το $ABK\Delta$ έχει τις απέναντι γωνίες ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο. Όμως $AB = A\Delta$, δηλαδή έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, άρα το $ABK\Delta$ είναι ρόμβος.

ii. Το τρίγωνο $KB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, αφού είναι ισοσκελές ($\Gamma B K = \Gamma = 60^\circ$) και μια γωνία του είναι 60° , οπότε το ύψος KM είναι και διάμεσος, δηλαδή το M είναι μέσο του $B\Gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4771)

Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και M το μέσο της πλευράς ΔA . Προεκτείνουμε το τμήμα

ΔA (προς την πλευρά του A) κατά τμήμα $AN = \frac{A\Delta}{2}$. Φέρουμε τα τμήματα ΓM και

BN και θεωρούμε τα μέσα τους K και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $MNB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

Να αποδείξετε ότι:

α) $AZ = AH$

Μονάδες 4

β) Το $\Delta O E$ είναι ορθογώνιο

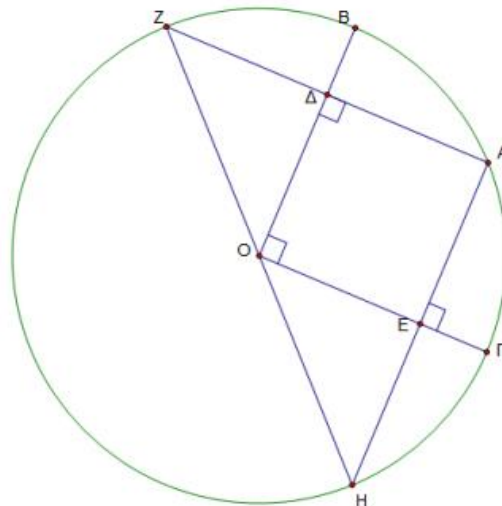
Μονάδες 7

γ) Τα σημεία Z και H είναι αντιδιαμετρικά

Μονάδες 7

δ) Το τετράπλευρο $BGHZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 7



Λύση

α) Επειδή τα τόξα AZ και AH είναι ίσα, τότε και οι αντίστοιχες χορδές θα είναι ίσες, δηλαδή $AZ = AH$.

β) Επειδή έχουμε τρεις γωνίες Δ , O , E ορθές, το τετράπλευρο $A D O E$ είναι ορθογώνιο.

γ) Επειδή η γωνία A είναι ορθή, τότε το τόξο ZH βαίνει σε ημικύκλιο, δηλαδή η ZH είναι διάμετρος, άρα τα Z , H είναι αντιδιαμετρικά σημεία.

δ) Στο ισοσκελές τρίγωνο AOZ ($OZ = OA = \rho$), το ύψος $O\Delta$ είναι και διάμεσος και αν το προεκτείνουμε καταλήγει στο μέσο του τόξου ZA , το σημείο B . Όμοια αποδεικνύεται ότι και το σημείο Γ είναι στο μέσο του τόξου AH .

Επειδή $BZ = \Gamma H$ έχουμε,

- $BZ = \Gamma H$
- $B\Gamma \parallel ZH$ (από γνωστό σχόλιο σχολικού βιβλίου σελ. 129 – σχήμα 5),

άρα το $BGHZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο (προφανώς οι πλευρές BZ και $H\Gamma$ τέμνονται

$$\text{αφού } Z + H = \frac{135^\circ}{2} + \frac{135^\circ}{2} = 135^\circ < 180^\circ).$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4778)

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > B\Gamma$ και $B < 90^\circ$ θεωρούμε σημείο Z στη προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) τέτοιο ώστε $\Gamma Z = B\Gamma$. Αν E είναι σημείο της AB , τέτοιο ώστε $EG = \Gamma B$, να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία BEZ είναι ορθή.

Μονάδες 8

β) Το τετράπλευρο $AE\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 8

γ) Το τετράπλευρο $A\Gamma Z\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 9

Σημείωση: Η άσκηση είχε αφαιρεθεί και προστέθηκε. Στην νέα έκδοση δεν δίνεται το σχήμα.

Λύση

α) Στο τρίγωνο ZEB παρατηρούμε ότι,

$$EG = \Gamma B = \frac{BZ}{2}, \text{ άρα } E = 90^\circ$$

β) Έχουμε,

- $AD = EG (=B\Gamma)$
- $AB \parallel \Gamma\Delta$, άρα και $AE \parallel \Delta\Gamma$
- EG τέμνει τη $B\Gamma$ στο Γ , όμως $B\Gamma \parallel AD$, άρα η EG θα τέμνει και την AD

οπότε το $AE\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Οι απέναντι πλευρές AD και $Z\Gamma$ είναι ίσες και παράλληλες (αφού $Z\Gamma = B\Gamma$), άρα το $A\Gamma Z\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4781)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με AK διχοτόμο της γωνίας A . Στην προέκταση της AK θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει τις $A\Gamma$ και $B\Gamma$ στα E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 6

β) Η EK είναι μεσοκάθετος της AD .

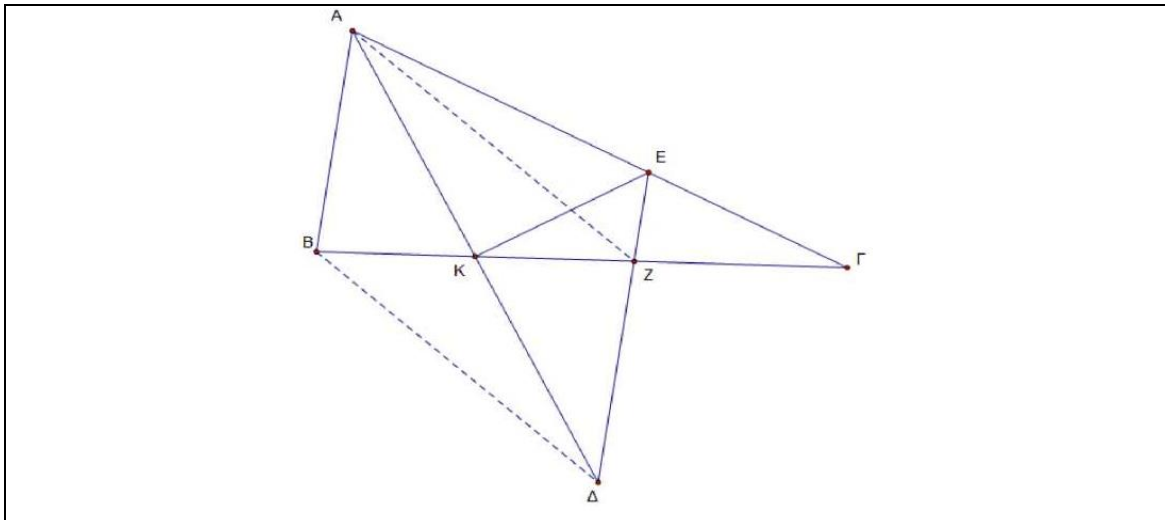
Μονάδες 6

γ) Τα τρίγωνα AKB και $K\Delta Z$ είναι ίσα.

Μονάδες 7

δ) Το τετράπλευρο $AZ\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 6

**Λύση**

α) Έχουμε,

$$\begin{cases} A_1 = \Delta_2 \text{ (εντός εναλλάξ)} \\ A_1 = A_2 \text{ (AK διχοτόμος)} \end{cases} \Rightarrow A_2 = \Delta_2 \Rightarrow \hat{A}E\Delta \text{ ισοσκελές}$$

β) Το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές και το ΕΚ είναι διάμεσος, άρα η ΕΚ είναι μεσοκάθετος της ΑΔ.

γ) Έχουμε $\hat{A}KB = \hat{K}Z\Delta$ γιατί,

- $K_1 = K_2$ (κατακορυφήν)
- $AK = K\Delta$
- $A_1 = \Delta_2$ (ως εντός εναλλάξ)

άρα έχουμε μια πλευρά ίση μία προς μία και τις προσκείμενες γωνίες τους ίσες.

δ) Από την παραπάνω σύγκριση τριγώνων παίρνουμε $AB = Z\Delta$ και $AB \parallel Z\Delta$, άρα έχουμε δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες, οπότε το ΑΖΔΒ είναι παραλληλόγραμμο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4783)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση του ύψους του ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Έστω Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές

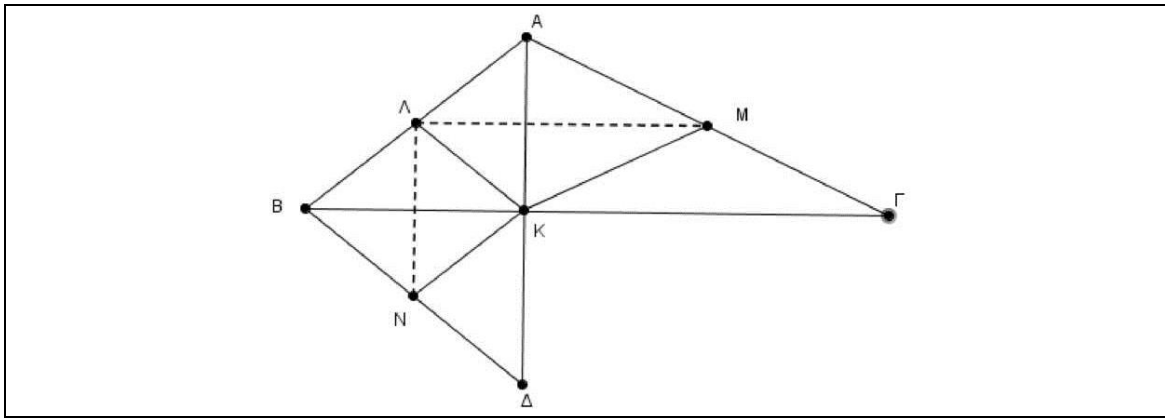
Μονάδες 7

β) Το τετράπλευρο ΒΛΚΝ είναι ρόμβος

Μονάδες 9

γ) $\Lambda M \perp \Lambda N$

Μονάδες 9



Λύση

α) Το ΒΚ είναι μεσοκάθετος του ΑΔ, άρα ΒΑ = ΒΔ.

β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ABK, έχουμε $ΚΛ = \frac{AB}{2}$.

Επίσης από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΔ, έχουμε

$$KN = \frac{B\Delta}{2}, \text{ όμως } AB = B\Delta, \text{ οπότε } K\Lambda = KN.$$

Ακόμα,

$$AB = B\Delta \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{B\Delta}{2} \Rightarrow B\Lambda = BN,$$

άρα όλες οι πλευρές του τετραπλεύρου ΒΛΚΝ είναι ίσες, άρα είναι ρόμβος.

γ) Έχουμε,

$$\left. \begin{array}{l} \Lambda M \parallel B\Gamma \\ AK \perp B\Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow AK \perp \Lambda M \quad (1)$$

Επίσης, $\Lambda N \parallel \Lambda \Delta \parallel \Lambda K \Rightarrow \Lambda N \parallel \Lambda K$ (2), από (1) και (2) έχουμε, $\Lambda N \perp \Lambda M$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4786)

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τις μεσοκαθέτους μ_1, μ_2 των πλευρών του AB και $A\Gamma$, οι οποίες τέμνονται στο μέσο M της $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $A = 90^\circ$

Μονάδες 5

ii. Το τετράπλευρο ΑΔΜΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 7

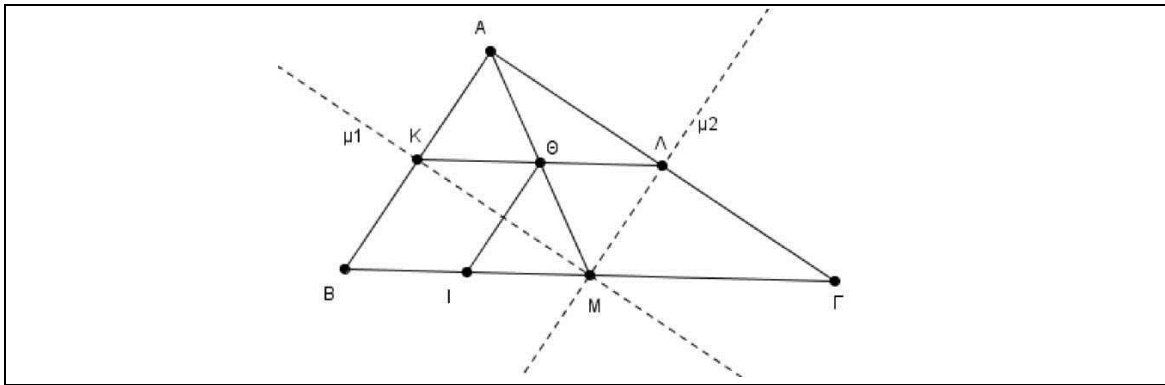
iii. $\Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4}$, όπου Θ το σημείο τομής των AM και $K\Lambda$

Μονάδες 6

β) Αν Ι σημείο της ΒΓ τέτοιο ώστε $BI = \frac{BG}{4}$ να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο

ΚΘΙΒ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 7

**Λύση**

α) i. Από το τρίγωνο ΜΑΒ έχουμε $MA = MB$ (1) . Από το τρίγωνο ΜΑΓ έχουμε $MA = MG$ (2). Από (1) και (2) έχουμε,

$$AM = \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow \angle A = 90^\circ$$

ii. Έχουμε,

$$\begin{cases} KM \parallel A\Gamma \\ KM = \frac{A\Gamma}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} KM \parallel A\Lambda \\ KM = A\Lambda \end{cases} \Rightarrow KMLA \text{ παρ/μο}$$

όμως η γωνία Α είναι ορθή, οπότε το ΚΜΛΑ είναι ορθογώνιο.

iii. Έχουμε,

$$\Lambda\Theta = \frac{K\Lambda}{2} = \frac{AM}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$$

αφού το ΑΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

β) Έχουμε,

$$\left\{ K\Theta \parallel BM \text{ και } K\Theta = \frac{BM}{2} \right\} \Rightarrow \left\{ K\Theta \parallel BI \text{ και } K\Theta = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4} = BI \right\} \Rightarrow K\Theta IB \text{ παρ/μο}$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4788)

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma = 4AB$ και $B\Gamma = 2AB$. Θεωρούμε σημείο Ζ της ΓΔ, ώστε $\Delta Z = AB$. Αν η γωνία Γ είναι 60° και ΒΕ το ύψος του τραpezίου, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

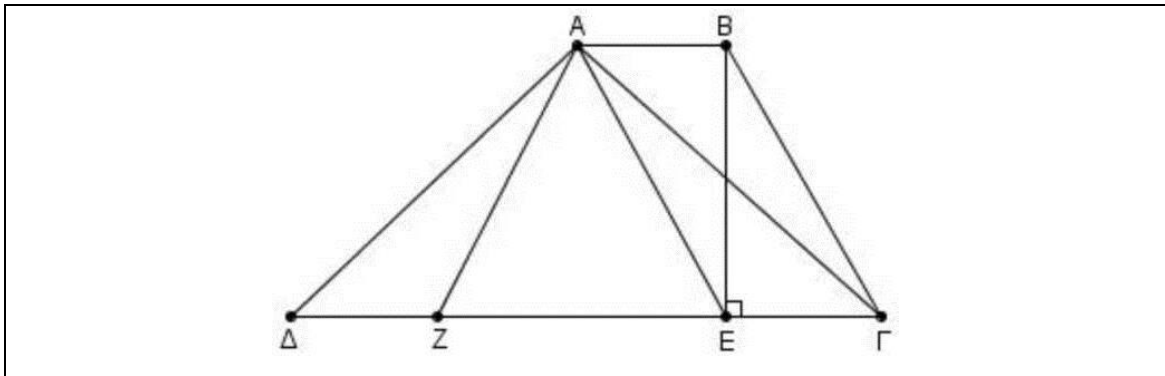
Μονάδες 8

β) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 8

γ) Τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΓΑΕ είναι ίσα.

Μονάδες 9

**Λύση**

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο BEΓ, έχουμε,

$$\Gamma = 60^\circ \Rightarrow \angle B_1 = 30^\circ \Rightarrow EG = \frac{BG}{2} \Rightarrow EG = AB \xRightarrow{EG \parallel AB} ABGE \text{ παραμ.}$$

β) Αν $AB = \Delta Z = EG = x$, τότε $AE = BG = 2AB = 2x$. Όμως

$$\Delta\Gamma = \Delta Z + ZE + EG \Rightarrow 4AB = x + ZE + x \Rightarrow 4x = 2x + ZE \Rightarrow ZE = 2x,$$

άρα $ZE = AE$, δηλαδή το τρίγωνο AZE είναι ισοσκελές και επειδή η γωνία AEZ είναι 60° (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AE, BG με τεμνόμενη την EG), το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

γ) Έχουμε, $\triangle AZ = \triangle AE$ γιατί

- $AZ = AE = 2x$
- $\angle ZA = \angle EG = 120^\circ$ γιατί $\angle AEG = \angle ABG = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$
- $\angle Z = \angle G$

έχουμε δύο πλευρές ίσες και την περιεχόμενη γωνία ίση.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4790)

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ABΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AD = BG = AB$. Φέρουμε τα τμήματα AE και BZ κάθετα στις διαγώνιες BA και AG αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Z και E είναι μέσα των διαγώνιων AG και BA αντίστοιχα.

Μονάδες 5

β) $AE = BZ$

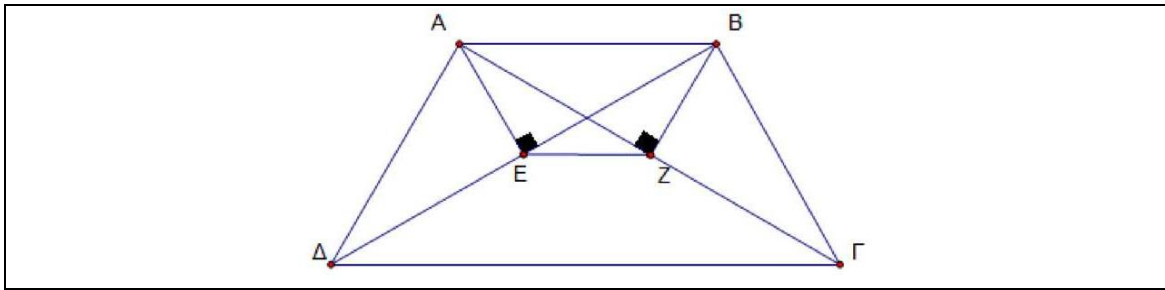
Μονάδες 8

γ) Το τετράπλευρο AEZB είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 7

δ) Η BA είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.

Μονάδες 5

**Λύση**

α) Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές ενώ το ΑΕ είναι ύψος, άρα είναι και διάμεσος, δηλαδή Ε μέσο του ΒΔ. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές ενώ το ΒΖ είναι ύψος, άρα και διάμεσος, δηλαδή Ζ μέσο του ΑΓ.

β) Έχουμε, $\hat{ΕΑΒ} = \hat{ΒΖΑ}$ γιατί

- $\hat{Ε} = \hat{Ζ} = 90^\circ$
- $ΑΒ = ΑΒ$ (κοινή πλευρά)
- $ΕΒ = ΖΑ$ (αφού $\hat{ΔΒ} = \hat{ΑΓ} \Rightarrow \frac{\hat{ΔΒ}}{2} = \frac{\hat{ΑΓ}}{2} \Rightarrow ΕΒ = ΖΑ$)

άρα $ΑΕ = ΒΖ$.

γ) Έχουμε $ΑΕ = ΒΖ$. Επίσης τα Ε, Ζ ενώνουν τα μέσα των διαγώνιων του τραπέζιου ΑΒΓΔ, άρα

$$ΕΖ \parallel ΑΒ \left(= \frac{\hat{ΓΔ} - \hat{ΑΒ}}{2} \right)$$

Τέλος, αφού οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται, θα τέμνονται και τα κάθετα τμήματά τους, δηλαδή το ΑΕ και ΒΖ. Επομένως το ΑΕΖΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

δ) Έχουμε,

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1 \text{ (εντός εναλλάξ)} \\ \hat{\Delta}_2 = \hat{B}_1 \text{ (ισοσκελές)} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 \Rightarrow ΒΔ \text{ διχοτόμος της γωνίας } \Delta$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4791)

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην ΑΓ στο κέντρο του Ο, αυτή τέμνει την προέκταση της ΑΔ σε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\hat{\Delta Ε} = \hat{\Delta Α}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές.

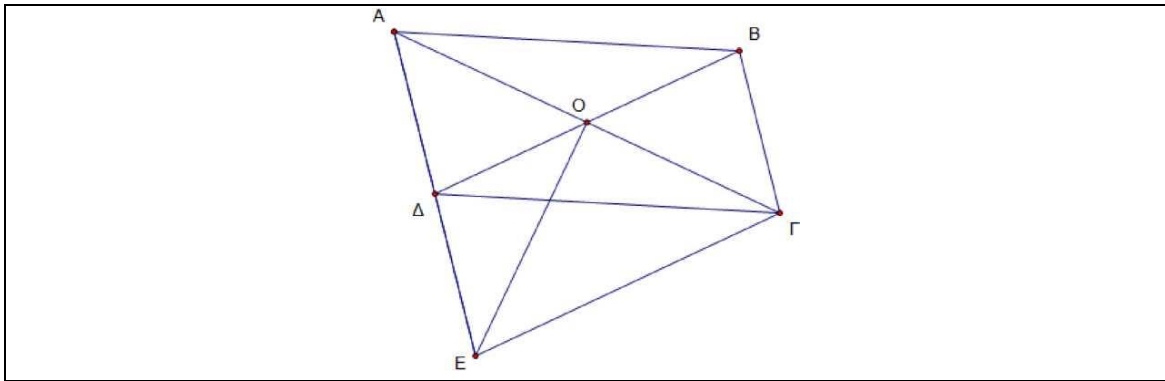
Μονάδες 7

β) Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 9

γ) Το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 9

**Λύση**

α) Παρατηρούμε ότι η ΕΟ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ, άρα το Ε ισαπέχει από τα άκρα του ΑΓ, δηλαδή $EA = EG$, οπότε το ΕΑΓ είναι ισοσκελές.

β) Έχουμε, $EA = AD$ (δεδομένα), όμως $AD = BG$ (παρ/μο ΑΒΓΔ), άρα το ΕΔ είναι ίσο και παράλληλο με το ΒΓ, οπότε το τετράπλευρο ΔΒΓΕ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΕ έχουμε ότι η ΟΔ είναι διάμεσος, άρα

$$OD = \frac{AE}{2} = AD \quad (1)$$

Αρκεί να δείξουμε $BO = BG$.

Παίρνουμε το α' μέλος της ζητούμενης σχέσης,

$$BO \stackrel{\text{Ο:μέσο ΒΔ}}{=} OD \stackrel{(1)}{=} AD = BG$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4792)

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $ΓΔ = BG$. Αν Μ, Κ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΛ.

Μονάδες 7

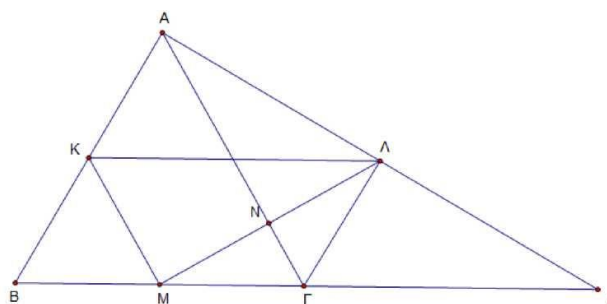
β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή.

Μονάδες 8

ii. Το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 10



Λύση

α) Επειδή $ΒΓ = ΓΔ$ (από τα δεδομένα) και $ΑΓ = ΒΓ$ (από ισόπλευρο $ΑΒΓ$), έχουμε $ΑΓ = ΓΔ$, δηλαδή το $ΑΓΔ$ είναι ισοσκελές.

Οπότε,

$$ΑΓΔ = Γ_{\varepsilon\zeta} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \quad \text{και} \quad \angle A_1 = \angle A = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

β) i. Προφανώς η $ΚΛ$ είναι παράλληλη με την $ΒΔ$, άρα και με την $ΜΓ$, αφού τα $Κ, Λ$ ενώνουν τα μέσα των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΔ$ αντίστοιχα.

Επίσης,

$$ΚΛ = \frac{ΒΔ}{2} = \frac{2ΒΓ}{2} = ΒΓ = 2ΜΓ$$

Θα δείξουμε ότι $ΚΜ = ΛΓ$

Τα $Κ$ και $Μ$ ενώνουν τα μέσα των πλευρών $ΒΑ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα, άρα

$$ΚΜ \parallel ΑΓ \quad \text{και} \quad ΚΜ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΑΒ}{2} \quad (1)$$

Επίσης, τα $Λ, Γ$ ενώνουν τα μέσα των πλευρών $ΔΑ$ και $ΔΒ$ αντίστοιχα, άρα

$$ΛΓ \parallel ΑΒ \quad \text{και} \quad ΛΓ = \frac{ΑΒ}{2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έπεται το ζητούμενο.

Τέλος θα δείξουμε ότι οι πλευρές $ΚΜ$ και $ΛΓ$ τέμνονται.

Η $ΛΓ$ τέμνει την $ΑΓ$ στο $Γ$, άρα θα τέμνει και την παράλληλη της $ΑΓ$ δηλαδή την $ΚΜ$.

Οπότε το $ΚΛΓΜ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ii. Το τρίγωνο $ΓΛΔ$ είναι ορθογώνιο (αφού το τρίγωνο $ΑΓΔ$ είναι ισοσκελές και $Λ$ μέσο του $ΑΔ$, άρα και ύψος) με $\angle Δ = 30^\circ$, άρα $\angle ΓΛΔ = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Επομένως,

$$\angle ΑΓΛ = 180^\circ - \angle ΑΓΒ - \angle ΓΛΔ = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ \quad (\text{δηλαδή η γωνία } \Gamma \text{ τριχοτομείται})$$

Επίσης, το τρίγωνο $ΛΓΜ$ είναι ισοσκελές, γιατί

$$\angle ΑΓ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΓ$$

οπότε η διχοτόμος $ΓΝ$ είναι και ύψος, δηλαδή $\angle Ν = 90^\circ$.

Τελικά,

$$ΚΜ \parallel ΑΓ, \quad \text{όμως} \quad \angle Ν \perp ΑΓ \Rightarrow \angle Ν \perp ΚΜ$$

άρα το τρίγωνο $ΚΜΛ$ είναι ορθογώνιο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4795)

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Με βάση την $ΑΒ$ κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο $ΑΔΒ$, εκτός του τριγώνου $ΑΒΓ$, με γωνία $\angle Δ = 120^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα $Ζ$ και $Η$ των πλευρών $ΑΔ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι η $ΔΓ$ είναι μεσοκάθετος του $ΑΒ$.

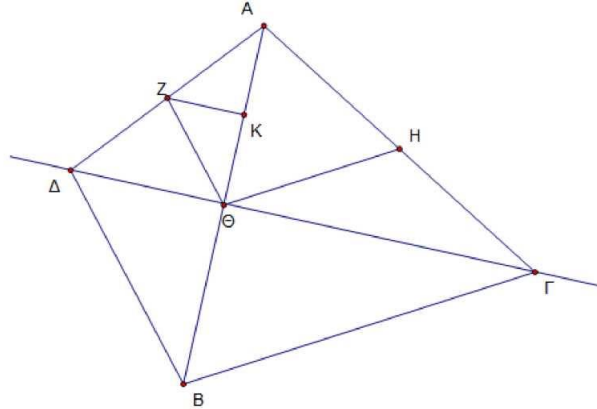
Μονάδες 8

β) Αν η ΔΓ τέμνει την ΑΒ στο Θ, να αποδείξετε ότι η γωνία ΖΘΗ είναι ορθή.

Μονάδες 9

γ) Αν η ΖΚ είναι κάθετη στην ΑΒ από το σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι $ZK = \frac{A\Delta}{4}$

Μονάδες 8

**Λύση**

α) Το Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ (αφού το Δ ισαπέχει από τα Α και Β), επίσης το Γ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ (αφού το Γ ισαπέχει από τα Α και Β), οπότε η ΓΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.

β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΘ έχουμε,

$$\Theta Z = \frac{A\Delta}{2} = AZ$$

άρα το ΘΖΑ είναι ισοσκελές τρίγωνο, οπότε $\Theta_1 = A_2 = 30^\circ$

Επίσης, $\Theta_2 = B_1 = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τ' αυτά των παραλλήλων ΘΗ και ΒΓ. Επομένως,

$$Z\Theta H = \Theta_1 + \Theta_2 = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$$

γ) Αρχικά $ZK \parallel \Delta\Theta$, ως κάθετα τμήματα στην ίδια ευθεία.

Επίσης, από το μέσο Ζ φέρουμε παράλληλη προς την ΔΘ, τέμνει την πλευρά ΑΘ στο Κ που είναι μέσο του, άρα

$$ZK = \frac{\Delta\Theta}{2} \quad (1)$$

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΘΔΑ έχουμε $A_2 = 30^\circ$ οπότε: $\Delta\Theta = \frac{A\Delta}{2} \quad (2)$

$$\text{Από (1) και (2) έχουμε, } ZK = \frac{\frac{A\Delta}{2}}{2} = \frac{A\Delta}{4}$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4796)

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η $A\Gamma$ είναι κάθετη στην $A\Delta$ και η $B\Delta$ είναι κάθετη στην $B\Gamma$. Θεωρούμε τα μέσα M , E και Z των $\Gamma\Delta$, $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $ME = MZ$

Μονάδες 6

β) Η MZ είναι κάθετη στην $A\Gamma$

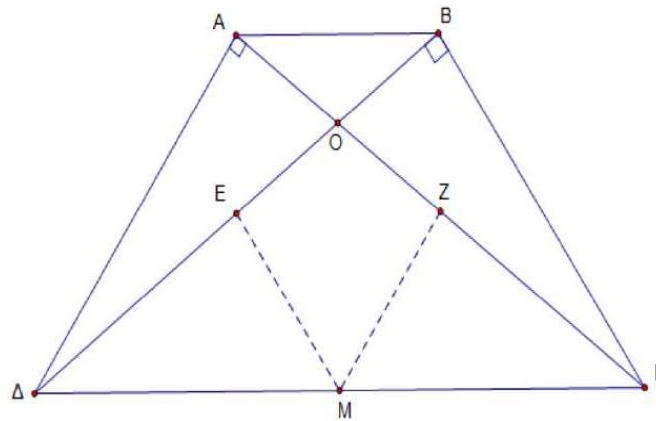
Μονάδες 6

γ) Τα τρίγωνα $M\Delta E$ και $MZ\Gamma$ είναι ίσα.

Μονάδες 7

δ) Η OM είναι μεσοκάθετος του EZ .

Μονάδες 6



Λύση

α) Από το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ έχουμε, $ME \parallel B\Gamma$ και $ME = \frac{B\Gamma}{2}$, αφού τα E , M ενώνουν τα μέσα των πλευρών του τριγώνου.

Και από το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ έχουμε, $MZ \parallel A\Delta$ και $MZ = \frac{A\Delta}{2}$, αφού τα Z , M ενώνουν τα μέσα των πλευρών του τριγώνου.

Όμως $B\Gamma = A\Delta$, από ισοσκελές τραπέζιο, οπότε $ME = MZ$

β) Επειδή $MZ \parallel \Delta A$ και η $A\Gamma$ είναι κάθετη στην $A\Delta$, τότε και $A\Gamma$ κάθετη στη MZ .

γ) Έχουμε,

$\triangle M\Delta E = \triangle MZ\Gamma$ γιατί,

- $ME = MZ$
- $\Delta E = \Gamma Z$ (ως μισά των ίσων διαγωνίων ισοσκελούς τραπέζιου)
- $M\Delta = M\Gamma$ (M μέσο)

δ) Από την προηγούμενη σύγκριση τριγώνων έχουμε ότι οι γωνίες $O\Delta\Gamma$ και $O\Gamma\Delta$ είναι ίσες, άρα το τρίγωνο $O\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές με OM διάμεσος, άρα θα είναι και μεσοκάθετος.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4797)

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ , E και M των AB , AG και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Στην προέκταση του $M\Delta$ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα $\Delta Z = \Delta M$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $BM\Delta$ είναι ίσα.

Μονάδες 6

β) Το τετράπλευρο $ZA\Gamma M$ είναι παραλληλόγραμμο.

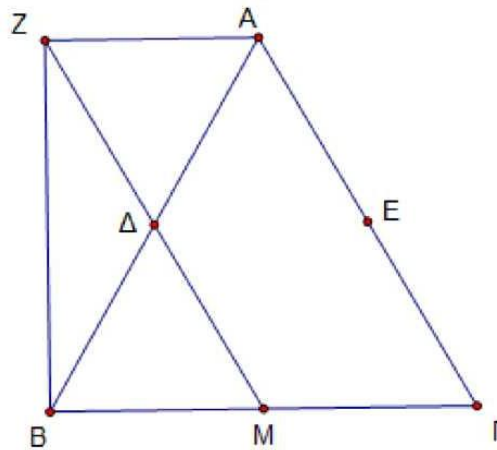
Μονάδες 6

γ) Τα τμήματα ZE και $A\Delta$ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.

Μονάδες 7

δ) Η BZ είναι κάθετη στη ZA .

Μονάδες 6



Λύση

α) Έχουμε,

$$\overset{\Delta}{AZ\Delta} = \overset{\Delta}{BM\Delta} \text{ γιατί}$$

- $B\Delta = \Delta A$ (Δ μέσο)
- $\Delta M = \Delta Z$ (δεδομένο)
- $\Delta_1 = \Delta_2$ (κατακορυφήν)

β) Από την προηγούμενη σύγκριση έχουμε $AZ = BM$, άρα και $M\Gamma = AZ$.

Επίσης $M_1 = Z_1$, δηλαδή οι εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, άρα $AZ \parallel B\Gamma$, οπότε έχουμε δύο πλευρές $M\Gamma$, AZ ίσες και παράλληλες, άρα το $ZA\Gamma M$ είναι παρ/μο.

γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι το $ZAE\Delta$ είναι ρόμβος.

Έχουμε,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta E \parallel B\Gamma \\ \Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta E \parallel M\Gamma \\ \Delta E = M\Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta E \parallel ZA \\ \Delta E = ZA \end{array} \right\} \Rightarrow ZAE\Delta \text{ παρ/μο}$$

όμως $\Delta E = M\Gamma = E\Gamma = \Delta E$, άρα δύο διαδοχικές πλευρές του παρ/μου είναι ίσες, άρα το $ZAE\Delta$ είναι ρόμβος και τα τμήματα ZE και $A\Delta$ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.

δ) Το ZAMB είναι αρχικά παρ/μο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Όμως,

$A_1 = \angle B\Gamma = 60^\circ$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ZA και BΓ με τεμνόμενη την AB)

και $BAM = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$, άρα $ZAM = A_1 + BAM = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, οπότε το ZAMB είναι

ορθογώνιο, άρα η BZ είναι κάθετη στη ZA.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4798)

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $AB < AG$. Φέρνουμε τμήμα BΔ κάθετο στην AB και με $B\Delta = AG$ και τμήμα ΓΕ κάθετο στην AG με $GE = AB$. Θεωρούμε τα μέσα Z και Θ των AΔ και AΕ καθώς και τη διχοτόμο Aδ της γωνία ΔΑΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = AE$

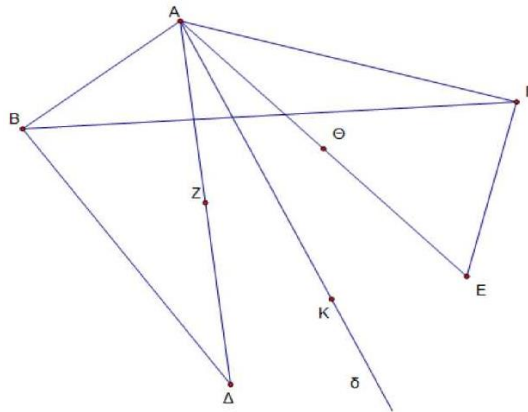
Μονάδες 9

β) Αν K τυχαίο σημείο της διχοτόμου Aδ, να αποδείξετε ότι το K ισαπέχει από τα μέσα Z και Θ.

Μονάδες 9

γ) Αν το K είναι σημείο της διχοτόμου Aδ τέτοιο ώστε $KZ = AZ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο AZKΘ είναι ρόμβος.

Μονάδες 7



Λύση

α) Έχουμε,

$$\triangle AB\Delta = \triangle AG\Gamma \text{ γιατί,}$$

- $\angle B = \angle \Gamma = 90^\circ$
- $AB = \Gamma E$
- $B\Delta = AG$

άρα $A\Delta = AE$.

β) Θα δείξουμε $KZ = K\Theta$.

Έχουμε,

$$\triangle AZK = \triangle AK\Theta \text{ γιατί}$$

- $AZ = A\Theta$ (ως μισά ίσων πλευρών)
- $AK = AK$ (κοινή πλευρά)

$$\bullet \quad A_1 = A_2$$

άρα $KZ = K\Theta$.

γ) Έχουμε, $\Theta K = KZ = AZ$, όμως $AZ = A\Theta$ από την σύγκριση των τριγώνων AZK και $A\Theta K$, οπότε το τετράπλευρο $AZK\Theta$ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, άρα είναι ρόμβος.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4801)

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\angle A = 120^\circ$. Φέρουμε ημιευθεία Ax κάθετη στην $A\Gamma$ στο A , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ . Έστω Λ το μέσο του AB και K το μέσο του $\Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 8

β) $\Delta\Gamma = 2BA$

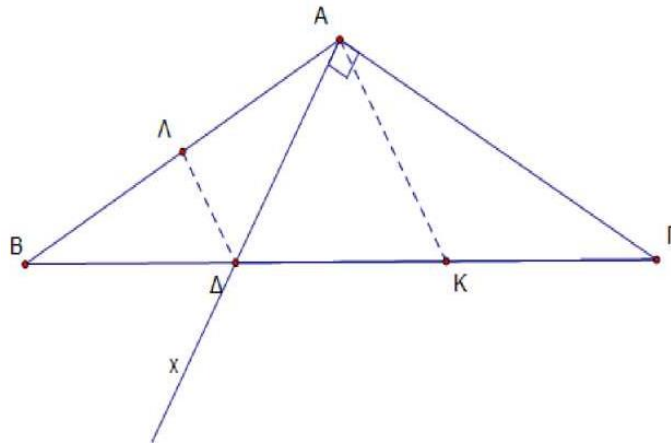
Μονάδες 8

γ) $\Lambda\Delta \parallel AK$

Μονάδες 5

δ) $AK = 2\Lambda\Delta$

Μονάδες 4



Λύση

α) Επειδή το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές έχουμε

$$B = \Gamma = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

Οπότε,

$$\angle B\Lambda\Delta = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ = B$$

άρα το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές.

β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ έχουμε $\Gamma = 30^\circ$, άρα

$$\Lambda\Delta = \frac{\Delta\Gamma}{2} \Rightarrow \Delta\Gamma = 2\Lambda\Delta \Rightarrow \Delta\Gamma = 2BA$$

γ) Θα δείξουμε ότι το Δ είναι μέσο του BK .

Έχουμε,

$$\Delta\Gamma = 2B\Delta \Rightarrow 2\Delta K = 2B\Delta \Rightarrow K\Delta = \Delta B$$

Επομένως στο τρίγωνο ΒΑΚ έχουμε Λ, Δ μέσα των πλευρών ΒΑ, ΒΚ αντίστοιχα, άρα

$$\Lambda\Delta // AK \text{ και } \Lambda\Delta = \frac{AK}{2} \quad (1)$$

δ) Από τη σχέση (1) έχουμε,

$$\Lambda\Delta = \frac{AK}{2} \Rightarrow AK = 2\Lambda\Delta$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4802)

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$ και $B = 60^\circ$. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Τα σημεία Μ και Κ είναι τα μέσα των ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΓΛ είναι κάθετο στη διχοτόμο Βδ να αποδείξετε:

α) Το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 6

β) Το τετράπλευρο ΑΜΚΖ είναι ρόμβος.

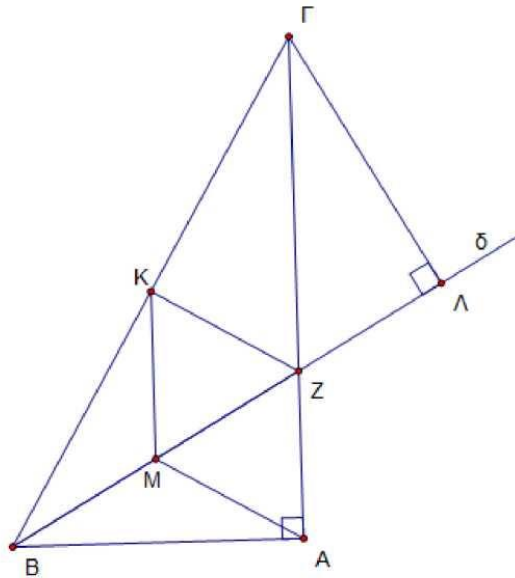
Μονάδες 6

γ) $\Gamma Z = 2ZA$

Μονάδες 7

δ) $BA = AG$

Μονάδες 6



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε,

$$\Gamma_1 + B = 90^\circ \Rightarrow \Gamma_1 = 90^\circ - 60^\circ \Rightarrow \Gamma_1 = 30^\circ$$

Όμως η ΒΖ είναι διχοτόμος, άρα $B_1 = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ = \Gamma_1$, δηλαδή το ΒΖΓ είναι ισοσκελές τρίγωνο.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABZ έχουμε, $AM = \frac{BZ}{2} = MZ$ (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABZ έχουμε $B_2 = 30^\circ$, άρα $AZ = \frac{BZ}{2} = MZ$ (2)

Επίσης, στο ορθογώνιο τρίγωνο KBZ έχουμε $B_1 = 30^\circ$, άρα $KZ = \frac{BZ}{2} = MZ$ (3)

Τέλος το τρίγωνο KMB είναι ισοσκελές, αφού $B_1 = 30^\circ$ και $BKM = \Gamma_1 = 30^\circ$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων KM και ΓZ με τεμνόμενη ΒΓ. Επομένως $BM = KM$, άρα και $MZ = KM$ (4).

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) και (4) το τετράπλευρο KZAM έχει όλες τις πλευρές του ίσες, άρα είναι ρόμβος.

γ) Έχουμε, $\Gamma Z = BZ = 2MZ = 2AZ$

δ) Επειδή $BZ = Z\Gamma$, θα δείξουμε ότι $Z\Lambda = ZA$.

Τα τρίγωνα ΓZΛ, ZBA είναι ίσα, γιατί

- $A = \Lambda = 90^\circ$
- $Z_2 = Z_1$ (κατακορυφήν)
- $BZ = Z\Gamma$

άρα $Z\Lambda = ZA$, οπότε $B\Lambda = A\Gamma$, ως άθροισμα ίσων τμημάτων.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4803)

Έστω τρίγωνο ABΓ με διάμεσο AM τέτοια ώστε $AM=AB$. Φέρουμε το ύψος του AK και το προεκτείνουμε (προς το K) κατά τμήμα $K\Delta = AK$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά τμήμα $ME=AM$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E \perp A\Delta$ και $\Delta E = 2KM$

Μονάδες 7

β) Το τετράπλευρο ABEΓ είναι παραλληλόγραμμο.

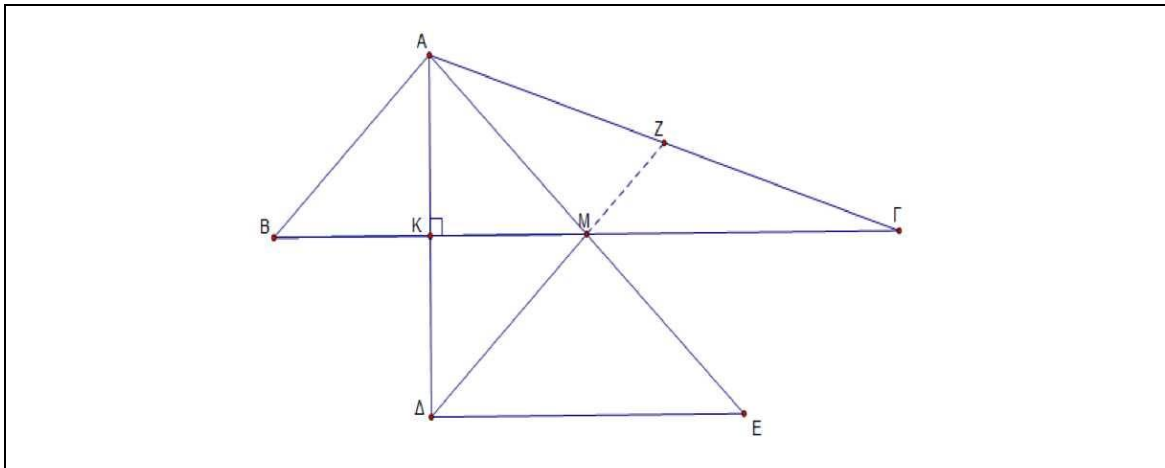
Μονάδες 6

γ) Το τετράπλευρο ABAM είναι ρόμβος.

Μονάδες 6

δ) Η προέκταση της ΔM τέμνει το ΑΓ στο μέσον του Z.

Μονάδες 6

**Λύση**

α) Στο τρίγωνο AΔΕ έχουμε K, M μέσα των πλευρών AΔ και AΕ αντίστοιχα, άρα

$$KM \parallel \Delta E \text{ και } KM = \frac{\Delta E}{2} \Rightarrow \Delta E = 2KM$$

οπότε $\Delta = K = 90^\circ$, ως εντός εκτός και επί τ' αυτά, δηλαδή $\Delta E \perp A\Delta$

β) Οι διαγώνιοι του ABEG διχοτομούνται, άρα είναι παρ/μο.

γ) Το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές (αφού $AM = AB$) με AK ύψος, άρα AK διάμεσος. Επομένως οι διαγώνιες του AMΔB διχοτομούνται, άρα είναι παρ/μο και επειδή τέμνονται κάθετα είναι ρόμβος.

δ) Έχουμε,

$$\begin{cases} \Delta M \parallel AB \\ AB \parallel E\Gamma \end{cases} \Rightarrow \Delta M \parallel E\Gamma \Rightarrow MZ \parallel E\Gamma$$

Στο τρίγωνο AΕΓ έχουμε $MZ \parallel E\Gamma$ και M μέσο του AΕ, άρα και το Z είναι μέσο του AΓ.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4804)

Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο $KL = 2\rho$. Έστω A σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα OA να είναι κάθετη στην KL. Φέρουμε τις χορδές $AB = A\Gamma = \rho$. Έστω Δ και E τα σημεία τομής των προεκτάσεων των AB και AΓ αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου KL.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία BΑΓ είναι 120°

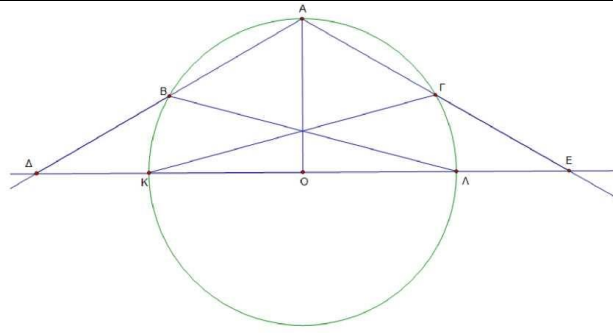
Μονάδες 7

β) Τα σημεία B και Γ είναι μέσα των AΔ και AΕ αντίστοιχα.

Μονάδες 9

γ) $K\Gamma = \Lambda B$.

Μονάδες 9



Προσοχή: Οι επίσημες εκφωνήσεις έχουν **ΑΓ**, αντί του σωστού που είναι **ΑΕ**

Λύση

α) Το τρίγωνο ABO είναι ισόπλευρο, αφού $AB = BO = AO = \rho$, οπότε όλες οι γωνίες του είναι 60° , οπότε $\angle A_1 = 60^\circ$. Όμοια το τρίγωνο AOG είναι ισόπλευρο, άρα $\angle A_2 = 60^\circ$. Επομένως η γωνία BAG είναι 120°

β) Στο τρίγωνο BAO έχουμε,

$$\angle BOA = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \text{ και } \angle ABO = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

οπότε $\angle A = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Επομένως $AB = BO = \rho = AB$, δηλαδή το B είναι μέσο του ΔΑ.

γ) Θα αποδείξουμε ότι το BΓΛΚ είναι ισοσκελές τραπέζιο, άρα οι διαγώνιες ίσες.

Από το τρίγωνο ADE, τα B, Γ ενώνουν τα μέσα των πλευρών AD και AE αντίστοιχα,

$$BG \parallel DE \text{ άρα } BG \parallel KL$$

Από γνωστό πόρισμα (σχ. βιβλίο πόρισμα iii /σελ. 129) συμπεραίνουμε εύκολα ότι τα τόξα που περιέχονται μεταξύ παράλληλων χορδών είναι ίσα, άρα

$$BK = GL \Rightarrow BK = GL$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4808)

Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα ABΓ ($AB=AG$) και ABA ($BA=BA$), τέτοια ώστε οι πλευρές τους AG και BA να τέμνονται κάθετα στο σημείο E, όπως φαίνεται σχήμα. Τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων AL και BG αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $EL=EG$

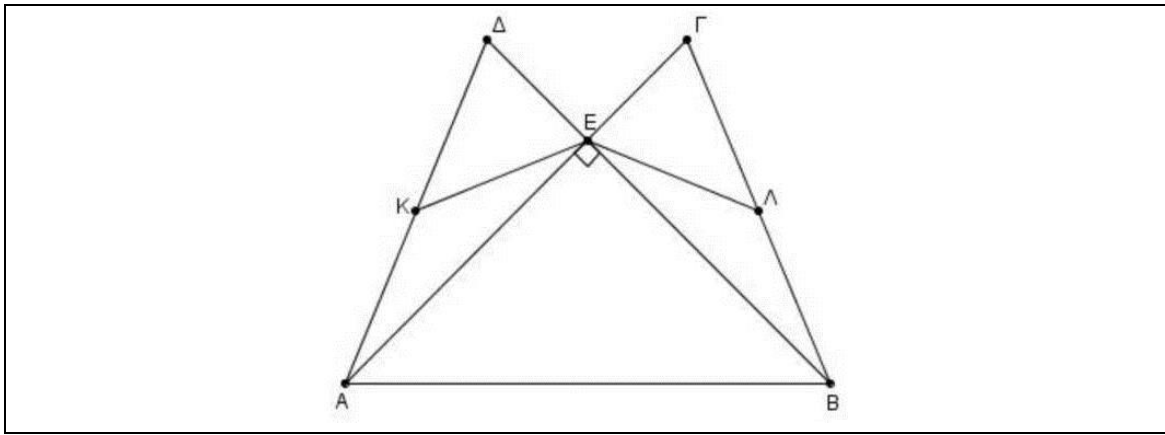
Μονάδες 7

β) $AG \parallel AB$

Μονάδες 8

γ) Το τρίγωνο EKL είναι ισοσκελές και $KL \parallel AB$

Μονάδες 10

**Λύση**

α) Από τα δεδομένα έχουμε $AB = BΔ$ και $AB = AΓ$, άρα $BΔ = AΓ$.

Έχουμε, $\triangle AAB \cong \triangle AAB$ γιατί,

- $AA = BΓ$
- $BΔ = AΓ$
- $AB = AB$

οπότε $ABΔ \cong AAB \Rightarrow EA = EB$

Από διαφορά ίσων τμημάτων έχουμε, $EA = EB$

β) Έχουμε, $\angle A_1 = \angle B_1 = 45^\circ$ δηλαδή οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες, άρα $ΔΓ \parallel AB$

γ) Από τα ορθογώνια τρίγωνα $AEΔ$ και $EΓB$ έχουμε,

$$EK = \frac{AΔ}{2} \text{ και } EL = \frac{BΓ}{2}$$

όμως $AΔ = BΓ$, άρα $EK = EL$, δηλαδή το τρίγωνο EKL είναι ισοσκελές.

Θα δείξουμε ότι $KΛ \parallel AB$

Το $ABΓΔ$ είναι (ισοσκελές) τραπέζιο, αφού $ΔΓ \parallel AB$.

Το ευθύγραμμο $KΛ$ είναι διάμεσος τραπεζίου, αφού ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών, οπότε είναι παράλληλο στις βάσεις του, άρα $KΛ \parallel AB$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4810)

Έστω παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ με O το σημείο τομής των διαγωνίων του και K το μέσο του $ΓΔ$. Προεκτείνουμε το τμήμα OK κατά τμήμα $KZ = KO$. Η BZ τέμνει τη διαγώνιο $AΓ$ στο Θ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα OG και BZ διχοτομούνται.

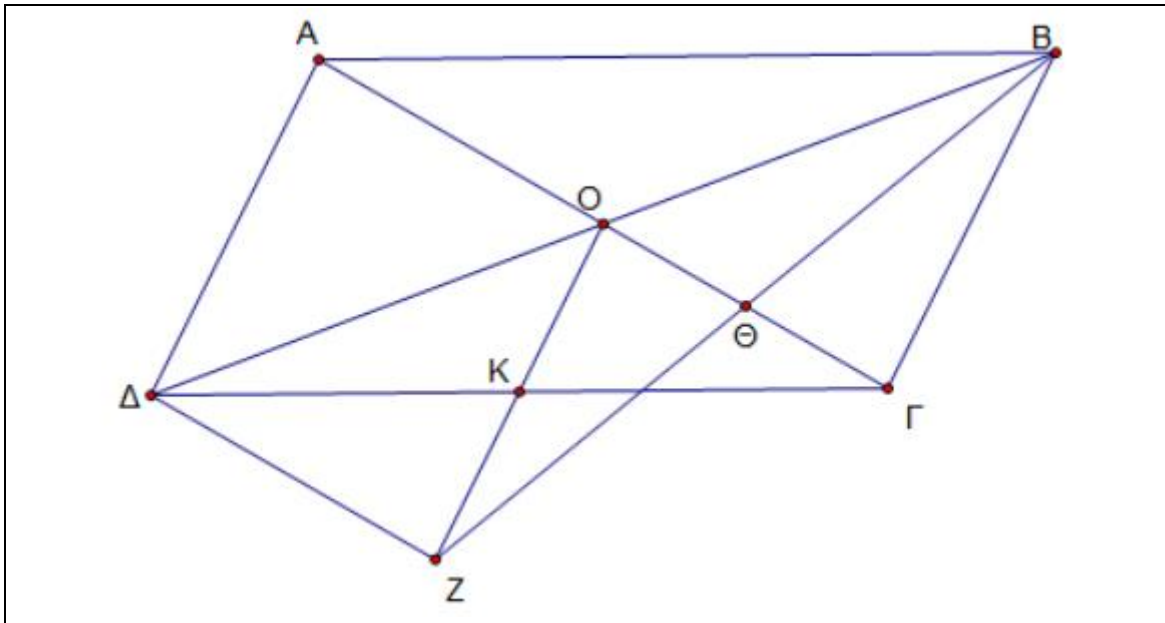
(Μονάδες 8)

β) $AO = ΔZ$.

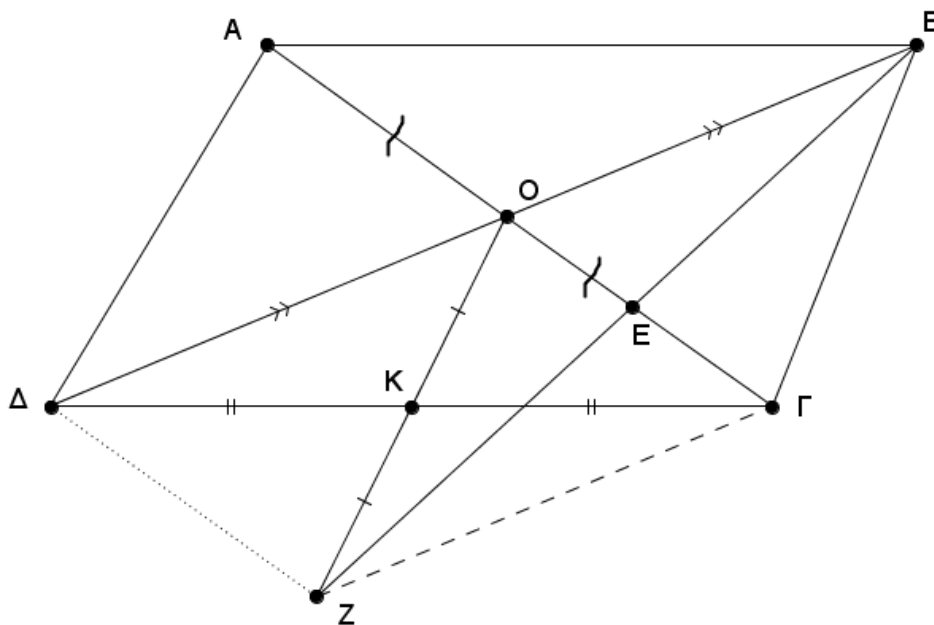
(Μονάδες 9)

γ) Τα τρίγωνα AOB και $ΔZΓ$ είναι ίσα.

(Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

α) Αρκεί να δείξουμε ότι το τετράπλευρο OBΓZ είναι παραλληλόγραμμο.



1^{ος} τρόπος:

Για το τετράπλευρο OΓZΔ ισχύουν

- $OK = KZ$ (δεδομένα)
- $ΔK = KΓ$ (δεδομένα)

δηλαδή, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και επομένως είναι παραλληλόγραμμο.

Άρα, $ΓZ \parallel OΔ \overset{ΔO=OB}{\Rightarrow} ΓZ \parallel OB \Rightarrow$ το OBΓZ είναι παραλληλόγραμμο και επομένως οι διαγώνιοί του OΓ και BZ διχοτομούνται.

2^{ος} τρόπος (mathematica):

- K μέσο ΓΔ (δεδομένα)
- O μέσο AG (οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομούνται)

Αρα $KO \parallel \frac{A\Delta}{2} = \frac{B\Gamma}{2} \stackrel{KO=KZ}{\Rightarrow} OZ \parallel B\Gamma \Rightarrow$ ΟΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμο και επομένως οι διαγώνιοί του ΟΓ και ΒΖ διχοτομούνται.

β) 1^{ος} τρόπος:

$$AO \stackrel{AB\Gamma\Delta\#}{=} O\Gamma \stackrel{ΟΓΖ\Delta\#}{=} \Delta Z \Rightarrow AO = \Delta Z$$

2^{ος} τρόπος (**mathematica**):

$OZ \parallel A\Delta \Rightarrow$ ΟΑΔΖ είναι παραλληλόγραμμο και επομένως $AO = \Delta Z$.

γ) Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΖΓ είναι ίσα λόγω κριτηρίου Π-Π-Π, καθώς:

- 1) $AB = \Gamma\Delta$ (ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο)
- 2) $AO = \Delta Z$ (από το β) ερώτημα)
- 3) $OB = \Gamma Z$ (ΟΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμο)

ΑΣΚΗΣΗ (4_4812)

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$. Προεκτείνουμε το ΒΓ (προς το Γ) κατά τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Φέρουμε τις διαμέσους ΑΕ και ΓΖ του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ που τέμνονται στο Θ. Το ΒΘ προεκτεινόμενο, τέμνει το ΑΓ στο Κ και το ΑΔ στο Η. Να αποδείξετε ότι:

α) Το ΖΚΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

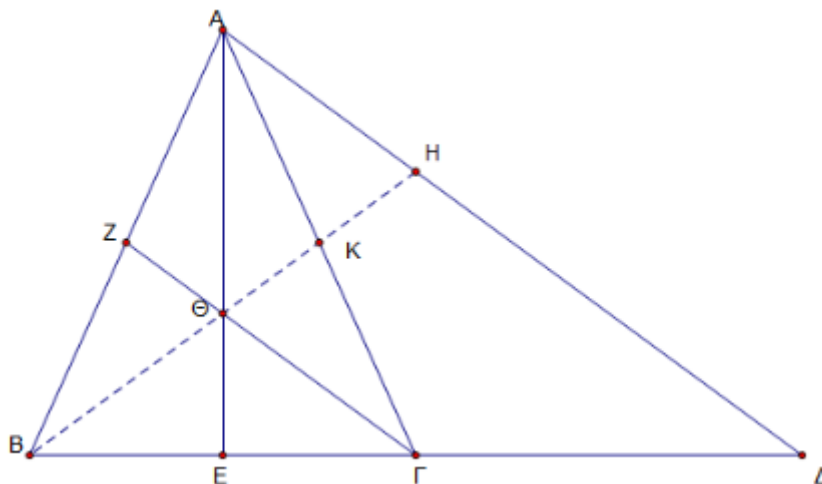
(Μονάδες 9)

β) $AH = \Theta\Gamma$.

(Μονάδες 9)

γ) $AH = 2Z\Theta$.

(Μονάδες 7)

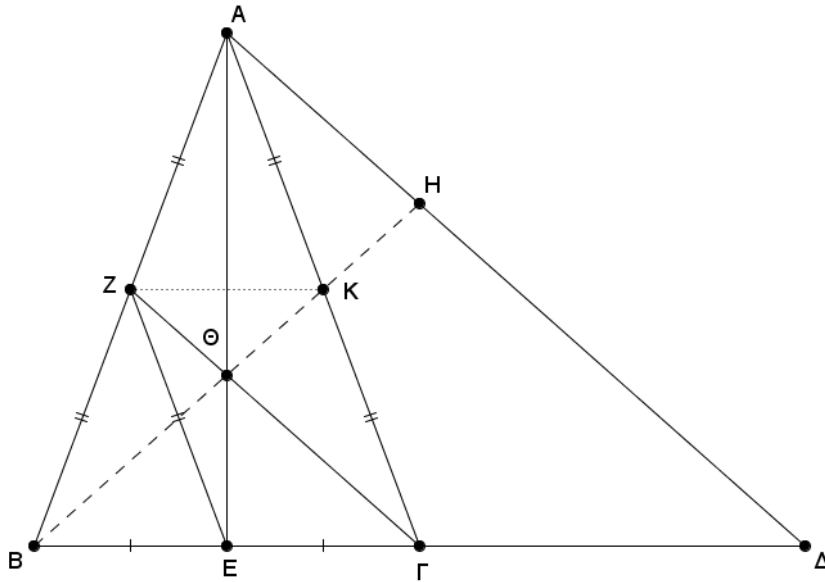


Σχόλιο: η προσθήκη της παρένθεσης (προς το Γ) είναι περιττή, σύμφωνα με και με το σχόλιο του σχολικού βιβλίου στο 2^ο κεφάλαιο.

ΛΥΣΗ

α) ΑΕ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, άρα Ε μέσον της ΒΓ (1)

ΓΖ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, άρα Ζ μέσον της ΑΒ (2)



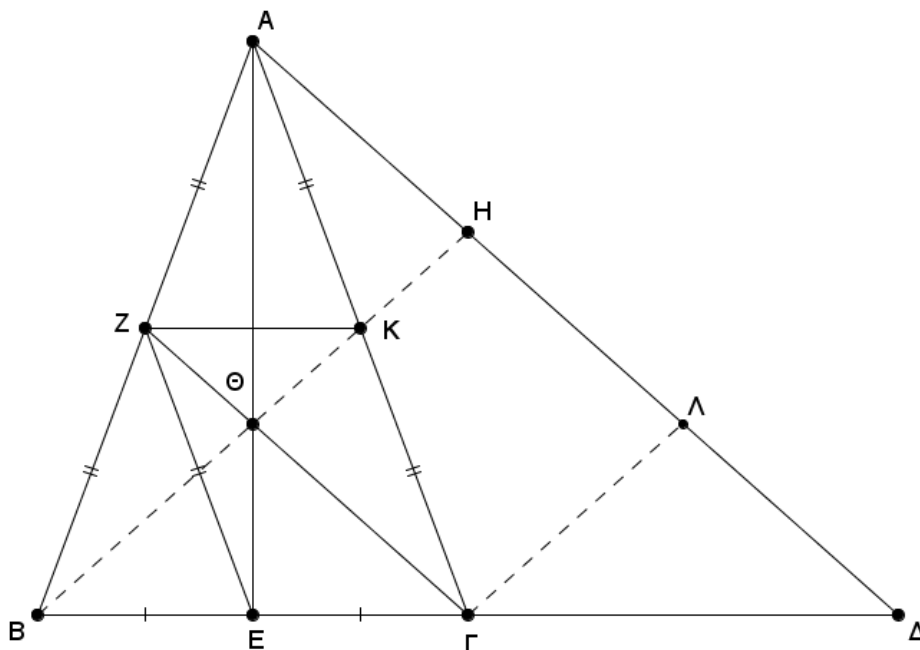
Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ (*),
οπότε ΒΚ είναι, επίσης, διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, άρα Κ μέσον της ΑΓ (3)

Από (1) και (2) έχουμε:

$$ZE \parallel = \frac{AG^{(3)}}{2} = GK \Rightarrow ZE \parallel = GK,$$

άρα το ΖΚΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Φέρνουμε $\Gamma\Lambda \parallel BH$ (4) και καθώς είναι, στο τρίγωνο ΒΔΗ, Γ μέσον της ΒΔ (από δεδομένα) προκύπτει από θεώρημα ότι και Λ μέσον της ΔΗ, δηλαδή $\Delta\Lambda = \Lambda H$ (5)



Επίσης, στο τρίγωνο ΑΓΔ, είναι Κ μέσον ΑΓ και λόγω (4) $KH \parallel \Gamma\Lambda$, επομένως
από το ίδιο θεώρημα, θα είναι Η μέσον του ΑΛ, δηλαδή $\Lambda H = AH$ (6)

Από (5) και (6) έχουμε ότι

$$\Lambda\Delta = \Lambda\Theta = \Lambda\Gamma = \frac{\Lambda\Delta}{3} \quad (7)$$

Τέλος,

$$\Gamma\Theta \stackrel{(*)}{=} \frac{2}{3}\Gamma Z \stackrel{(1),(2)}{=} \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\Lambda\Delta \right) = \frac{1}{3}\Lambda\Delta \stackrel{(7)}{=} \Lambda\Theta, \text{ άρα } \Lambda\Theta = \Theta\Gamma$$

$$\gamma) \Lambda\Theta \stackrel{\beta)}{=} \Gamma\Theta \stackrel{(*)}{=} 2Z\Theta$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4814)

Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο AB . Φέρνουμε χορδή $\Gamma\Delta \parallel AB$ με K το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔE κάθετο στη $\Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $KGOE$ είναι παραλληλόγραμμο.

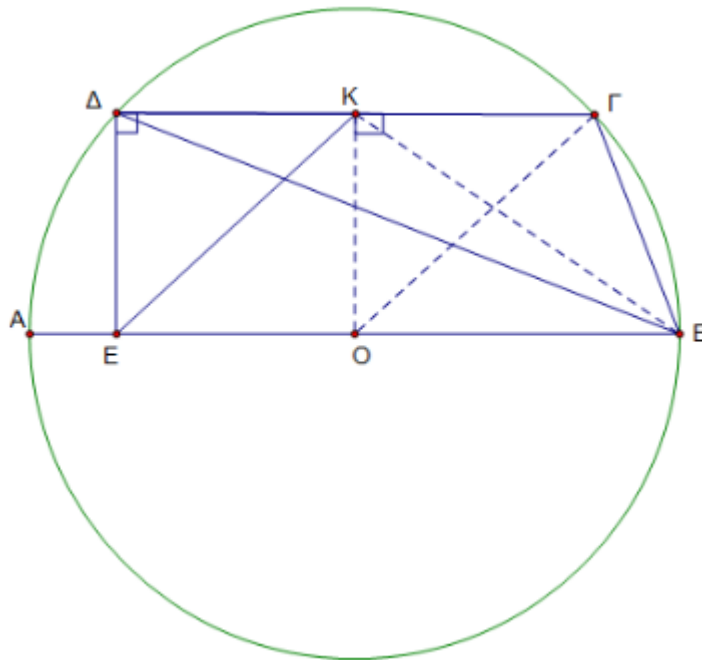
(Μονάδες 8)

$$\beta) \Delta EK = \frac{\Delta OK}{2}.$$

(Μονάδες 12)

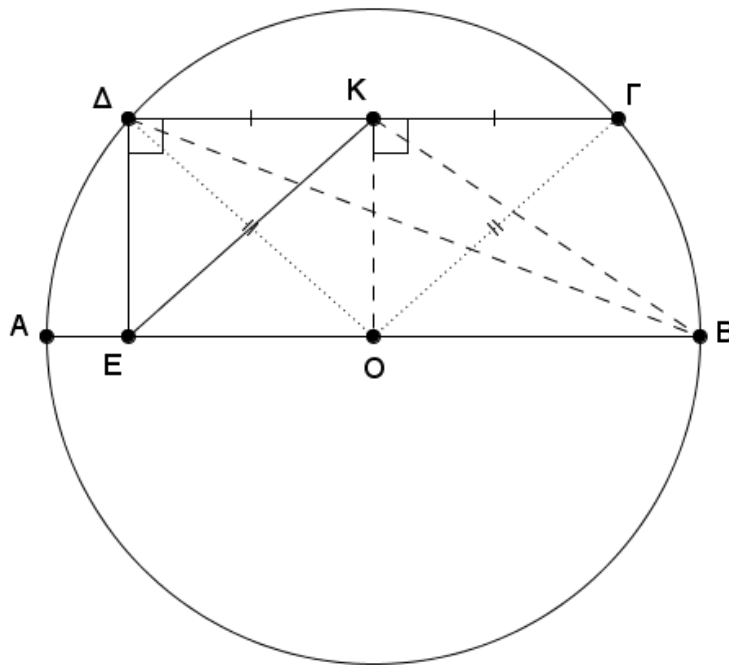
γ) $KE < KB$.

(Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) $\Gamma\Delta \parallel AB \Rightarrow K\Gamma \parallel EO$ (1)

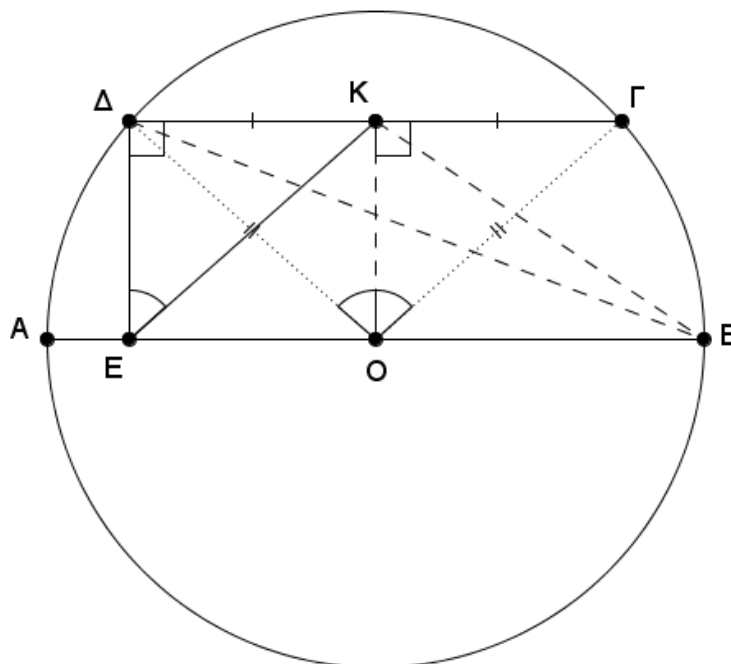


$OD = OG$ ως ακτίνες του κύκλου, επομένως το τρίγωνο ODG είναι ισοσκελές και συνεπώς η διάμεσος OK θα είναι και ύψος, άρα $OK \perp DG$ (2)

Τότε, έχουμε $OK \perp DG$ (2), $DE \perp DG$ (δεδομένα) και $D \neq K$, άρα από κριτήριο παραλληλίας $KO \parallel DE$ και καθώς $GD \parallel AB \Rightarrow KD \parallel EO$, το τετράπλευρο $DKOE$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $DK = EO \Rightarrow KG = EO$ (3)

Από (1) και (3), προκύπτει ότι $KG = EO$, οπότε Το τετράπλευρο $KGOE$ είναι παραλληλόγραμμο.

β)



Τα ορθογώνια τρίγωνα DEK και DKO είναι ίσα καθώς έχουν:

- DK κοινή πλευρά και

- $\Delta E = KO$ (ως απέναντι πλευρές του παραλληλόγραμμου ΔKOE), δηλαδή έχουν δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Άρα θα είναι ίσα και τα υπόλοιπα αντίστοιχα κύρια στοιχεία τους, και έτσι

$$\Delta EK = \Delta OK \quad (4)$$

Όμως, στο ισοσκελές τρίγωνο $ΟΓΔ$ η διάμεσος $ΟΚ$ είναι και διχοτόμος, άρα

$$ΓΟΚ = \Delta OK \quad (5)$$

Από (4) και (5) είναι

$$\Delta EK = \Delta OK = \frac{\Delta O\Gamma}{2}$$

- γ) $KE = O\Gamma$ ^{α) ακτίνες του κύλου} $= OB < KB$, αφού στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΚΓ$ η KB είναι η υποτείνουσα, που είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.
Επομένως $KE < KB$

Σχόλια:

Υπάρχει λανθασμένα στο σχήμα το σύμβολο της ορθής γωνίας στην $ΟΚΓ$, ενώ αυτό δεν υπάρχει στα δεδομένα και έτσι μπορεί κάποιοι μαθητές να μπερδευτούν

ΑΣΚΗΣΗ (4_4816)

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $\angle A = 90^\circ$ και Δ , E και N τα μέσα των AB , $A\Gamma$ και ΔE αντίστοιχα. Στο τμήμα $B\Gamma$ θεωρούμε σημεία K και Λ ώστε $\Delta K = KB$ και $E\Lambda = \Lambda\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $\Delta K\Lambda = 2B$ και $E\Lambda K = 2\Gamma$

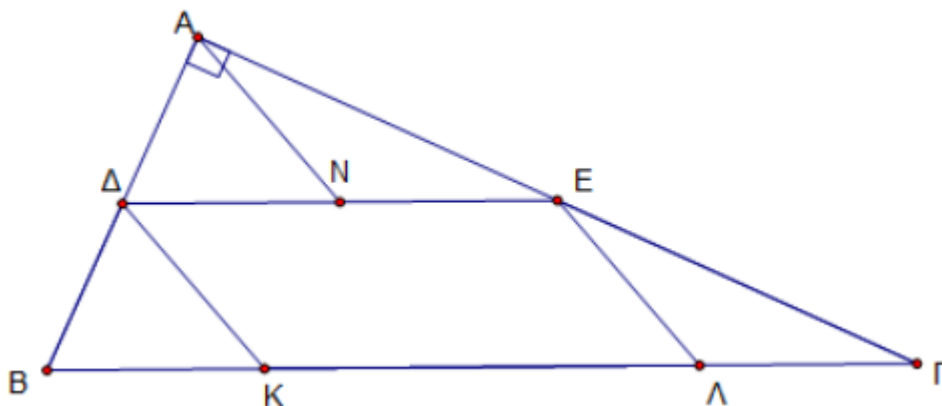
(Μονάδες 10)

- β) Το τετράπλευρο $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο με $\Delta E = 2\Delta K$.

(Μονάδες 8)

- γ) $AN = \Delta K = \frac{B\Gamma}{4}$

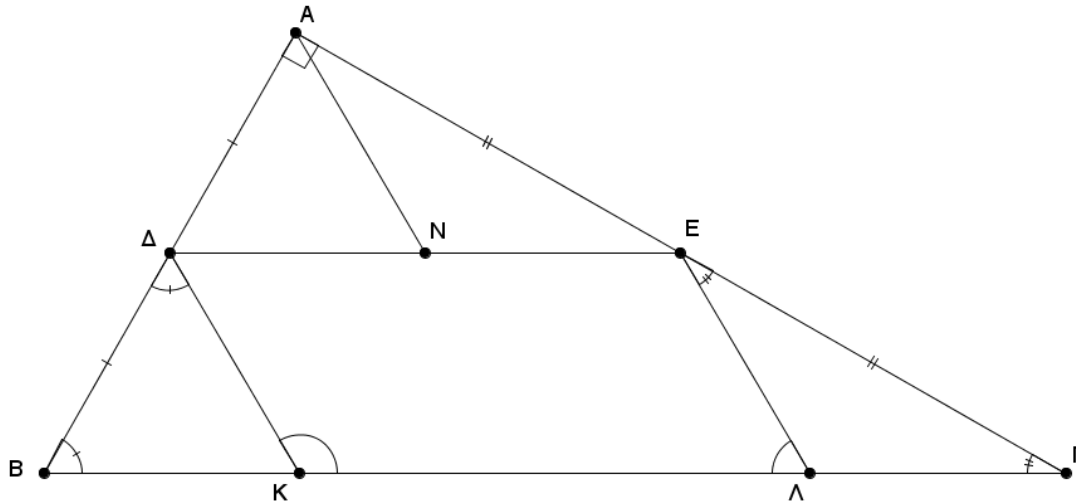
(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

- α) Η γωνία $\Delta K\Lambda$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔKB , άρα $\Delta K\Lambda = B + B\Delta K = 2B$ (αφού

$\Delta K = KB$ και έτσι το τρίγωνο $B\Delta K$ είναι ισοσκελές)



Ομοίως, η γωνία ΕΛΚ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΓΛΕ, άρα

$ΕΑΚ = ΔΚΛ = Γ + ΓΕΛ = 2Γ$ (αφού $ΕΛ = ΛΓ$ και έτσι το τρίγωνο $ΓΛΕ$ είναι ισοσκελές)

β) Δ, Ε είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, οπότε από θεώρημα προκύπτει

$$\Delta E \parallel = \frac{B\Gamma}{2} \quad (1), \text{ \acute{a}\rho\alpha \text{ και } } \Delta E \parallel K\Lambda \quad (2)$$

Επίσης,

$$\Delta K\Lambda + E\Lambda K = 2B + 2\Gamma = 2(B + \Gamma) \stackrel{B\Lambda\Gamma=90^\circ}{=} 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ, \text{ \textit{άρα} } \Delta K \parallel E\Lambda \quad (3)$$

Από (2) και (3), το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον, ισχύει από (1)

$$\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow 2\Delta E = B\Gamma \Rightarrow 2\Delta E = BK + K\Lambda + \Lambda\Gamma \Rightarrow \cancel{2}\Delta E = \Delta K + \cancel{\Delta E} + \overset{\Delta K = \Delta E}{\Lambda E} \Rightarrow \Delta E = 2\Delta K.$$

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ η διάμεσος ΑΝ αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΔΕ, οπότε είναι

$$AN = \frac{\Delta E^{\beta})}{2} = \Delta K$$

Όμως είναι και

$$AN = \frac{\Delta E^{(1)}}{2} = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{B\Gamma}{4}, \text{ επομένως, } AN = \Delta K = \frac{B\Gamma}{4}$$

ΑΣΚΗΣΗ (4 4818)

Έστω τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB > A\Gamma$), AD το ύψος του και M το μέσο του AB . Η προέκταση της MD τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο E ώστε $\Gamma D = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \quad B = E.$$

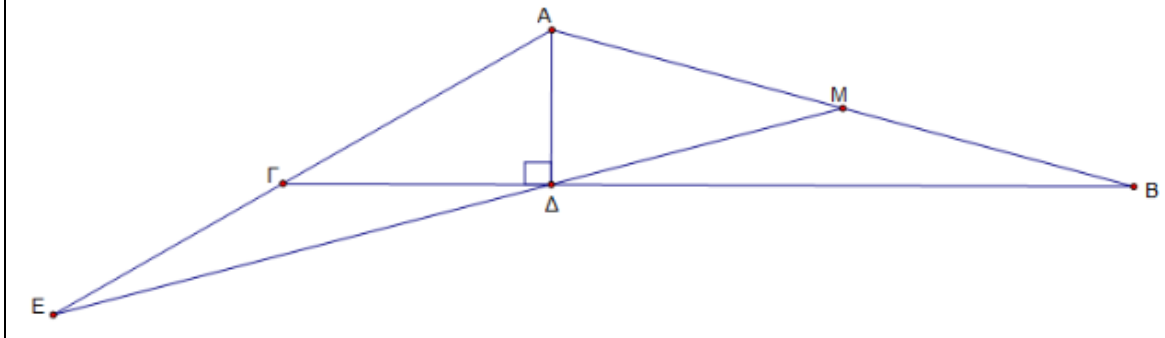
(Μονάδες 8)

β) $\Gamma = 2B = AM\Delta$.

(Μονάδες 10)

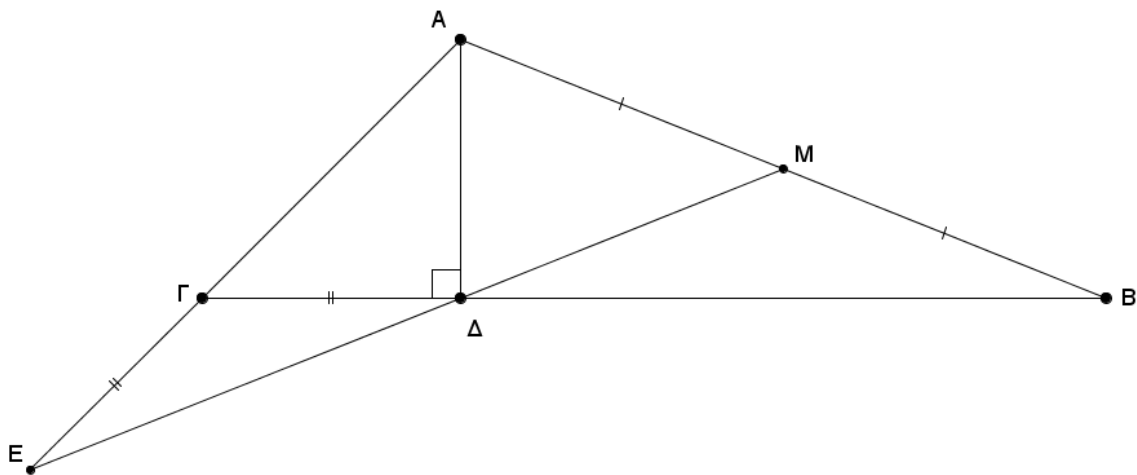
γ) $\Gamma E < A\Gamma$.

(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

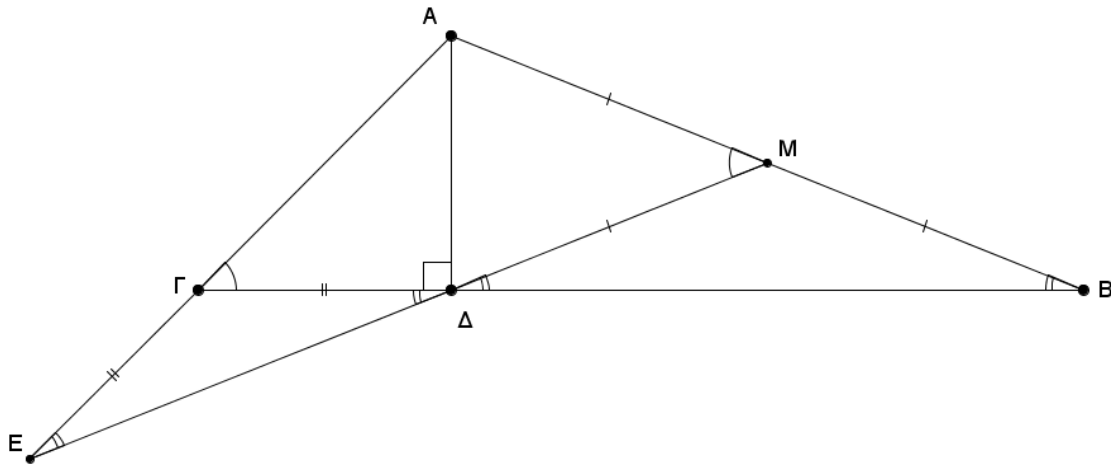
α) Έχουμε



- $\Gamma E = \Gamma \Delta$ (από δεδομένα), άρα το τρίγωνο $\Gamma \Delta E$ είναι ισοσκελές με $E = \Gamma \Delta E$ (1)
- $\Gamma \Delta E = M \Delta B$ (ως κατακορυφήν) (2)
- Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A \Delta M$, ΔM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε $\Delta M = \frac{AB}{2} \Rightarrow \Delta M = MB \Rightarrow$ το τρίγωνο $M \Delta B$ είναι ισοσκελές με $M \Delta B = B$ (3)

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι: $B = E$

β)



- Η Γ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΓΔΕ, οπότε

$$\Gamma = E + \overset{(1)}{\Gamma\Delta E} = 2E \quad (4)$$

- Όμοια, η ΑΜΔ στο τρίγωνο ΒΜΔ, άρα

$$ΑΜΔ = B + \overset{(2)}{ΜΔΒ} = 2B \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (4), (5) και το α) ερώτημα προκύπτει ότι:

$$\Gamma = 2B = ΑΜΔ$$

γ) $\Gamma E = \Gamma \Delta < ΑΓ$, αφού η υποτείνουσα ΑΓ είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ΑΓΔ.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4821)

Έστω τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$, ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α και Μ το μέσον της ΑΒ. Η κάθετη από το Μ στην ΑΔ τέμνει το ΑΓ στο Ε. Η παράλληλη από το Β στο ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Κ και την προέκταση της ΕΜ στο Λ.

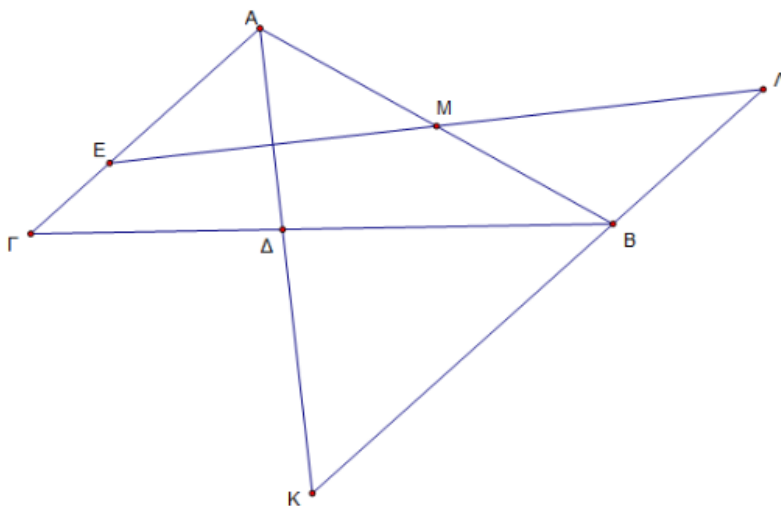
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΜ, ΜΒΛ και ΑΒΚ είναι ισοσκελή.

(Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Έστω Ν το σημείο τομής των ΑΔ και ΕΜ.

- Τότε, το τρίγωνο ΑΕΜ είναι ισοσκελές, διότι: ΑΝ ύψος ($ME \perp AD$) και διχοτόμος (από δεδομένα).

Οπότε $AE = AM$ (1) και $\angle AEN = \angle AME$ (2)

- Είναι $\angle MAB = \angle AEM$ (3) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΓ, ΚΛ που τέμνονται από την ΛΕ.

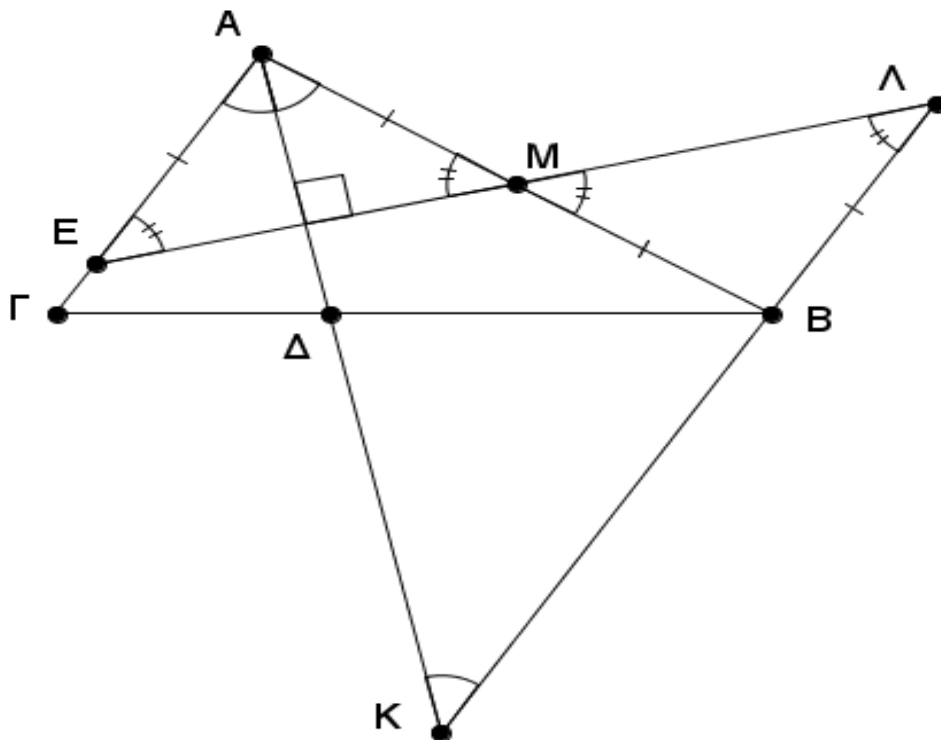
Επίσης, $\angle AME = \angle BML$ (4) ως κατακορυφήν.

Από τις σχέσεις (2), (3) και (4) έχουμε ότι $\angle MAB = \angle BML$, οπότε το τρίγωνο ΒΜΛ είναι ισοσκελές με $BL = BM$ (5)

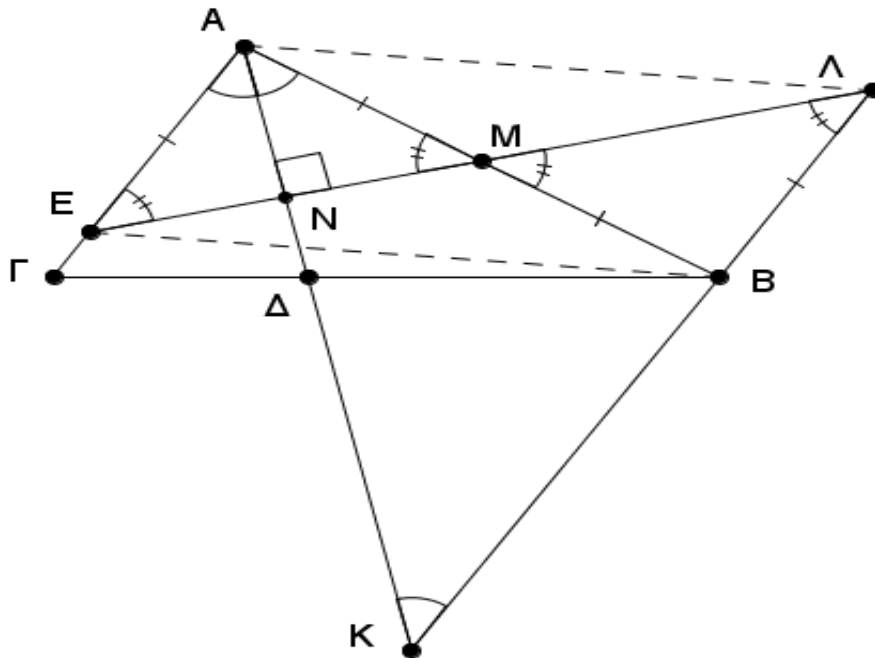
- Είναι $\angle EAK = \angle AKB$ (6) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΓ, ΚΛ που τέμνονται από την ΑΚ.

Επίσης, $\angle EAK = \angle BAK$ (7), αφού ΑΝ διχοτόμος.

Από τις σχέσεις (6) και (7) έχουμε ότι $\angle AKB = \angle BAK$, οπότε το τρίγωνο ΒΑΚ είναι ισοσκελές.



β)



Ισχύει ότι:

- 1) $BL = AE$ λόγω (1), (5) και $AM = MB$ (M μέσο AB)
- 2) $BL \parallel AE$, από δεδομένα, άρα $BL = AE$ και συνεπώς το τετράπλευρο ALBE είναι παραλληλόγραμμο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4832)

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\hat{A}BG$ ($AB = AG$) και AD διάμεσος. Στο τμήμα AD θεωρούμε τυχαίο σημείο K από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα KZ και KE κάθετα στις AB και AG αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $\overset{\Delta}{ABK} = \overset{\Delta}{A\Gamma K}$ (Μονάδες 6)
- ii. Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{ZKE}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
- iii. Το τετράπλευρο $ZE\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής στο (αι.) ερώτημα έδωσε την εξής απάντηση:

«Το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος στη βάση ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του
 τριγώνου $\hat{A}B\Gamma$ και μεσοκάθετος του ΒΓ. Οπότε το τρίγωνο $B\hat{K}\Gamma$ είναι
 ισοσκελές.

Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΚ}}$ και $\overset{\Delta}{\text{ΑΓΚ}}$ έχουν:

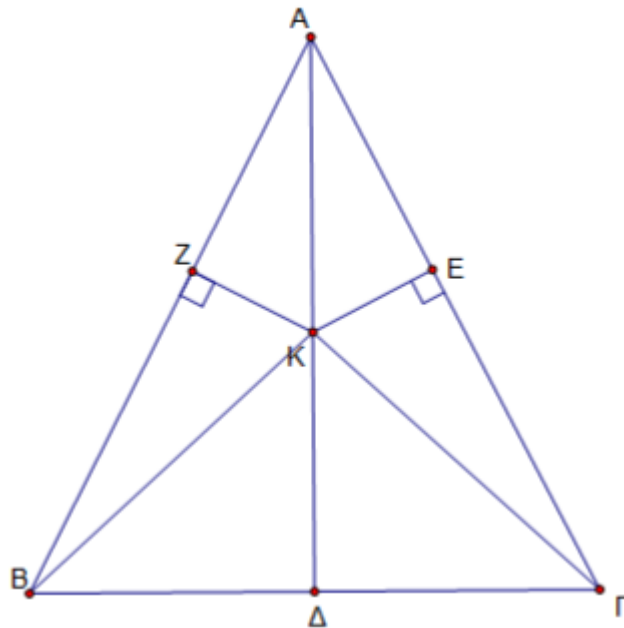
1. $BK = K\Gamma$
2. $BAK = \Gamma AK$ επειδή AK διχοτόμος της A
3. $ABK = A\Gamma K$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.

Ἄρα τα τρίγωνα εἶναι ἴσα βάσει του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.»

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την

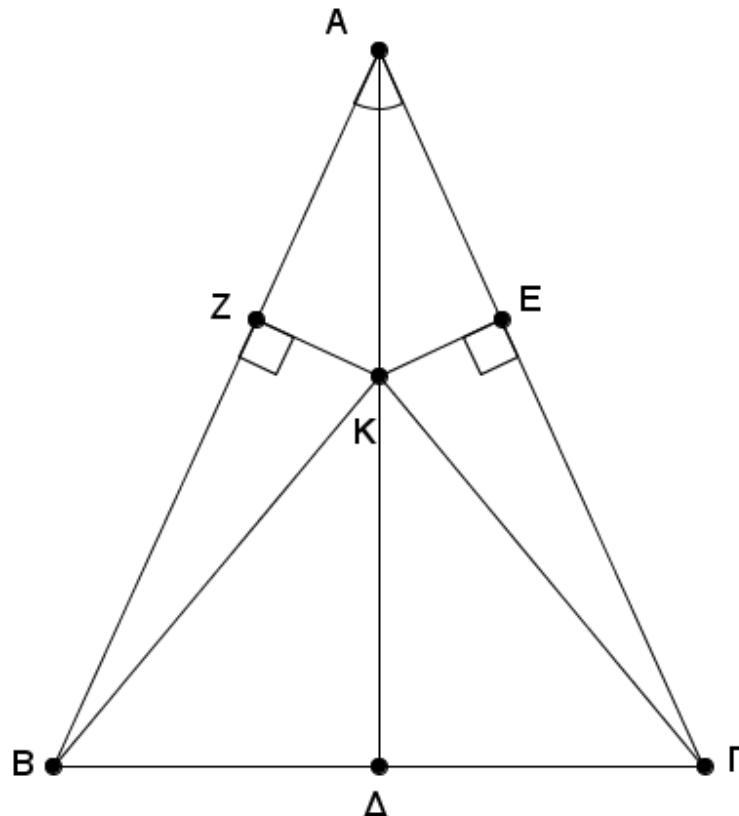
απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία – Πλευρά – Γωνία διατηρώντας τις πλευρές ΒΚ και ΚΓ.

(Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

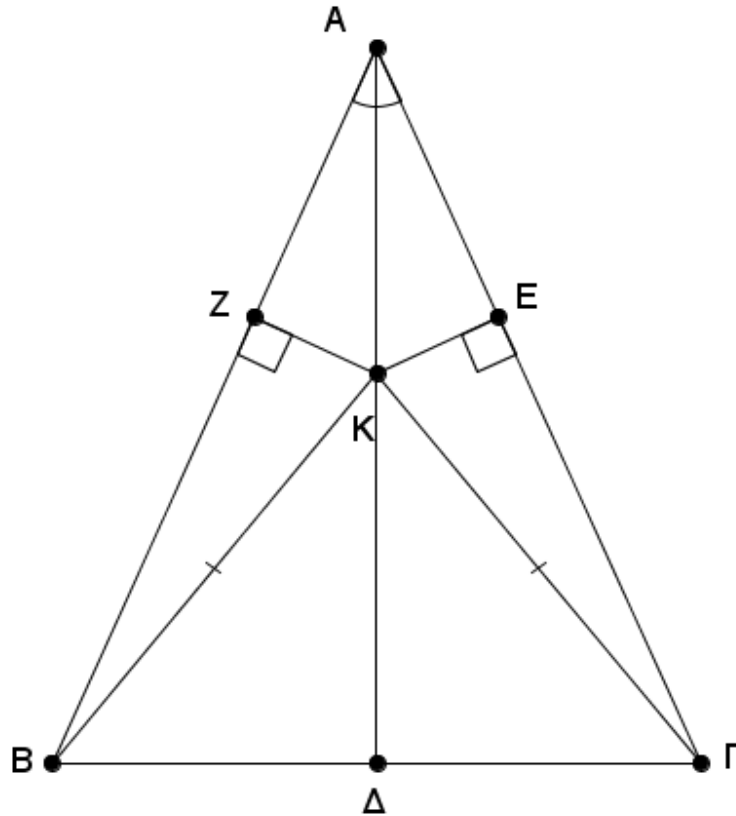
α) i. Τα τρίγωνα ABK και AGK είναι ίσα λόγω κριτηρίου Π-Γ-Π, καθώς έχουν:



- 1) AK κοινή πλευρά
- 2) $AB = AG$ (από δεδομένα)

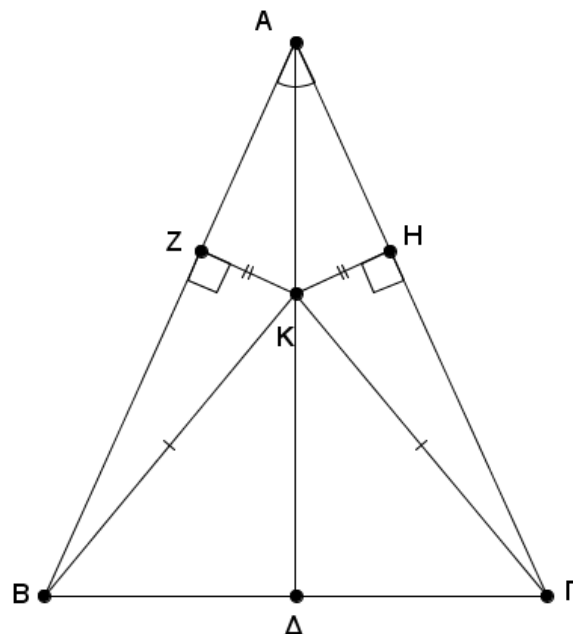
- 3) $\angle BAK = \angle GAK$ (η διάμεσος AD του ισοσκελούς τριγώνου ABG που αντιστοιχεί στην βάση του είναι και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του)

- ii. K είναι σημείο της διχοτόμου AD της γωνίας A , άρα θα ισαπέχει από τις πλευρές τις AB και AG .



Δηλαδή $KZ = KE$ (1) και συνεπώς το τρίγωνο ZKE είναι ισοσκελές.

- iii. Από την σχέση (1) έχουμε ότι το σημείο K είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος ZE (2).



Ακόμη, τα ορθογώνια τρίγωνα AZK και AEK έχουν:

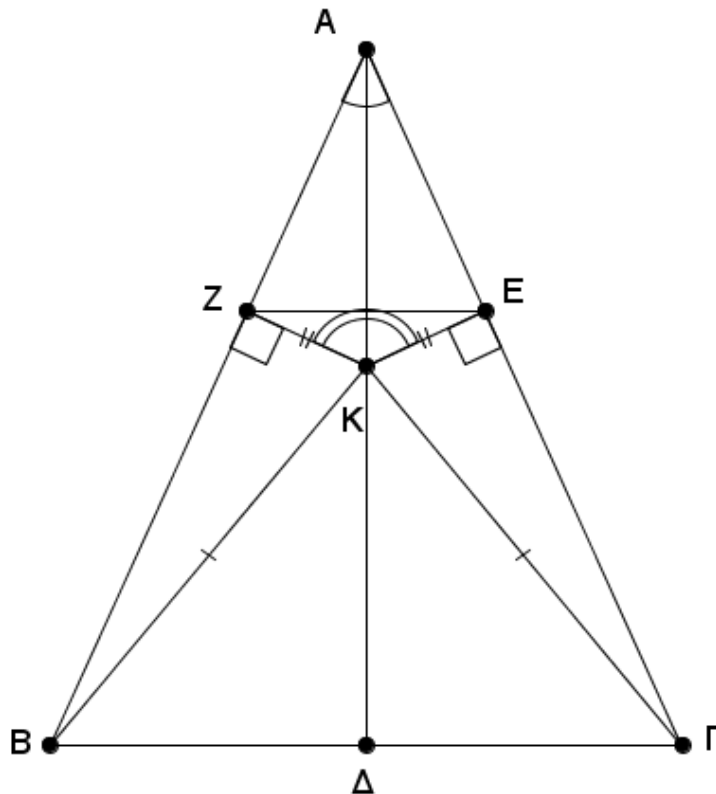
- 1) AK κοινή πλευρά
- 2) $KZ = KE$ (1), οπότε είναι ίσα καθώς έχουν δύο ομόλογες πλευρές ίσες μία προς μία.

Συνεπώς θα έχουν ίσα και όλα τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους, άρα και $AZ = AE$, οπότε το σημείο A είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος ZE (3).

Από (2) και (3) έχουμε ότι AK είναι η μεσοκάθετος του ZE , άρα $AK \perp ZE \Rightarrow AD \perp ZE$. Όμως είναι και $AD \perp BG$, άρα $ZE \parallel BG$.

Δηλαδή, το τετράπλευρο $ZEGB$ είναι τραπέζιο και μάλιστα ισοσκελές, αφού $BZ = GE$ (ως διαφορά ίσων τμημάτων: $AB = AG$ και $AZ = AE$)

- β) Το λάθος του μαθητή (διατηρώντας τις πλευρές BK και $K\Gamma$) είναι στο σημείο 2, το οποίο θα πρέπει να αντικατασταθεί από $AKB = AK\Gamma$.



Το τελευταίο ισχύει διότι είναι παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $BK\Delta, \Gamma K\Delta$

$[\alpha) \Rightarrow KB = GK \Rightarrow B\hat{K}\Gamma$ ισοσκελές και $K\Delta$ διχοτόμος]

ΑΣΚΗΣΗ (4_5886)

[Κεφάλαιο 5^ο ή 6^ο (ανάλογα με την λύση)]

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του AH . Αν Δ , E και Z είναι τα μέσα των $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 8)

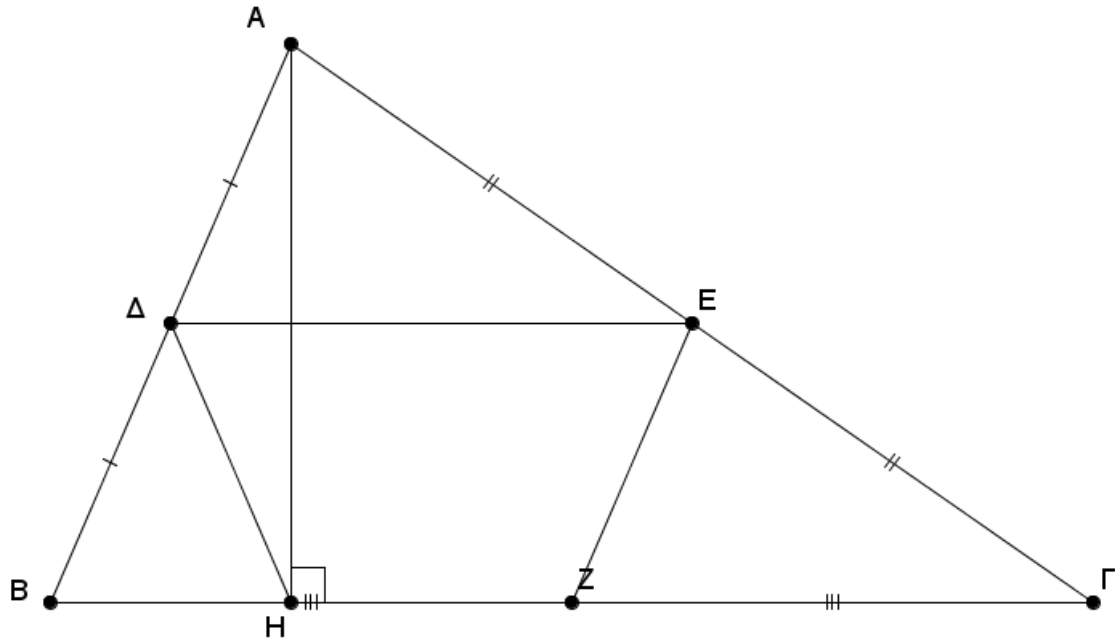
β) οι γωνίες $H\Delta Z$ και HEZ είναι ίσες.

(Μονάδες 8)

γ) οι γωνίες $E\Delta Z$ και EHZ είναι ίσες.

ΛΥΣΗ

- α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι Δ, E μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, οπότε $\Delta E \parallel B\Gamma \Rightarrow \Delta E \parallel BZ$ (1), άρα το τετράπλευρο ΔEZH είναι τραπέζιο.

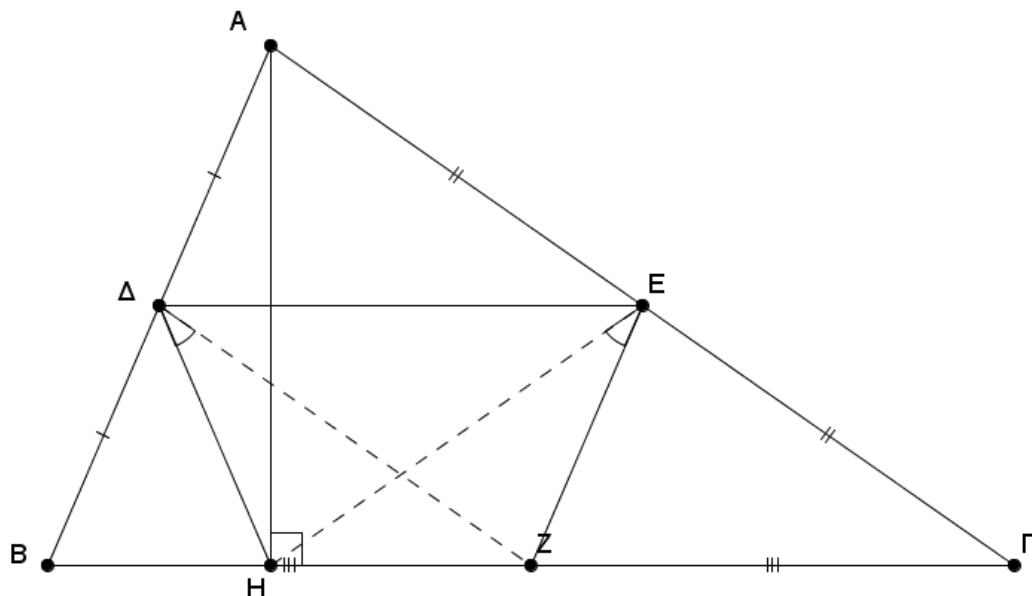


Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι Z, E μέσα των $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, οπότε $ZE \parallel \frac{AB}{2}$ (2)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABH (AH ύψος στο $AB\Gamma$) η διάμεσος ΔH αντιστοιχεί στην υποτείνουσα AB , άρα είναι $\Delta H = \frac{AB}{2}$ (3)

Λόγω των (2) και (3) το τραπέζιο ΔEZH είναι ισοσκελές.

- β) 1^{ος} τρόπος:



Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι Δ, Z μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα, οπότε $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$ (4)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Gamma H$ (AH ύψος στο $AB\Gamma$) η διάμεσος HE αντιστοιχεί στην

υποτείνουσα ΑΓ, άρα είναι $HE = \frac{AG}{2}$ (5)

Τα τρίγωνα ΔΗΖ και ΕΗΖ είναι ίσα λόγω κριτηρίου Π-Π-Π, καθώς έχουν:

- 1) ΗΖ κοινή πλευρά
- 2) ΔΗ = ΖΕ λόγω των σχέσεων (2) και (3)
- 3) ΔΖ = ΗΕ λόγω των σχέσεων (4) και (5)

Συνεπώς, θα έχουν ίσα και όλα τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους, άρα $HAZ = HEZ$ (6).

2^{ος} τρόπος (mathematica – και για το γ) ερώτημα ταυτόχρονα):

Λόγω του ισοσκελούς τραπεζίου ΔΕΖΗ, οι προσκείμενες στη βάση ΗΖ γωνίες είναι ίσες, δηλαδή $\Delta HZ = HZE$ (7)

Επίσης, επειδή $\Delta E \parallel HZ$, ισχύει ότι $\Delta EZ + EZH = 180^\circ$ ως εντός και επί τα αυτά γωνίες.

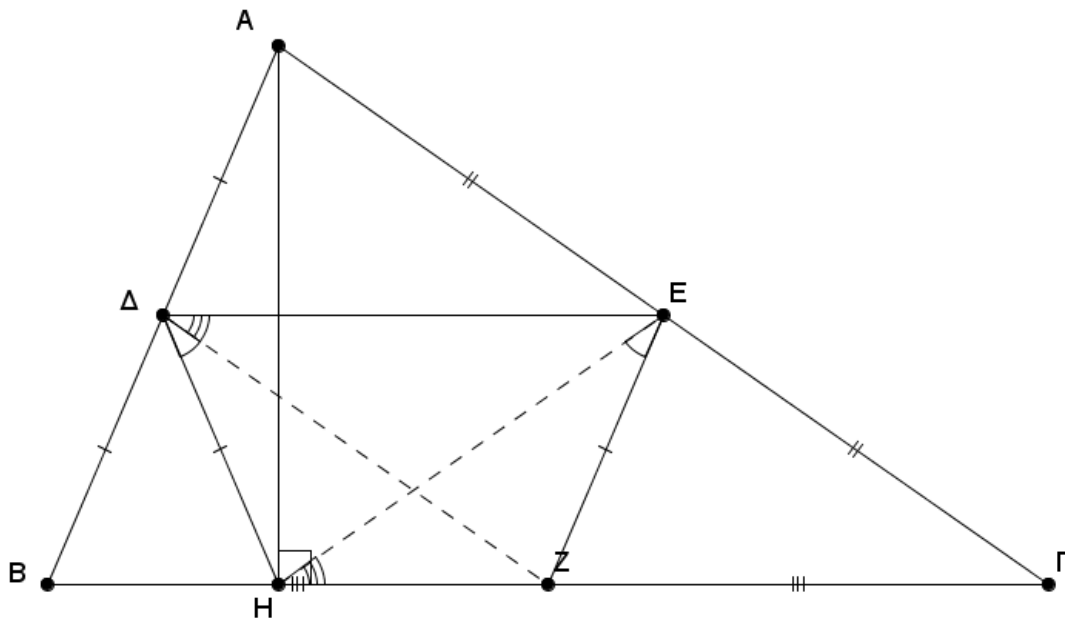
Άρα, λόγω της (7), $\Delta EZ + \Delta HZ = 180^\circ$.

Επομένως, οι απέναντι γωνίες του τραπεζίου είναι παραπληρωματικές, οπότε είναι εγγράψιμο.

Έτσι, κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

Οπότε $HAZ = HEZ$ και $EAZ = EHZ$

γ) Λόγω του ισοσκελούς τραπεζίου ΔΕΖΗ, οι προσκείμενες στη βάση ΔΕ γωνίες είναι ίσες, δηλαδή $H\Delta E = \Delta EZ$ (8).



Τότε, από (6) και (8), ισχύει ότι $E\Delta Z = \Delta EH$ (ως διαφορά ίσων γωνιών) και επειδή $E\Delta Z = \Delta EH$ (ως εντός εναλλάξ των $\Delta E \parallel HZ$ με τέμνουσα την ΕΗ) θα είναι και $E\Delta Z = EHZ$.

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE = AB$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.

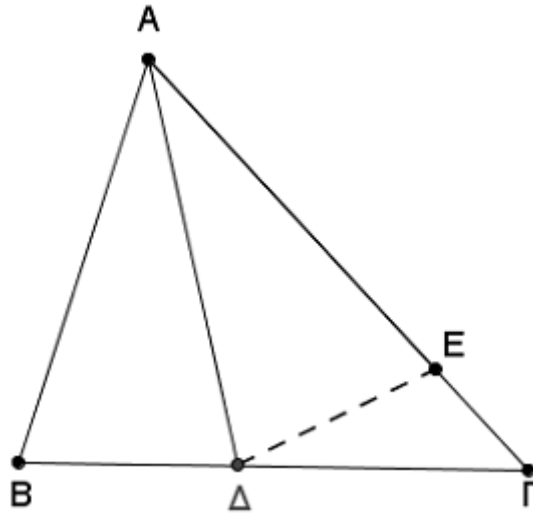
(Μονάδες 7)

β) η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος BE .

(Μονάδες 9)

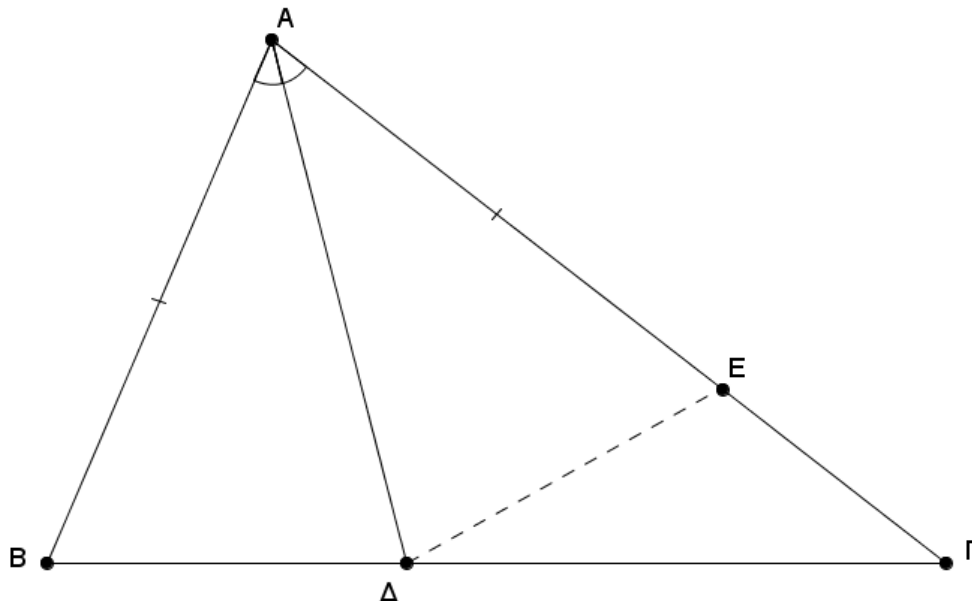
γ) αν το ύψος από την κορυφή B του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει την $A\Delta$ στο H τότε η ευθεία EH είναι κάθετη στην AB .

(Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

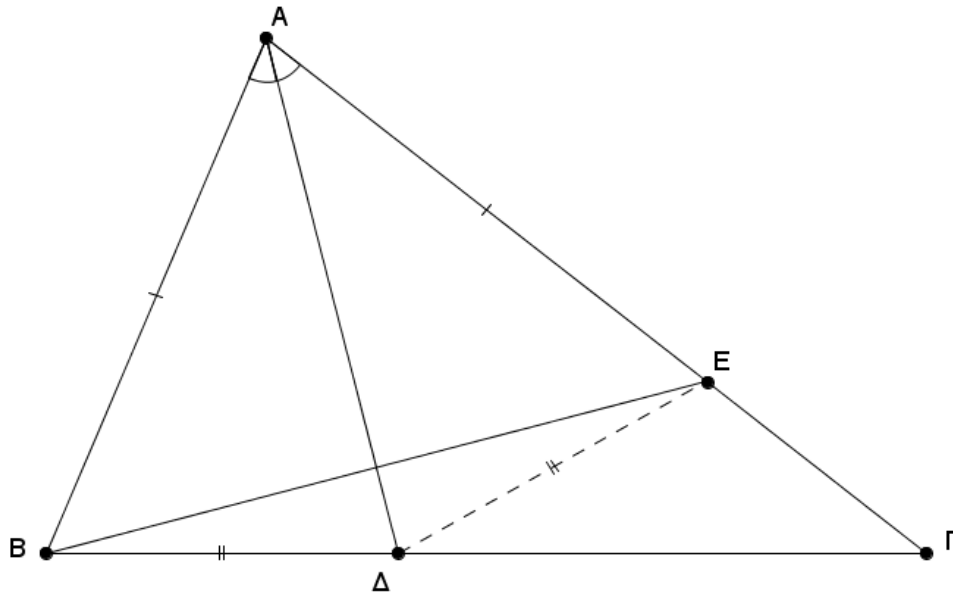
α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ είναι ίσα λόγω του κριτηρίου Π-Γ-Π, καθώς έχουν:



- 1) $A\Delta$ κοινή πλευρά
- 2) $AB = AE$ (από δεδομένα)
- 3) $\angle B\Delta A = \angle E\Delta A$ ($A\Delta$ διχοτόμος από δεδομένα)

β) Από α) έχουμε ότι $AB = AE$, άρα το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές, και επειδή $A\Delta$

διχοτόμος, θα είναι και ύψος.



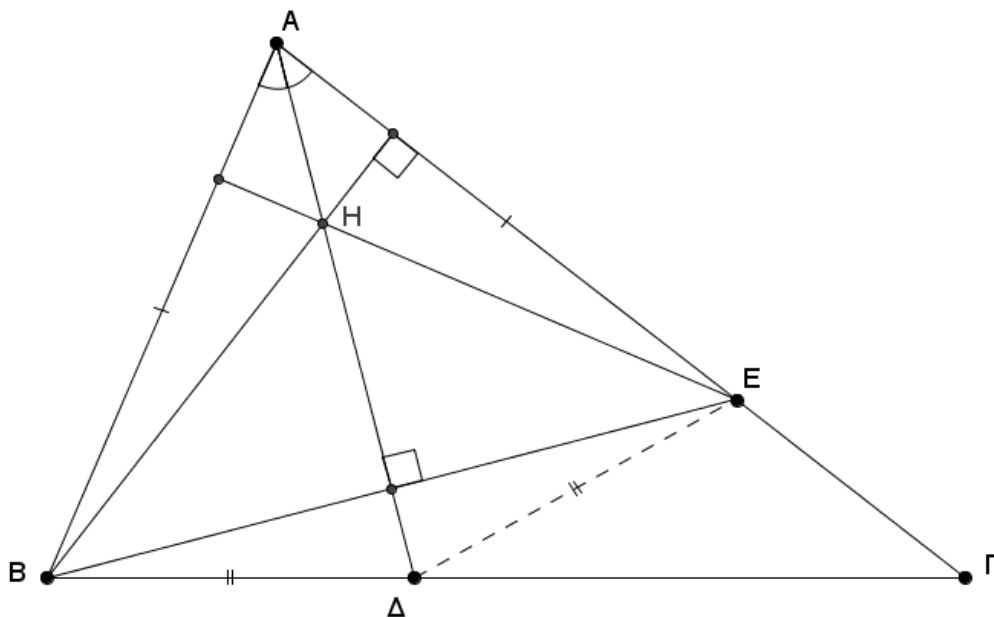
Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΕ.

2^{ος} τρόπος (**mathematica**):

Από α) έχουμε ότι $AB = AE$ και $BD = DE$, άρα τα σημεία Α και Δ ισαπέχουν από τα άκρα Β, Ε του ΒΕ και συνεπώς είναι σημεία της μεσοκαθέτου του ΒΕ.

Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΕ.

γ) Στο τρίγωνο ΑΒΕ, τα ΒΗ και ΑΗ είναι ύψη, άρα το Η ορθόκεντρο και συνεπώς ΕΗ ύψος, δηλαδή $EH \perp AB$



ΑΣΚΗΣΗ (4_5902)

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$. Από το Β φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο ΑΜ της γωνίας Α, η οποία τέμνει την ΑΜ στο Η και την ΑΓ στο Δ. Στην προέκταση της ΑΗ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε $AH = HZ$ και έστω Θ το μέσο της πλευράς ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ABZΔ είναι ρόμβος.

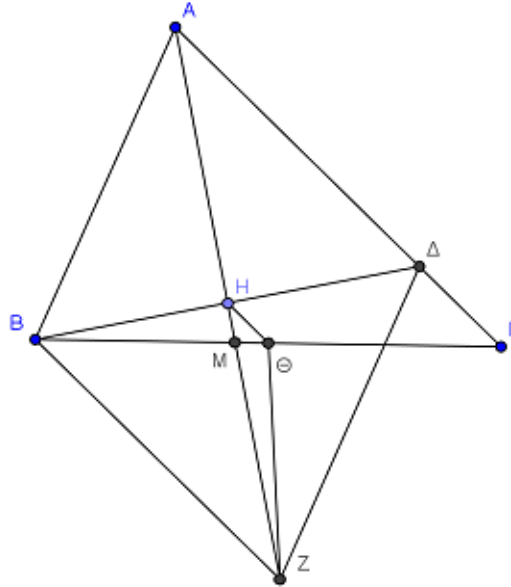
(Μονάδες 9)

β) το τετράπλευρο HBZΘ είναι τραπέζιο.

(Μονάδες 9)

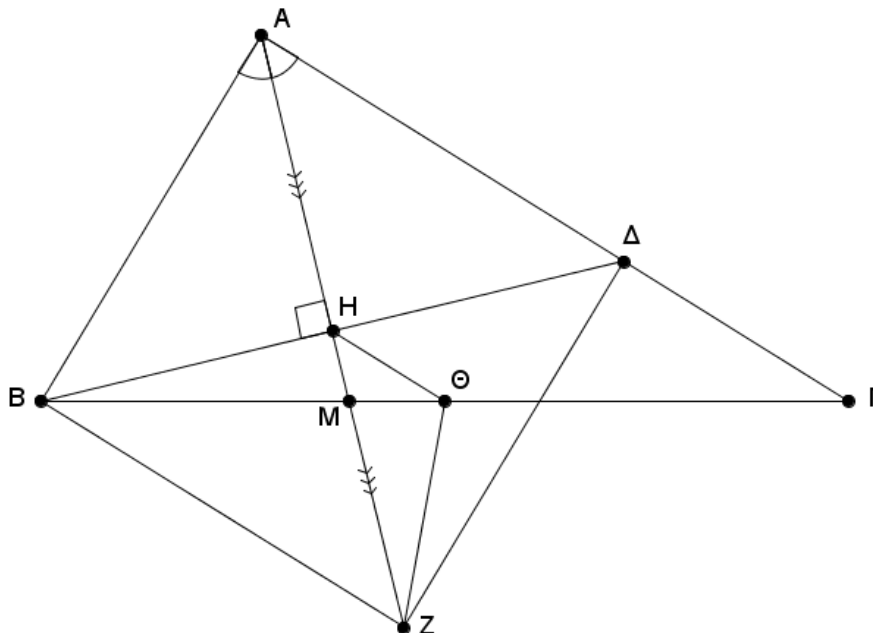
γ) η διάμεσος του τραπεζίου HBZΘ είναι ίση με $\frac{AB + A\Gamma}{4}$.

(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Το τρίγωνο ABΔ είναι ισοσκελές, αφού από δεδομένα γνωρίζουμε ότι AH είναι διχοτόμος και ύψος.



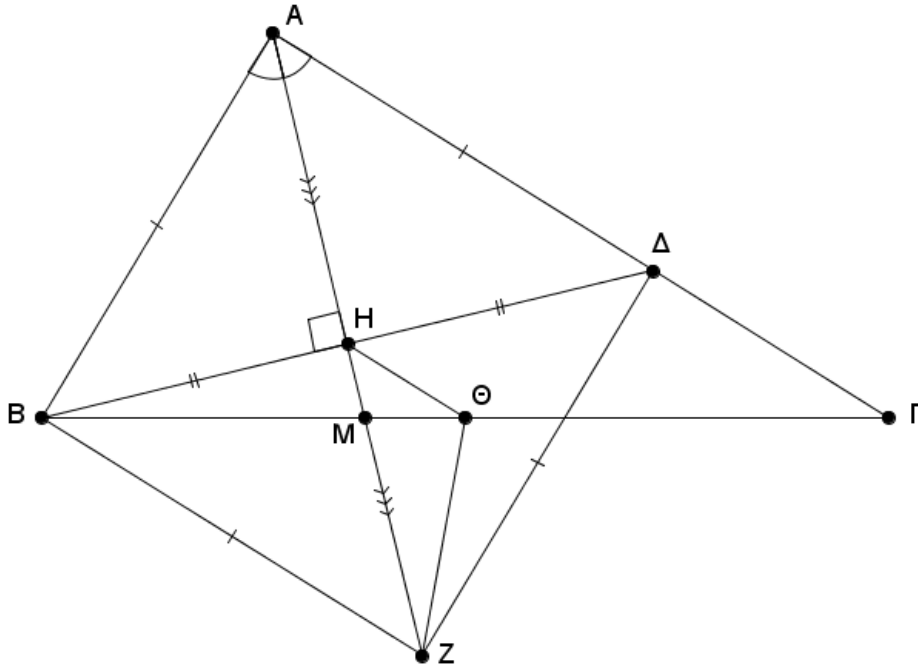
Επομένως ισχύει ότι $AB = AD$ (1) και $BH = HD$ (2), καθώς AH είναι επιπλέον και διάμεσος.

Από δεδομένα ισχύει ότι $AH = HZ$ και λόγω της (2) συμπεραίνουμε ότι το

τετράπλευρο ABZΔ είναι παραλληλόγραμμο, το οποίο λόγω της (1) έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, και έτσι καθίσταται ρόμβος (ή διότι οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα ή μία διαγώνιός του, η AZ, διχοτομεί μία γωνία του, την A). Από το τελευταίο έχουμε και ότι: $BZ = AΔ = AB$ (2) και $BZ \parallel AΔ$ (3)

β) Στο τρίγωνο BΓΔ, Η και Θ είναι τα μέσα των ΒΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Άρα

$$HΘ \parallel \frac{ΓΔ}{2} \quad (4)$$



Από (4) προκύπτει ότι $HΘ \parallel AΔ$ και σε συνδυασμό με την (3), είναι $HΘ \parallel BΓ$, άρα το τετράπλευρο HBZΘ είναι τραπέζιο (**ΠΡΟΣΟΧΗ** αν $BH \nparallel ZΘ$).

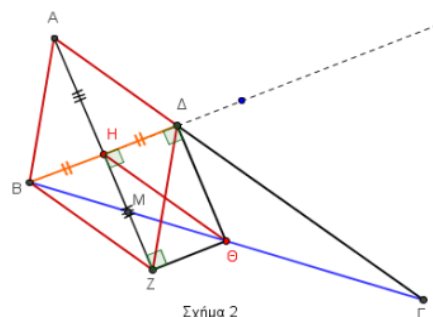
γ) Σύμφωνα με θεώρημα, η διάμεσος του τραπέζιου HBZΘ είναι ίση με

$$\frac{HΘ + BZ}{2} \stackrel{(4),(2)}{=} \frac{\frac{ΓΔ}{2} + AB}{2} = \frac{ΓΔ + 2AB}{4} = \frac{(ΓΔ + AB) + AB}{4} \stackrel{(2)}{=} \frac{(ΓΔ + AΔ) + AB}{4} = \frac{AΓ + AB}{4}$$

Δείτε μια παρατήρηση από το μαθηματικό forum mathematica

Παρατήρηση

Αν η $BH \parallel ZΘ$ τότε $HBZΘ$ είναι παραλληλόγραμμο και δεν έχει νόημα το γ) ερώτημα. Δες Σχήμα 2 που ακολουθεί



ΑΣΚΗΣΗ (4_5908)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > A\Delta$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του AP , BE , $\Gamma\Sigma$ και ΔT (όπου P, E στην $\Delta\Gamma$ και Σ, T στην AB) τέμνονται στα σημεία K, Λ, M και N όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΔEBT είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 7)

β) το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο.

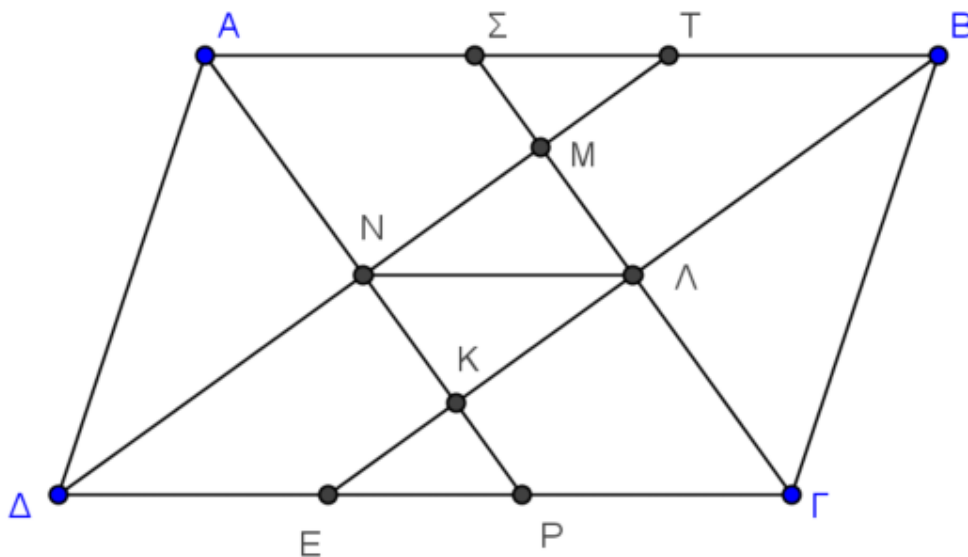
(Μονάδες 8)

γ) $\Lambda N \parallel AB$

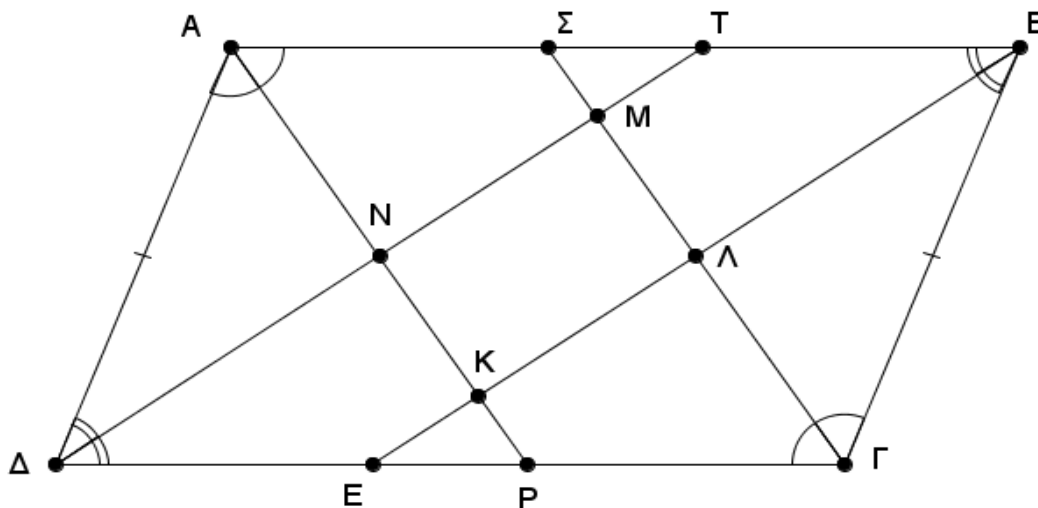
(Μονάδες 5)

δ) $\Lambda N = AB - A\Delta$

(Μονάδες 5)

**ΛΥΣΗ**

α) Τα τρίγωνα $A\Delta T$ και $B\Gamma E$ είναι ίσα λόγω του κριτηρίου Γ -Π- Γ , καθώς έχουν:



1) $A\Delta = B\Gamma$ (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$)

2) $\angle A = \angle \Gamma$ (απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$)

3) $\angle \Delta \Gamma = \angle \Gamma \Delta$ (ως μισά των ίσων γωνιών B και Δ, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ)

Επομένως τα δύο τρίγωνα θα έχουν ίσα και όλα τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους, άρα και $AT = ΓΕ$ (1)

Επειδή $AB = \Gamma\Delta$, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, λόγω της (1) έχουμε $BT = \Delta E$ (2). Αλλά και $AB \parallel \Gamma\Delta \Rightarrow BT \parallel \Delta E$ (3)

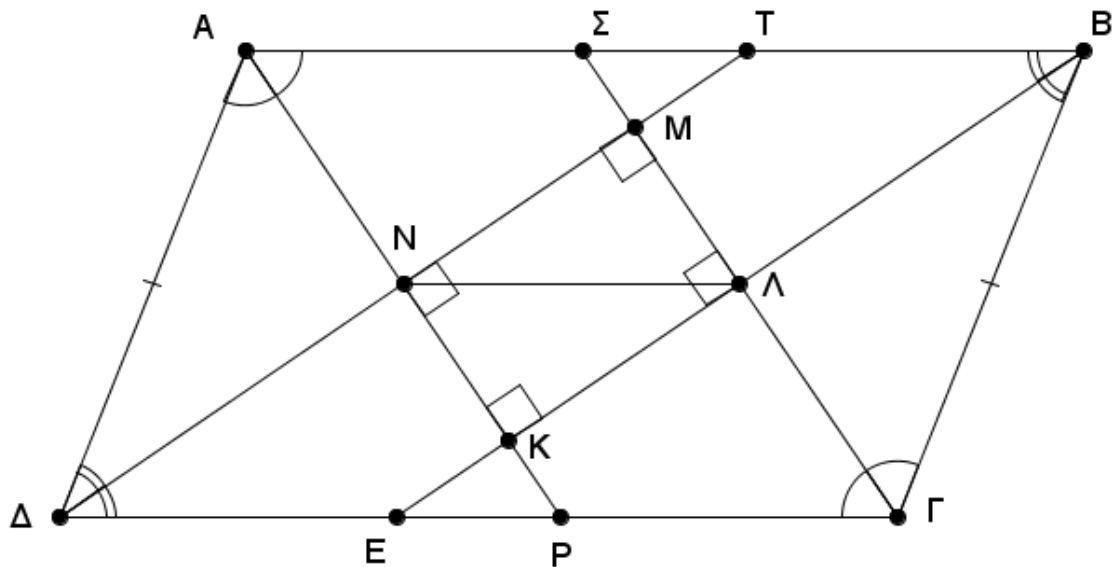
Από (2) και (3) προκύπτει ότι $BT \parallel DE$, άρα το τετράπλευρο ΔEBT είναι παραλληλόγραμμο.

β) Στο τρίγωνο ΓΜΔ είναι:

$$\Gamma M \Delta = 180^\circ - (M \Gamma \Delta + M \Delta \Gamma) = 180^\circ - \left(\frac{\Gamma}{2} + \frac{\Delta}{2} \right) = 180^\circ - \left(\frac{\Gamma + \Delta}{2} \right) = 180^\circ - \left(\frac{180^\circ}{2} \right) = 90^\circ$$

Ομοίως, αποδεικνύεται και για άλλες δυο γωνίες, π.χ. τις $\angle AMB$ και $\angle AN\Delta$ (άρα και $\angle MNK$), οπότε το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο.

γ) Στο τρίγωνο ΑΔΤ, το ΑΝ είναι ύψος και διχοτόμος.



Από εφαρμογή, τότε, το τρίγωνο θα είναι ισοσκελές και το AN διάμεσος, άρα

$$T_N = \frac{\Delta T}{2} \quad (4).$$

Ομοίως, από το τρίγωνο ΒΓΕ, έχουμε ότι ΓΛ διάμεσος, άρα $ΒΛ = \frac{ΒΕ}{2}$ (5)

Όμως, από α), το ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $\Delta T \parallel BE$ (6)

Από (4), (5) και (6) έχουμε ότι $TN \parallel BL$, άρα το τετράπλευρο $BLNT$ είναι παραλληλόγραμμο και συνεπώς $AN \parallel BT \Rightarrow AN \parallel AB$

δ) $\overset{\gamma}{\Lambda N} = TB = AB - AT = AB - \overset{\gamma}{\Lambda\Delta}$, λόγω του ισοσκελούς τριγώνου $\Lambda\Delta T$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_5911)

Έστω $AB\Gamma\Delta$ ορθογώνιο με $AB > B\Gamma$ τέτοιο ώστε οι διαγώνιοι του να σχηματίζουν γωνία 60° . Από το Δ φέρουμε ΔM κάθετη στην AG .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το σημείο M είναι μέσο του AO όπου O το κέντρο του ορθογωνίου.

(Μονάδες 8)

ii. $AM = \frac{1}{4} AG$

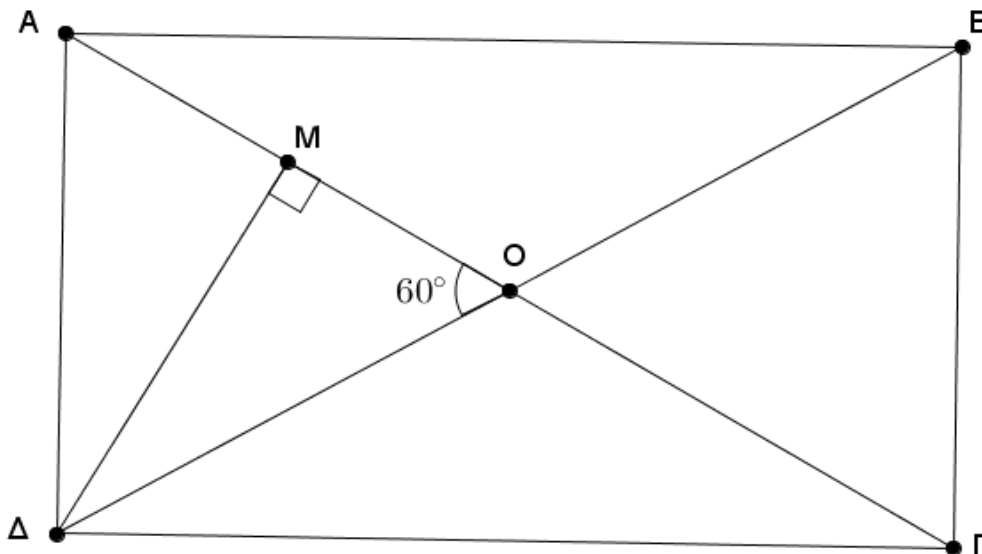
(Μονάδες 7)

β) Αν από το Γ φέρουμε ΓN κάθετη στη BD , να αποδείξετε ότι το $MN\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α)



i. Στο ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ οι διαγώνιοι AG και BD είναι ίσες και διχοτομούνται. Άρα

$OA = OD$, και έτσι το τρίγωνο $AO\Delta$ είναι ισοσκελές με γωνία $\angle AOD = 60^\circ$,

οπότε το $\triangle AOD$ είναι ισόπλευρο (1).

Έτσι, το ύψος DM θα είναι και διάμεσος, άρα το σημείο M είναι μέσο του AO όπου O το κέντρο του ορθογωνίου.

ii. $AM = \frac{1}{2} AO = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} AG \right) = \frac{1}{4} AG$

β) **1^{ος} τρόπος (mathematica):**

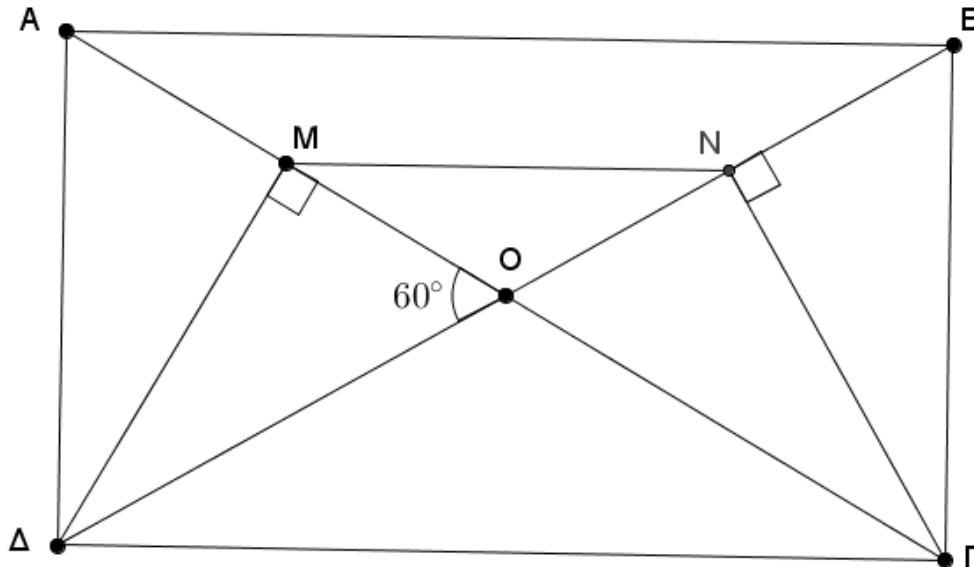
Όμοια με α) i. είναι και N είναι μέσο του BO , άρα $MN \parallel \frac{AB}{2} \Rightarrow MN \parallel \frac{\Gamma\Delta}{2}$ και

συνεπώς το $MN\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο (και όχι παραλληλόγραμμο).

Επίσης, τα ορθογώνια τρίγωνα $OM\Delta$ και $ON\Gamma$ είναι ίσα αφού σ' αυτά είναι:

1) $OD = OG$ (ως μισά των ίσων διαγωνίων AG, BD)

- 2) $\angle MOA = \angle NOG = 60^\circ$ (από υπόθεση), δηλαδή έχουν μία ομόλογη πλευρά και μία προσκείμενη οξεία γωνία ίση. Κατά συνέπεια θα έχουν και όλα τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους ίσα, άρα και $MA = NG$, και τότε το τραπέζιο $MNG\Delta$ είναι ισοσκελές.



2^{ος} τρόπος: Υπολογίζουμε τις γωνίες $\angle M\Delta G, \angle N\Gamma\Delta, \angle AMN$ και προκύπτει ότι:

$\angle M\Delta G + \angle AMN = 180^\circ$, $\angle M\Delta G + \angle N\Gamma\Delta = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ < 180^\circ$, άρα το $MNG\Delta$ είναι τραπέζιο (και όχι παραλληλόγραμμο) αλλά και $\angle M\Delta G = \angle N\Gamma\Delta = 60^\circ$, οπότε το τραπέζιο $MNG\Delta$ είναι ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ (4_6876)

Δίνεται τρίγωνο ΔGB ($AG = GB$). Φέρουμε τα ύψη AK και GL . Αν E το μέσο της πλευράς AG , να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $KE\Lambda$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

- β) Η $K\Lambda$ είναι διχοτόμος της γωνίας BKE .

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

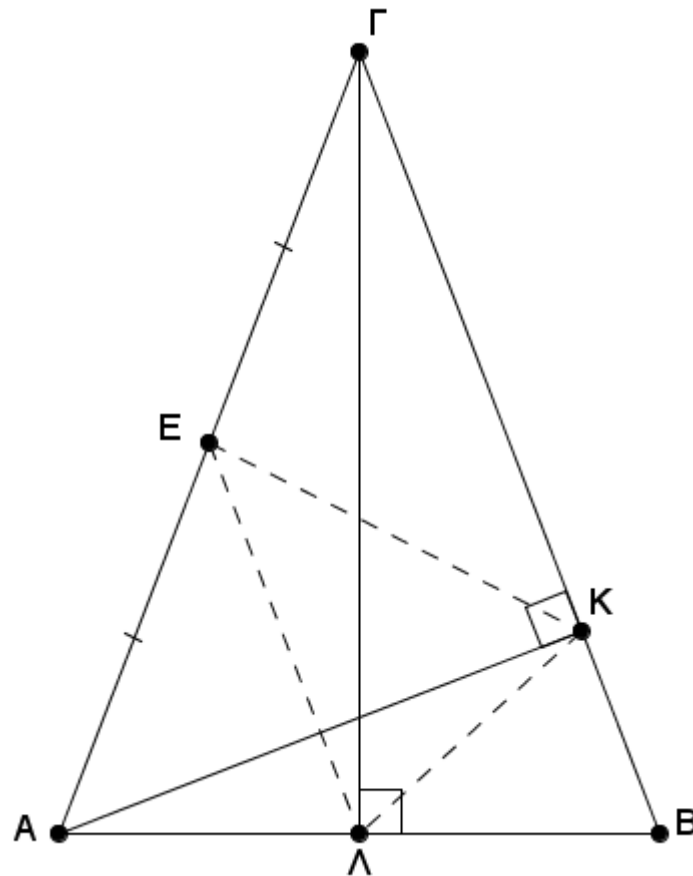
- α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔGK , η διάμεσος KE (E μέσον της AG) αντιστοιχεί στην

$$\text{υποτείνουσα } AG, \text{ άρα είναι } KE = \frac{AG}{2} \quad (1)$$

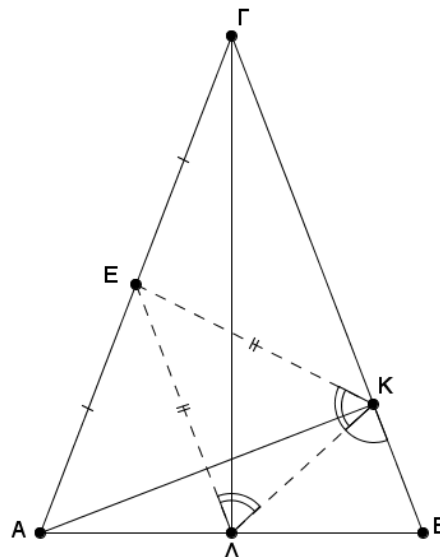
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔGL , η διάμεσος LE (E μέσον της AG) αντιστοιχεί στην

$$\text{υποτείνουσα } AG, \text{ άρα είναι } LE = \frac{AG}{2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) είναι $KE = LE$ και συνεπώς το τρίγωνο $KE\Lambda$ είναι ισοσκελές.



- β) Αφού το τρίγωνο $ΚΕΛ$ είναι ισοσκελές, οι προσκείμενες στην βάση του AB γωνίες θα είναι ίσες, άρα $ΕΚΛ = ΕΛΚ$ (3)



Ακόμη, στο ισοσκελές $ΑΓΒ$, το ύψος $ΓΛ$ θα είναι και διάμεσος, οπότε $Λ$ μέσο της AB . Αλλά και E μέσο της $ΑΓ$, συνεπώς, από θεώρημα θα ισχύει: $ΕΛ \parallel ΒΓ$, οπότε $ΕΛΚ = ΒΚΛ$ (4), ως εντός εναλλάξ με τέμνουσα των παραπάνω παραλλήλων την $ΚΛ$.

Από (3) και (4) είναι $ΕΚΛ = ΒΚΛ$, άρα η $ΚΛ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΒΚΕ$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_7433)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Έστω Ε, Ζ και Η είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τη σχέση των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ να είναι ρόμβος.

(Μονάδες 10)

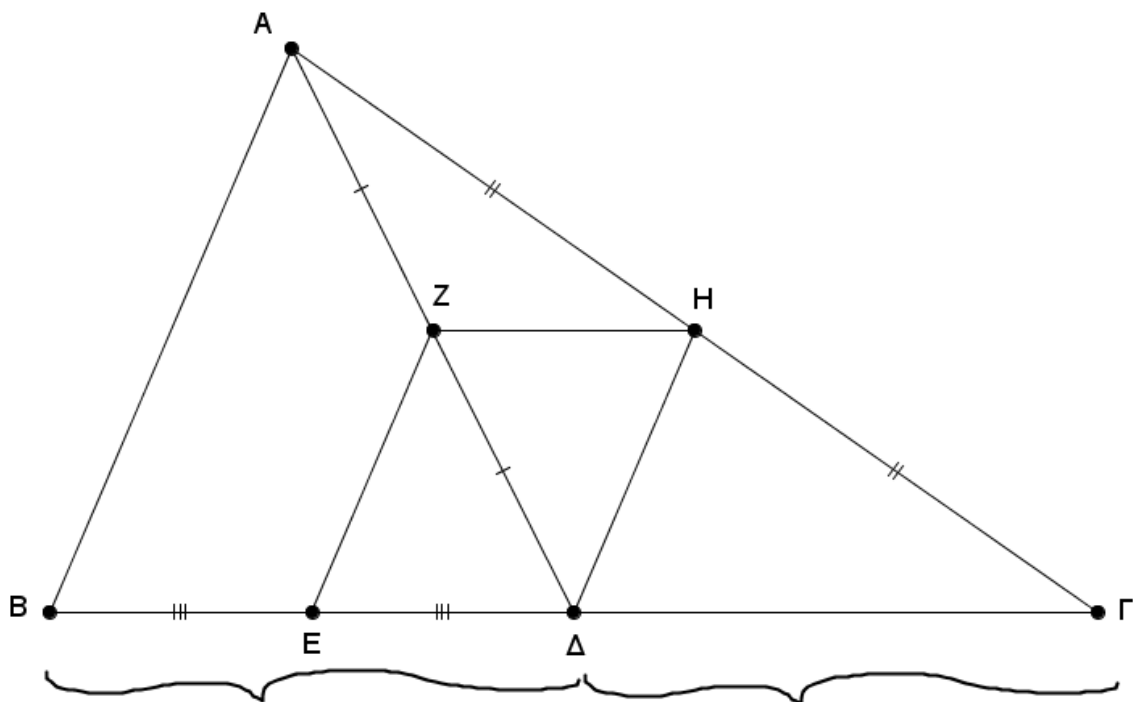
γ) Στην περίπτωση που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο (η γωνία Β ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΔ, Ζ είναι το μέσον της ΑΔ, ενώ Ε το μέσον της ΒΔ οπότε από

$$\text{θεώρημα } EZ = \frac{AB}{2} \quad (1)$$



Ομοίως, στο τρίγωνο ΑΒΓ, Δ είναι το μέσον της ΒΓ, ενώ Η το μέσον της ΑΓ οπότε

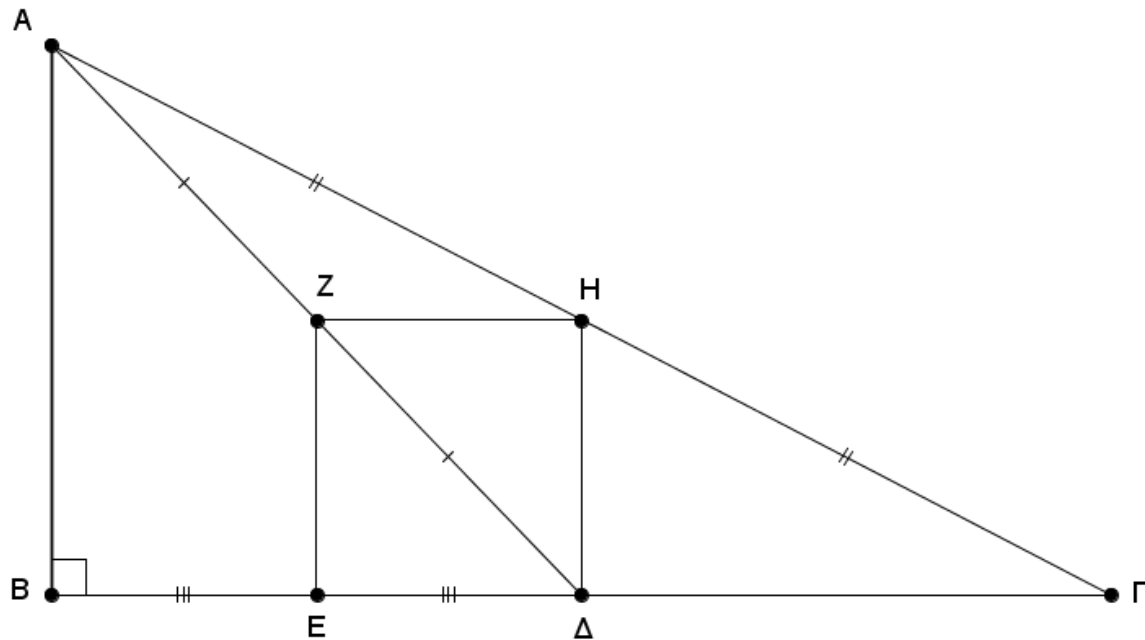
$$\text{από θεώρημα } \Delta H = \frac{AB}{2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) είναι $EZ \parallel \Delta H$, άρα το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Για να είναι το παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ ρόμβος πρέπει και αρκεί δύο διαδοχικές πλευρές του να είναι ίσες, δηλαδή:

$$ZE = \Delta E \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \Delta E \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{BD}{2} \Leftrightarrow AB = BD \Leftrightarrow AB = \frac{BG}{2}$$

γ)



Στην περίπτωση που το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο (η γωνία B ορθή), τότε το παραλληλόγραμμο $DEZH$ θα είναι ορθογώνιο, καθώς θα έχει μία γωνία ορθή μιας και θα ισχύει: $\angle ZED = B = 90^\circ$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ZE, AB με τέμνουσα την $B\Delta$).

Σχόλιο:

Πιθανή σύγχυση με το αν τα ερωτήματα β) και γ) είναι ανεξάρτητα ή το γ) αποτελεί συνέχεια του γ). Αν ήταν η τελευταία περίπτωση, το $DEZH$ θα ήταν ρόμβος με μια ορθή γωνία άρα τετράγωνο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_13527)

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και μ_β, μ_γ οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$, τότε οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση **Π**, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της **Π** και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η **Π** και η **αντίστροφή της** ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Η πρόταση **Π** είναι μία συνεπαγωγή (που να το ξέρει το παιδί αφού η παράγραφος *E.1 της Άλγεβρας Α' Λυκείου είναι εκτός διδακτέας-εξεταστέας ύλης, βλέπε ΦΕΚ 2660 8 Οκτ. 2014, σελ 11;;*) η οποία μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

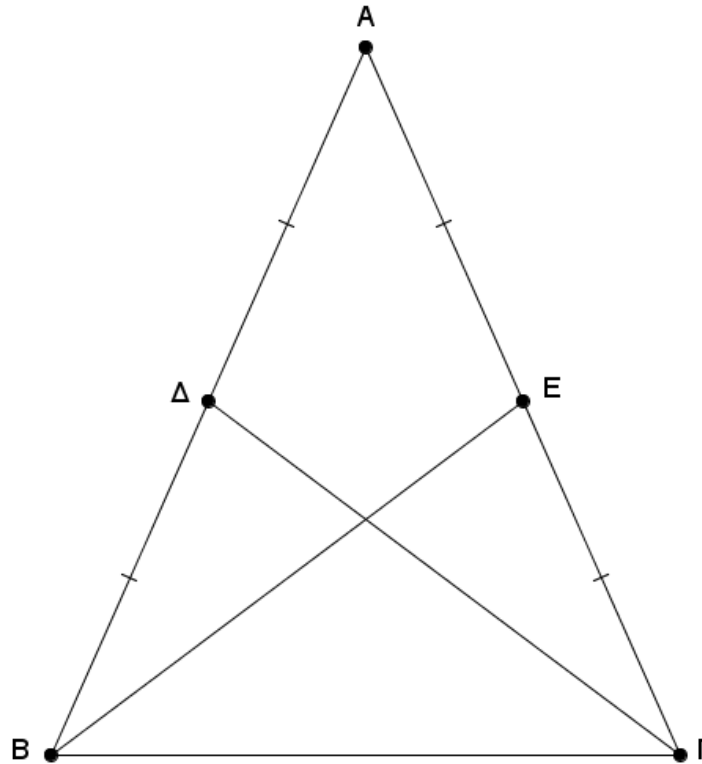
$$\left(\triangle AB\Gamma \text{ ισοσκελές } (\beta = \gamma) \right) \Rightarrow (\mu_\alpha = \mu_\beta)$$

με υπόθεση: $\triangle AB\Gamma$ ισοσκελές ($\beta = \gamma$)

και συμπέρασμα: $\mu_\alpha = \mu_\beta$

Μία συνεπαγωγή δεν ισχύει (δεν είναι αληθής) μόνο στην περίπτωση όπου η υπόθεση είναι αληθής, ενώ το συμπέρασμα όχι.

Έστω, λοιπόν, ότι η υπόθεση είναι αληθής, δηλαδή ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$. Θα ελέγξουμε αν οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AGΕ$, τα οποία έχουν:

- 1) $AB = AG$ (από υπόθεση $\beta = \gamma$)
- 2) $\angle A$ κοινή γωνία
- 3) $AD = AE$ (ως μισά των ίσων πλευρών AB και AG)

Επομένως τα δύο τρίγωνα θα έχουν ίσα λόγω του κριτηρίου Π-Γ-Π, οπότε θα έχουν ίσα και όλα τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους, άρα και $B\Delta = GE$, δηλαδή $\mu_\alpha = \mu_\beta$.

Συνεπώς η συνεπαγωγή είναι αληθής, άρα η πρόταση **II** ισχύει.

β) Η αντίστροφη πρόταση (έστω **P**) της **II** διατυπώνεται ως εξής:

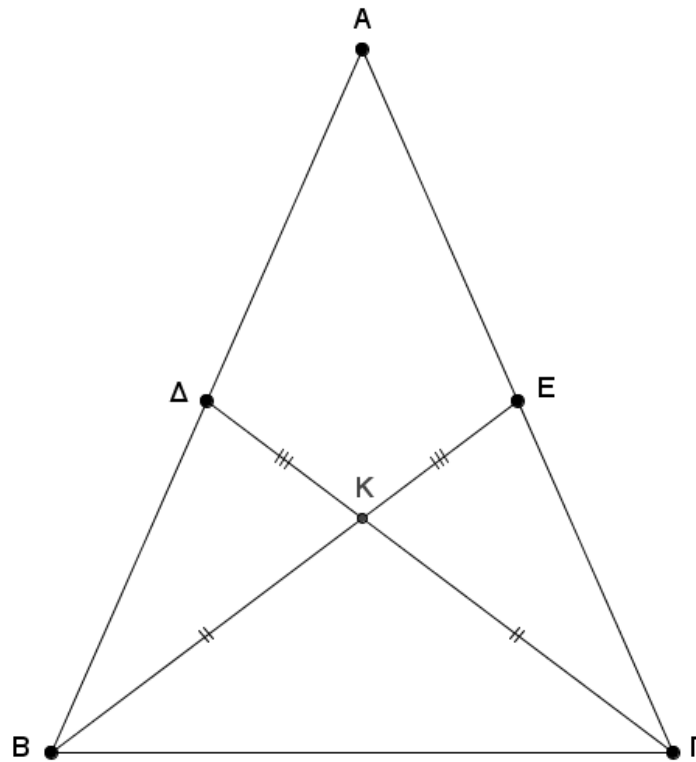
P: Αν οι διάμεσοι μ_β, μ_γ τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσες, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$

και μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$(\mu_\alpha = \mu_\beta) \Rightarrow \left(\triangle AB\Gamma \text{ ισοσκελές } (\beta = \gamma) \right)$$

Έστω, λοιπόν, ότι η υπόθεση είναι αληθής, δηλαδή ότι στο τρίγωνο $AB\Gamma$ οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες, δηλαδή $\mu_\alpha = \mu_\beta$ (1).

Θα ελέγξουμε αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$.

**1^{ος} τρόπος:**

Έστω K το σημείο τομής των διαμέσων BΔ και ΓΕ, άρα K το βαρύκεντρο του τριγώνου ABΓ και συνεπώς θα ισχύει:

$$BK = \frac{2}{3} B\Delta = \frac{2}{3} \mu_{\beta} \stackrel{(1)}{=} \frac{2}{3} \mu_{\gamma} = \frac{2}{3} \Gamma E = \Gamma K \Rightarrow BK = \Gamma K \quad (2) \text{ και } \Delta K = EK \quad (3)$$

Το τρίγωνο BΓK, λόγω της (2), είναι ισοσκελές οπότε $\angle KB\Gamma = \angle K\Gamma B$ (4)

Επίσης, τα τρίγωνα KBE και KΓΔ είναι ίσα λόγω του κριτηρίου Π-Γ-Π, αφού έχουν:

$$1) \quad KB = K\Gamma \quad (2)$$

$$2) \quad \Delta K = EK \quad (3)$$

$$3) \quad \angle BKE = \angle G\Delta K \quad (\text{ως κατακορυφήν})$$

Επομένως τα δύο τρίγωνα θα έχουν ίσα και όλα τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους, άρα και $\angle KBE = \angle K\Gamma\Delta$ (5)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (4) και (5), προκύπτει $\angle B = \angle \Gamma$, οπότε το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$.

Συνεπώς η συνεπαγωγή είναι αληθής, άρα η πρόταση **P** ισχύει.

2^{ος} τρόπος:

Όπως και στον 1^ο τρόπο, $\angle KBE = \angle K\Gamma\Delta$ και έτσι $\angle KBE = \angle K\Gamma\Delta$ (5)

Επίσης, ισχύει ότι $\angle B\Delta A \stackrel{\text{στο } \triangle B\Delta A}{=} 180^\circ - \angle A - \angle B\Delta A \stackrel{(5)}{=} 180^\circ - \angle A - \angle K\Gamma\Delta \stackrel{\text{στο } \triangle \Gamma E}{=} \angle \Gamma E A$, δηλαδή

$$\angle B\Delta A = \angle \Gamma E A \quad (6)$$

Τέλος, τα τρίγωνα ABΔ και AΓΕ είναι ίσα λόγω του κριτηρίου Γ-Π-Γ, καθώς έχουν:

$$1) \quad \angle KBE = \angle K\Gamma\Delta \quad (5)$$

$$2) \quad \angle B\Delta A = \angle \Gamma E A \quad (6)$$

$$3) \quad B\Delta = \Gamma E \quad (1)$$

Επομένως τα δύο τρίγωνα θα έχουν ίσα και όλα τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους, άρα και $AB = \Gamma\Gamma$, δηλαδή $\beta = \gamma$.

Συνεπώς η συνεπαγωγή είναι αληθής, άρα η πρόταση **P** ισχύει.

γ) Εφόσον, από α) και β) οι δυο προτάσεις, η **Π** και η **αντίστροφή της P** ισχύουν, μπορούμε να τις διατυπώσουμε ως ενιαία πρόταση, ως εξής:

«Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$ αν και μόνο αν οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες» ή ισοδύναμα

«Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$ τότε και μόνο τότε οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες» ή ισοδύναμα

«Για να είναι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$, πρέπει και αρκεί οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες» και σχηματικά (στην γλώσσα της Μαθηματικής Λογικής)

$$\left(\hat{AB\Gamma} \text{ ισοσκελές } (\beta = \gamma) \right) \Leftrightarrow (\mu_\alpha = \mu_\beta)$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_2806)

Δύο κύκλοι (K, ρ) , (Λ, R) τέμνονται σε δύο σημεία A, B . Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του A στους δύο κύκλους, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{AB}\Gamma = 90^\circ$

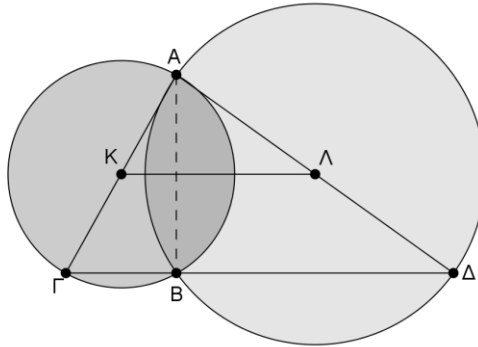
(Μονάδες 5)

β) τα σημεία Γ, B, Δ είναι συνευθειακά.

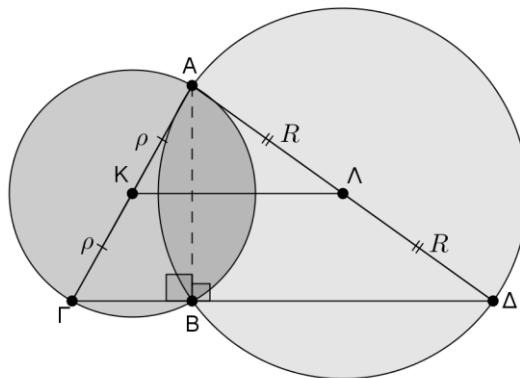
(Μονάδες 10)

γ) το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία $K, \Lambda, \Gamma, \Delta$ είναι τραπέζιο.

(Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

α) Εφόσον τα A, Γ είναι αντιδιαμετρικά σημεία στον (K, ρ) , τότε η $\hat{AB}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο, οπότε: $\hat{AB}\Gamma = 90^\circ$.



β) Όμοια τα A, Δ είναι αντιδιαμετρικά σημεία στον (Λ, R) , οπότε η $\hat{AB}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο, οπότε: $\hat{AB}\Delta = 90^\circ$.

Άρα

$$\hat{AB}\Gamma + \hat{AB}\Delta = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ, \text{ οπότε } \Gamma, B, \Delta \text{ είναι συνευθειακά.}$$

γ) Τα K και Λ αποτελούν τα μέσα των $A\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα. Άρα στο $\hat{A}\Gamma\Delta$, η $K\Lambda$ συνδέει τα μέσα των δύο πλευρών του, οπότε $K\Lambda \parallel \Gamma\Delta$. Οι $K\Gamma$ και $\Lambda\Delta$ δεν είναι παράλληλες αφού τέμνονται στο A , οπότε το $K\Lambda\Delta\Gamma$ είναι τραπέζιο,

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ : Για το α) και β) ερωτήματα χρησιμοποιούμε το πόρισμα ii) στη σελ. 124

Για το γ) ερώτημα χρησιμοποιούμε το θεώρημα I). στη σελ. 104.

Παρόμοια άσκηση βιβλίου : α), β) Ίδια με την ασκ. Αποδ. 2 /σελ. 130, β) Εμπ. 2/σελ. 111, Αποδ. 2,4/σελ. 111.

ΑΣΚΗΣΗ (4_2810)

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα ρ . Τα τμήματα ΓZ και BZ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία Γ και B αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΘH είναι κάθετο στο τμήμα AZ στο Z , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $ZB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

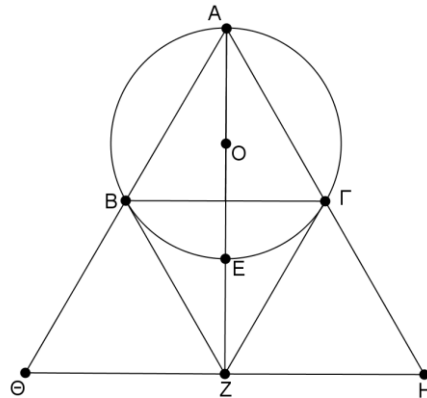
(Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο $A\Gamma ZB$ είναι ρόμβος.

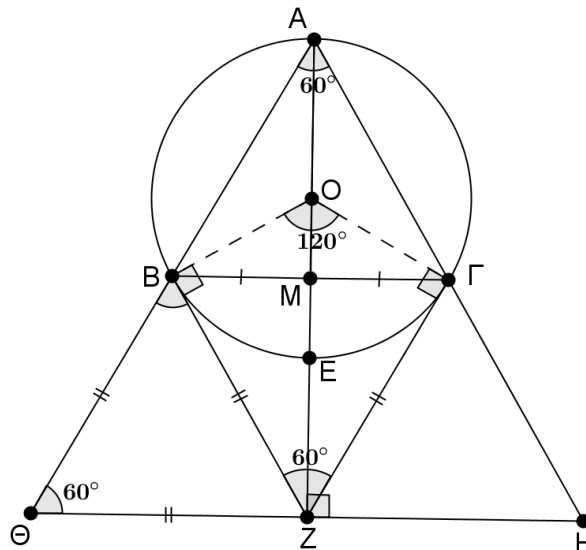
(Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο $B\Gamma H\Theta$ είναι τραπέζιο, με $B\Theta = BZ$ και $\Theta H = 2B\Gamma$.

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ



α) Στο ισοπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε ότι η $\hat{A}=60^\circ$ είναι εγγεγραμμένη στο $\hat{B\Gamma}$. Άρα η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $\hat{BO\Gamma}=120^\circ$. Οπότε στο τετράπλευρο $OBZ\Gamma$ θα έχουμε:

$$\hat{\Gamma ZB}=360^\circ - \hat{ZBO} - \hat{BO\Gamma} - \hat{\Gamma\Gamma O}=360^\circ - 90^\circ - 120^\circ - 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma ZB}=60^\circ$$

Επιπλέον τα BZ και $Z\Gamma$ είναι ίσα μεταξύ τους (εφαπτόμενα τμήματα από το ίδιο σημείο), οπότε: $BZ\Gamma = \text{ισόπλευρο}$.

β) Επειδή $BZ\Gamma = \text{ισόπλευρο} \Leftrightarrow BZ = Z\Gamma = B\Gamma = AB = A\Gamma$, οπότε το $A\Gamma ZB$ θα είναι παραλληλόγραμμο (απέναντι πλευρές ίσες) αλλά και ρόμβος (διαδοχικές πλευρές ίσες).

γ) Έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} AZ \perp B\Gamma \text{ (οι διαγ. ρόμβου είναι κάθετες)} \\ AZ \perp \Theta H \text{ (υπόθεση)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow B\Gamma // \Theta H \Leftrightarrow B\Gamma H\Theta = \text{τραπέζιο}$$

Επίσης

$$\left. \begin{array}{l} B\Gamma // \Theta H \Leftrightarrow \hat{AB\Gamma} = \hat{B\Theta H} = 60^\circ \text{ (εντός εκτός επι τα αυτά)} \\ BZ // AH \Leftrightarrow \hat{\Theta BZ} = \hat{A} = 60^\circ \text{ (εντός εκτός επι τα αυτά)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \hat{BZ\Theta} = 60^\circ$$

Άρα

$$BZ\Theta = \text{ισόπλευρο} \Leftrightarrow BZ = B\Theta = \Theta Z.$$

Επιπλέον θα ισχύει

$$B\Gamma = BZ = \Theta Z (1).$$

Όμοια

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\Gamma ZH} = \text{ισόπλευρο} \Leftrightarrow \Gamma Z = ZH = \Gamma H \\ \text{και } \Gamma Z = B\Gamma \end{array} \right\} \Leftrightarrow B\Gamma = ZH (2)$$

Άρα

$$\Theta H = \Theta Z + ZH \stackrel{(1),(2)}{=} 2B\Gamma.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ : Για τα α) ερώτημα χρησιμοποιούμε το θεώρημα II, στη σελ. 62 και τη σχέση για το άθροισμα γωνιών πολυγώνου, στη σελ. 85.

Για το β) ερώτημα χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες ρόμβου, στη σελ. 101.

Για το γ) ερώτημα χρησιμοποιούμε τον ορισμό τραπέζιου, στη σελ. 112.

Παρόμοια άσκηση βιβλίου : α) Αποδ. 1,2,3 /σελ. 63, β) Εμπ. 4/σελ. 103, Αποδ. 1/σελ. 104.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3714)

Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε τα ίσα τόξα AB και $A\Gamma$, το καθένα ίσο με 120° .

Έστω Δ και E τα μέσα των τόξων AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοπλευρο.

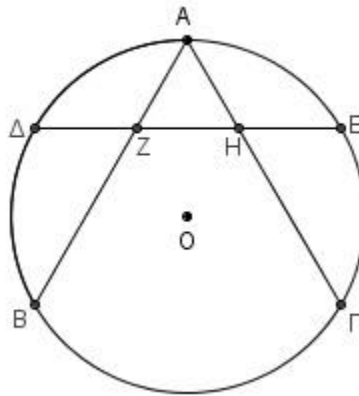
Μονάδες 8

β) Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΕ είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους.

Μονάδες 10

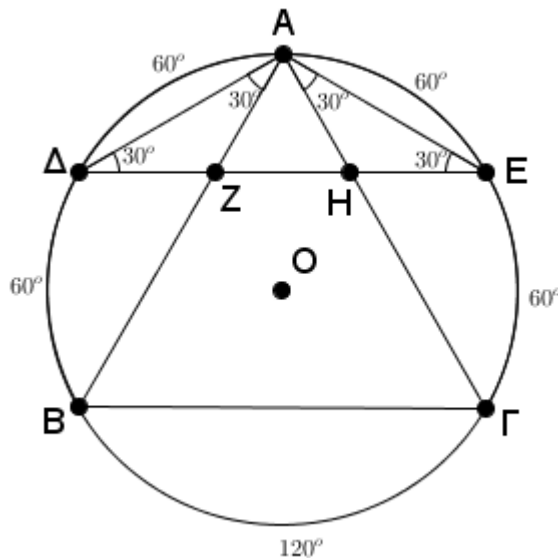
γ) Η χορδή ΔΕ τριχοτομείται από τις χορδές ΑΒ και ΑΓ.

Μονάδες 7



ΛΥΣΗ

α) Αφού το τόξο ΑΒ είναι ίσο με το τόξο ΑΓ, τότε και οι αντίστοιχες χορδές τους είναι ίσες, δηλαδή $AB = AG$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Επιπλέον η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο ΒΓ που είναι $360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ$, άρα $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 60^\circ$, επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.



β) Αφού τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των τόξων ΑΒ και ΑΓ, τότε είναι:

$$A\Delta = \Delta B = A\epsilon = \epsilon\Gamma = 60^\circ$$

οπότε έχουμε $A\Delta = A\epsilon$.

Είναι $\widehat{A\Delta\epsilon} = \widehat{A\epsilon\Delta}$ και $\widehat{\Delta A B} = \widehat{\epsilon A \Gamma}$ ως εγγεγραμμένες γωνίες σε ίσα τόξα. Με βάση τις παραπάνω ισότητες τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΕ είναι ίσα.

Επιπλέον έχουμε:

$$\widehat{A\Delta\epsilon} = \widehat{A\epsilon\Delta} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ, \widehat{\Delta A B} = \widehat{\epsilon A \Gamma} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

και

$$\widehat{\Delta Z A} = \widehat{A H \epsilon} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

γ) Με βάση τα παραπάνω μέτρα των γωνιών προκύπτουν ότι τα ίσα τρίγωνα $AZ\Delta$ και AHE είναι ισοσκελή, τότε $\Delta Z = ZA = AH = HE$ (1)

Επιπλέον το τρίγωνο AZH είναι ισόπλευρο αφού έχει δύο πλευρές ίσες και μια γωνία του είναι 60° από το πρώτο ερώτημα, άρα $AZ = ZH = AH$ (2).

Τελικά από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\Delta Z = ZH = HE$, δηλαδή η χορδή ΔE τριχοτομείται από τις χορδές AB και AG .

ΑΣΚΗΣΗ (4_3731)

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και σημείο M εξωτερικό του. Από το M φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB του κύκλου και έστω ότι το σημείο Γ είναι το συμμετρικό του O ως προς την ευθεία MB .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AMBO$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

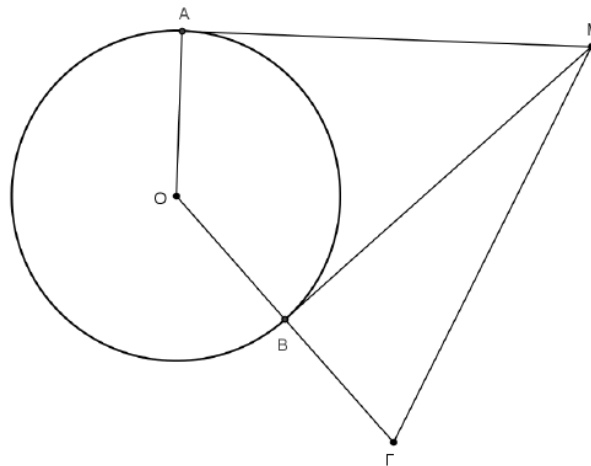
Μονάδες 7

β) Να προσδιορίσετε το κέντρο Λ του περιγεγραμμένου κύκλου του τετράπλευρου $AMBO$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

γ) Να αποδείξετε ότι $BA \parallel M\Gamma$.

Μονάδες 9

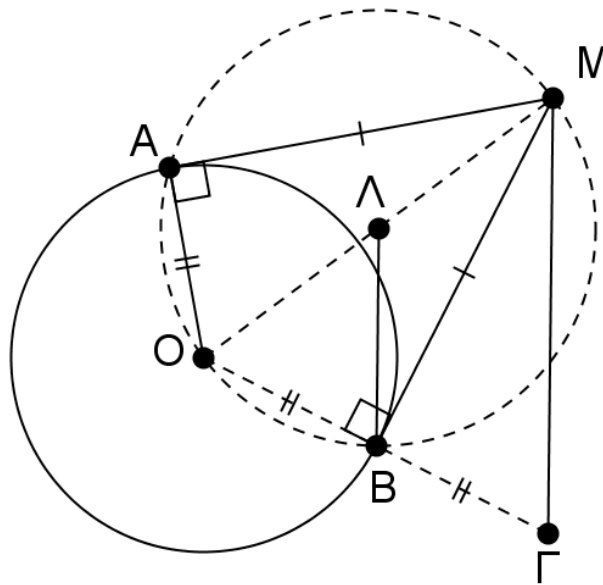


ΛΥΣΗ

α) Τα MA, MB είναι εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο και είναι κάθετα στις ακτίνες OA, OB αντίστοιχα, οπότε

$$\hat{MAO} + \hat{MBO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

συνεπώς το τετράπλευρο $AMBO$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.



β) Φέρνουμε τη ΜΟ. Επειδή είναι $\widehat{ΜΑΟ} = \widehat{ΜΒΟ} = 90^\circ$ η ΜΟ είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τετράπλευρου ΑΜΒΟ, Το ζητούμενο κέντρο Λ του περιγεγραμμένου κύκλου είναι το μέσο της διαμέτρου ΜΟ γιατί είναι

$$\Lambda O = \Lambda M = \Lambda B = \Lambda A,$$

δηλαδή γιατί το Λ ισαπέχει από τις κορυφές του τετράπλευρου $AMBO$.

γ) Στο τρίγωνο ΜΟΓ έχουμε ότι το Β είναι το μέσο του ΟΓ επειδή το Γ είναι το συμμετρικό του Ο ως προς το Β και το Λ είναι το μέσο του ΜΟ αφού η ΟΜ διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου στο τετράπλευρο ΑΜΒΟ, οπότε είναι

$$B\Lambda // \frac{M\Gamma}{2} \quad \dot{\eta} \quad B\Lambda // M\Gamma$$

ΑΣΚΗΣΗ (4 3771)

Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου AB και δύο χορδές του AG και BD , οι οποίες τέμνονται στο σημείο E . Φέρουμε $EZ \perp AB$. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες $\Delta\hat{A}\Gamma$ και $\Delta\hat{B}\Gamma$ είναι ίσες.

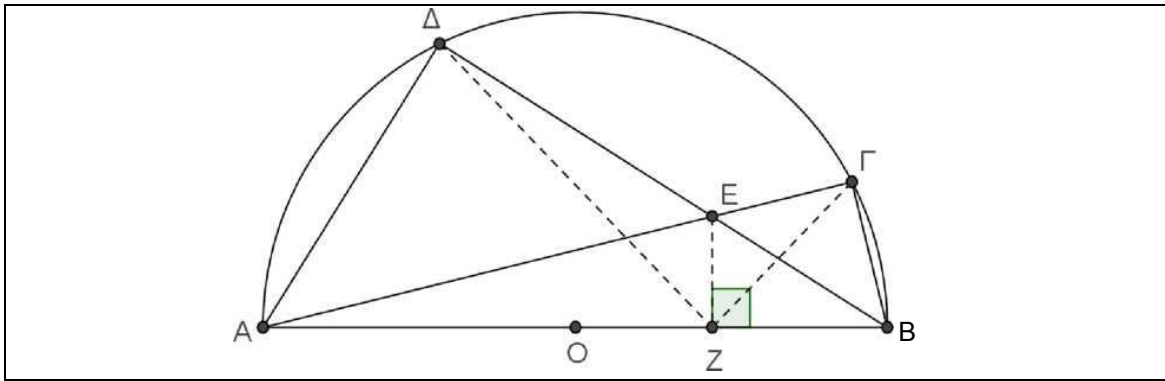
Μονάδες 7

β) Τα τετράπλευρα ΑΔΕΖ και ΕΖΒΓ είναι εγγράψιμα.

Μονάδες 9

γ) Η EZ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{Z}\Gamma$.

Μονάδες 9

**Λύση**

α) Είναι $\Delta A\Gamma = \Delta B\Gamma$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\Delta\Gamma$

β) Είναι $\angle A\Delta B = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο

Επίσης $\angle AZE = 90^\circ$ άρα $\angle AZE + \angle A\Delta B = 180^\circ$ οπότε το τετράπλευρο $A\Delta EZ$ είναι εγγράψιμο

Ακόμη $\angle A\Gamma B = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο

Επίσης $\angle BZE = 90^\circ$ άρα $\angle BZE + \angle A\Gamma B = 180^\circ$ οπότε το τετράπλευρο $EZB\Gamma$ είναι εγγράψιμο

γ) Αφού το τετράπλευρο $E\Gamma BZ$ είναι εγγεγραμμένο και η πλευρά $B\Gamma$ φαίνεται από τις γωνίες $\angle BZ\Gamma$ και $\angle \Gamma EB$ έχουμε $\angle BZ\Gamma = \angle \Gamma EB$ (1)

Επιπλέον αφού το $A\Delta EZ$ είναι εγγεγραμμένο και η πλευρά $A\Delta$ φαίνεται από τις γωνίες $\angle AZ\Delta$ και $\angle A\Delta E$ έχουμε $\angle AZ\Delta = \angle A\Delta E$ (2)

Όμως

$$\angle \Gamma EB = \angle A\Delta E \text{ ως κατακορυφήν}$$

Από (1) και (2) λοιπόν έχουμε

$$\angle BZ\Gamma = \angle AZ\Delta$$

Οπότε $\angle EZ\Gamma = \angle EZ\Delta$ ως συμπληρώματα ίσων γωνιών άρα η EZ είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle \Delta Z\Gamma$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3787)

Έστω A, B, Γ συνευθειακά σημεία με $AB = 2B\Gamma$. Θεωρούμε το μέσο M της AB . Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $\Delta AB, \Delta BE\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $A\Delta EB$ είναι τραπέζιο ($A\Delta // BE$).

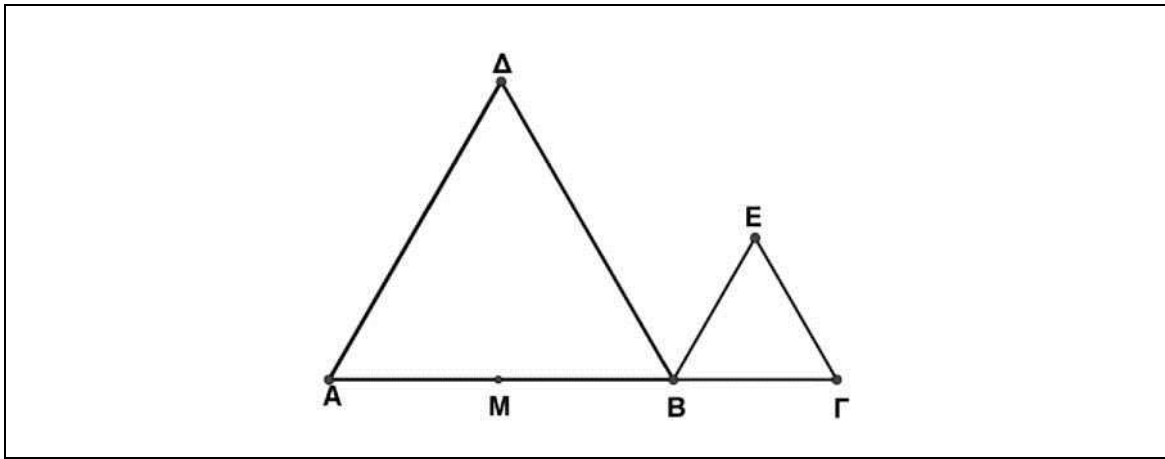
Μονάδες 9

β) Τα τρίγωνα $\Delta MB, \Delta EB$ είναι ίσα.

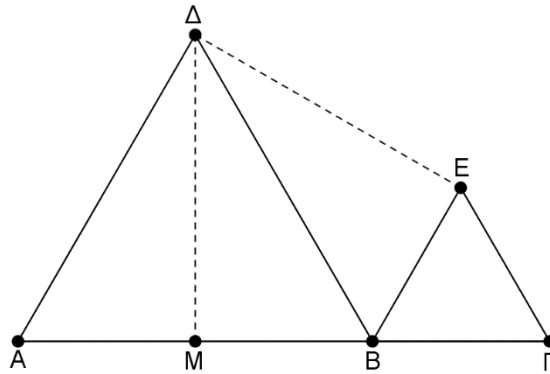
Μονάδες 8

γ) Το τετράπλευρο ΔMBE είναι εγγράψιμο.

Μονάδες 8



Λύση



α) Αφού το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο έχουμε

$$\angle A\Delta B = 60^\circ$$

Αφού το τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι ισόπλευρο έχουμε

$$\angle BE\Gamma = 60^\circ$$

Άρα $\angle A\Delta B = \angle BE\Gamma$ και επειδή είναι εντός, εκτός των $A\Delta$, BE και επί τα αυτά της AG έχουμε ότι $A\Delta \parallel BE$ οπότε το τετράπλευρο $A\Delta EB$ είναι τραπέζιο

β) Αφού M μέσο AB έχουμε

$$BM = \frac{AB}{2} = \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma$$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AMB και ΔEB

- 1) AB κοινή
- 2) $BM = B\Gamma$ (το δείξαμε παραπάνω)
- 3) $\angle MB\Delta = \angle \Gamma BE = 60^\circ$

Από Π-Γ-Π είναι $\hat{A}MB = \hat{\Delta}EB$

γ) Αφού το τρίγωνο ΔMB είναι ισόπλευρο η διάμεσος ΔM θα είναι και ύψος άρα $\Delta M \perp AB$ οπότε $\angle MB\Delta = 90^\circ$

Επίσης $\hat{A}MB = \hat{\Delta}EB$ άρα $\angle MB\Delta = \angle \Gamma BE = 90^\circ$

Έτσι λοιπόν στο τετράπλευρο ΔMBE είναι $\angle MB\Delta + \angle \Gamma BE = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ άρα είναι εγγράψιμο

ΑΣΚΗΣΗ (4_3793)

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα τρίγωνα AEB , $A\Gamma\Delta$. Ονομάζουμε Z το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων $B\Delta$, ΓE .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AE\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι ίσα και να γράψετε τα ζεύγη των ίσων γωνιών.

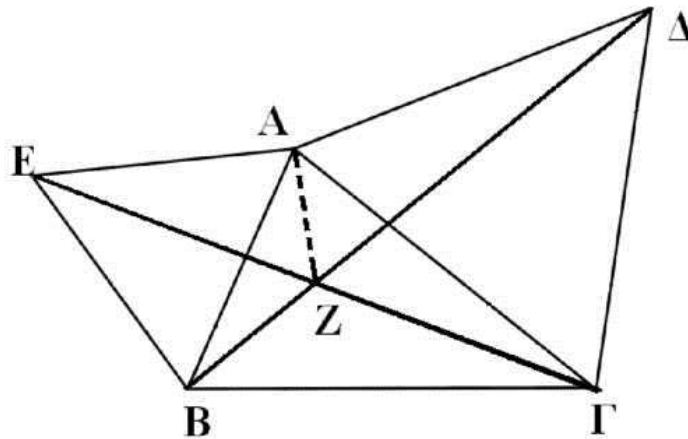
Μονάδες 10

β) Τα τετράπλευρα $AZ\Gamma\Delta$, $AZBE$ είναι εγγράψιμα.

Μονάδες 10

γ) Η γωνία είναι 120° .

Μονάδες 5

**Λύση**

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AE\Gamma$ και $AB\Delta$

$$1) \angle EAG = \angle BAD = \angle BAG + 60^\circ$$

$$2) AG = AD \text{ (αφού το τρίγωνο } A\Gamma\Delta \text{ είναι ισόπλευρο)}$$

$$3) AE = AB \text{ (αφού το τρίγωνο } AEB \text{ είναι ισόπλευρο)}$$

Από Π-Γ-Π $\triangle EAG = \triangle BAD$ οπότε

$$\angle EAG = \angle BAD, \angle AEG = \angle ABD \text{ και } \angle AGE = \angle ADB$$

β) Αφού $\angle AGE = \angle ADB$ η πλευρά AZ στο τετράπλευρο $AZ\Gamma\Delta$ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Γ και Δ υπό ίσες γωνίες άρα το $AZ\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο.

Αφού $\angle AEG = \angle ABD$ η πλευρά AZ στο τετράπλευρο $AZBE$ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές E και B υπό ίσες γωνίες άρα το $AZBE$ είναι εγγράψιμο.

γ) Αφού $AZ\Gamma\Delta$ εγγράψιμο είναι

$$\angle AZB + \angle AEB = 180^\circ \Leftrightarrow \angle AZB + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle AZB = 120^\circ$$

Αφού $AZBE$ εγγράψιμο είναι

$$\angle AZ\Gamma + \angle A\Gamma\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow \angle AZ\Gamma + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle AZ\Gamma = 120^\circ$$

Όμως

$$\angle AZ\Gamma + \angle AZB + \angle BZ\Gamma = 360^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + 120^\circ + \angle BZ\Gamma = 360^\circ \Leftrightarrow \angle BZ\Gamma = 120^\circ$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_3800)

Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ και E των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ώστε να είναι $A\Delta = GE$. Έστω O το σημείο τομής των $\Gamma\Delta$ και BE .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\widehat{B\Gamma E} = \widehat{\Gamma\Delta A}$.

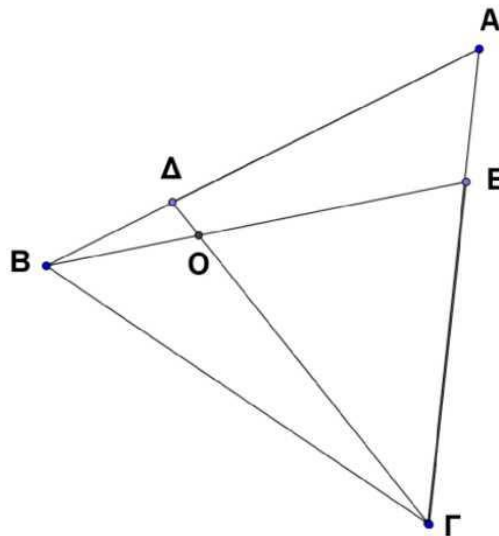
Μονάδες 10

ii. $\widehat{B\hat{O}\Gamma} = 120^\circ$

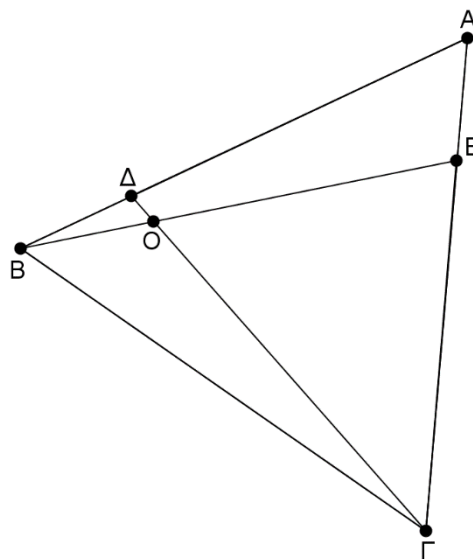
Μονάδες 10

β) Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο $AEOD$ είναι εγγράψιμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5



Λύση



α) i) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $B\Gamma E$ και $\Gamma\Delta A$

- $GE = A\Delta$ (από δεδομένα)
- $\widehat{B\Gamma A} = \widehat{BA\Gamma} = 60^\circ$ (το $\triangle AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο)
- $B\Gamma = A\Gamma$ (το $\triangle AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο)

Από Π-Γ-Π είναι $\triangle BE\Gamma = \triangle \Gamma \Delta A$ άρα και $BE\Gamma = \Gamma \Delta A$

ii) Η $\angle BO\Gamma$ είναι εξωτερική γωνία της $\triangle GOE$ στο $\angle O$ οπότε είναι

$$\angle BO\Gamma = \angle GEO + \angle EGO \stackrel{\angle GEO = BE\Gamma}{=} BE\Gamma + \angle AGO \stackrel{BE\Gamma = \Gamma \Delta A}{=} \Gamma \Delta A + \angle AGO \quad (1)$$

Στο $\triangle \Gamma \Delta A$ έχουμε

$$\Gamma \Delta A + \angle AGO + \angle \Delta A\Gamma = 180^\circ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \angle BO\Gamma + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BO\Gamma = 120^\circ$$

β) Είναι $\angle \Delta OE = \angle BO\Gamma = 120^\circ$ (ως κατακορυφήν) άρα στο τετράπλευρο $AEOD$ έχουμε

$$\angle \Delta OE + \angle \Delta AE = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

οπότε το $AEOD$ είναι εγγράψιμο αφού δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές

ΑΣΚΗΣΗ (4_3817)

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $AGZH$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\angle EAH = \angle AB\Gamma + \angle A\Gamma B$

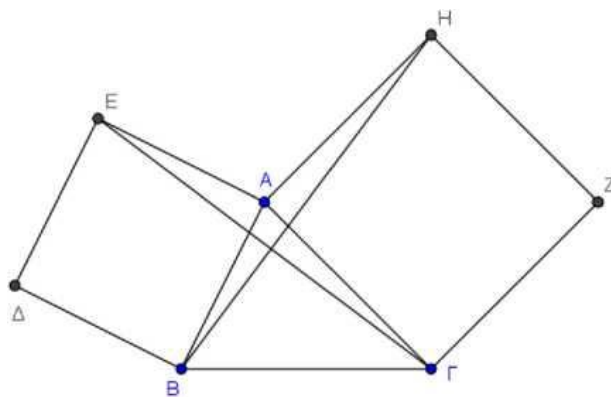
Μονάδες 8

β) $EG = BH$

Μονάδες 9

γ) Η EG είναι κάθετη στη BH

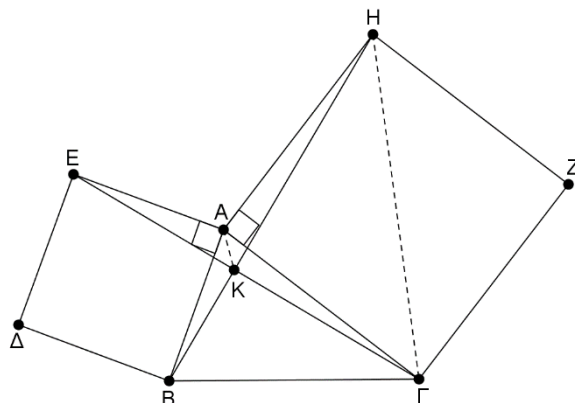
Μονάδες 8



Λύση

α) Είναι

$$\angle EAH = 360^\circ - \angle EAB - \angle BAH - \angle HAH = 360^\circ - 90^\circ - \angle BAH - 90^\circ \Rightarrow \angle EAH = 180^\circ - \angle BAH \quad (1)$$



Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \Leftrightarrow \angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε

$$EAH = AB\Gamma + A\Gamma B$$

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΕΑΓ και ΒΑΗ

- $EA=AB$ (πλευρές του τετραγώνου $AE\Delta B$)
- $AG=AH$ (πλευρές του τετραγώνου $AGZH$)
- $EA\Gamma = BAH = 90^\circ + BA\Gamma$

Από Π-Γ-Π είναι $\overset{\Delta}{\text{E}}\overset{\Delta}{\text{A}}\overset{\Delta}{\text{Γ}} = \overset{\Delta}{\text{A}}\overset{\Delta}{\text{B}}\overset{\Delta}{\text{H}}$ άρα ΕΓ=ΒΗ

γ) Έστω ότι ΕΓ, ΒΗ τέμνονται στο σημείο Κ

Αφού $\hat{E}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{B}\hat{H}$ είναι $E\Gamma A = BHA$ δηλαδή $K\Gamma A = KHA$ οπότε στο τετράπλευρο $AH\Gamma K$ η πλευρά AK φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες άρα το $AH\Gamma K$ είναι εγγράψιμο οπότε η πλευρά $H\Gamma$ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες. Έτσι λοιπόν $\Gamma KH = \Gamma AH = 90^\circ$ άρα η $E\Gamma$ είναι κάθετη στη BH .

ΑΣΚΗΣΗ (4 3919)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και AD, BE τα ύψη του. Να αποδείξετε ότι:

$$a) \quad B\Gamma = 2E\Delta$$

Μονάδες 6

$$\beta) \text{ BE}\Delta = \frac{A}{2}$$

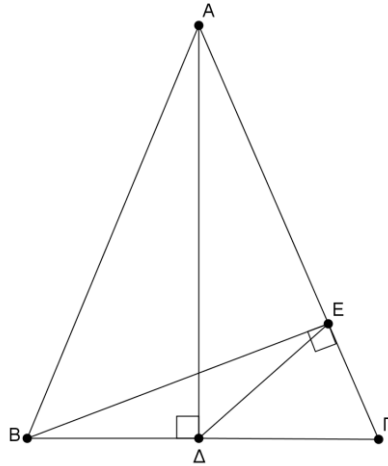
Μονάδες 7

γ) Το τετράπλευρο $AE\Delta B$ είναι εγγράψιμο

Μονάδες 6

δ) $ABE = A\Delta E$

Μονάδες 6

**Λύση**

α) Το ύψος $A\Delta$ που αντιστοιχεί στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου είναι και διάμεσος, δηλαδή το Δ είναι μέσο του $B\Gamma$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $BE\Gamma$ το $E\Delta$ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα $B\Gamma$, έτσι

$$E\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2E\Delta$$

β) Το τετράπλευρο $AE\Delta B$ είναι εγγράψιμο αφού η πλευρά του AB φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Δ, E υπό ορθή γωνία. Άρα

$$BE\Delta = BA\Delta \Leftrightarrow BE\Delta = \frac{A}{2}$$

γ) Το τετράπλευρο $AE\Delta B$ είναι εγγράψιμο από το (β) ερώτημα.

δ) Είναι $ABE = A\Delta E$ αφού το τετράπλευρο $AE\Delta B$ είναι εγγράψιμο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3961)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία A ορθή. Φέρνουμε τη διάμεσο AM και σε τυχαίο σημείο K την κάθετη στην AM η οποία τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Αν H είναι το μέσο του ΔE να αποδείξετε ότι:

α) $B = BAM$

(Μονάδες 8)

α) $A\hat{\Delta}H = \Delta\hat{A}H$

(Μονάδες 9)

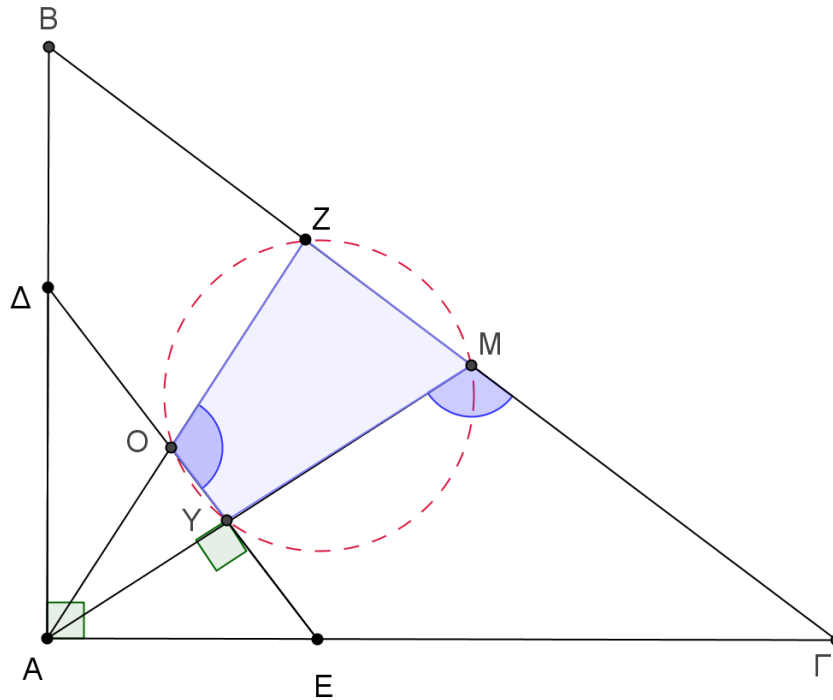
γ) Η ευθεία AH τέμνει κάθετα τη $B\Gamma$

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Επειδή η ΑΜ είναι η διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, θα είναι $ΑΜ = ΜΒ$ και κατά συνέπεια $Β = ΒΑΜ$

β)



Ομοίως η ΑΗ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΕ, οπότε

$$ΑΗ = ΗΔ \Leftrightarrow \hat{ΑΛΗ} = \hat{ΔΑΗ}$$

γ) Έστω ότι η ΑΗ τέμνει τη ΒΓ στο Ζ. Είναι:

$$\hat{ΑΜΓ} = Β + \hat{ΜΑΒ} \stackrel{(α)}{=} 2\hat{ΜΑΒ} \Leftrightarrow \hat{ΜΑΒ} = \frac{\hat{ΑΜΓ}}{2} \quad (1)$$

(ως εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΑΜΒ)

$$\hat{ΚΗΖ} = \hat{ΔΗΑ} = 180^\circ - 2\hat{ΑΛΗ} \Leftrightarrow \hat{ΑΛΗ} = \frac{180^\circ - \hat{ΚΗΖ}}{2} \quad (2)$$

(από το ισοσκελές τρίγωνο ΗΑΔ.

Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΚ έχουμε:

$$\hat{ΑΛΗ} = \hat{ΑΛΚ} = 90^\circ - \hat{ΚΑΔ} = 90^\circ - \hat{ΜΑΒ} \stackrel{(1),(2)}{\Leftrightarrow} \frac{180^\circ - \hat{ΚΗΖ}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{ΑΜΓ}}{2}$$

Άρα:

$$\hat{ΚΗΖ} = \hat{ΑΜΓ},$$

οπότε το τετράπλευρο ΚΗΖΜ είναι εγγράψιμο (μία γωνία του είναι ίση με την απέναντι εσωτερική).

Επειδή όμως $\hat{Κ} = 90^\circ$, θα είναι και $AZ \perp B\Gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_3966)

Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ με $\angle A = 90^\circ$, $\angle \hat{\Delta} = 90^\circ$ και M, N τα μέσα των $B\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $AM = M\Delta$.

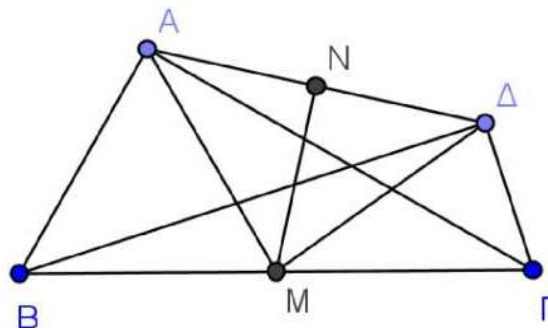
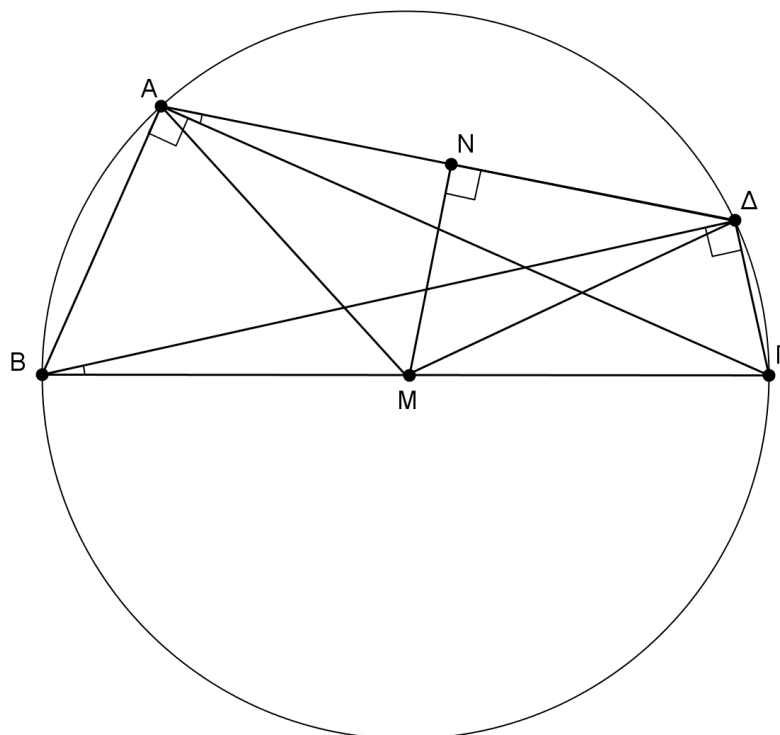
(Μονάδες 10)

β) Η MN είναι κάθετη στην $A\Delta$.

(Μονάδες 10)

γ) $\angle B\Delta = \angle \Gamma A\Delta$

(Μονάδες 5)

**Λύση**

α) Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο αφού η πλευρά $B\Gamma$ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές κάτω από ίσες γωνίες.

Επίσης, επειδή $\angle A = 90^\circ$, το κέντρο του κύκλου είναι το μέσον M της $B\Gamma$. Κατά συνέπεια $AM = M\Delta$ ως ακτίνες του κύκλου.

β) Εφόσον το N είναι πλέον μέσο χορδής, το MN είναι απόστημα και επομένως είναι κάθετο στην AD .

γ) $\Gamma B\Delta = \Gamma A\Delta$ διότι είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν στο ίδιο τόξο

ΑΣΚΗΣΗ (4_4307)

Θεωρούμε κύκλο κέντρου O , με διάμετρο $B\Gamma$. Από σημείο A του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη (ε) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$. Από τα σημεία B, Γ φέρουμε τα τμήματα $B\Delta, \Gamma E$ κάθετα στην ευθεία (ε) .

α) Να αποδείξετε ότι BA και ΓA είναι διχοτόμοι των γωνιών $\Delta B\Gamma$ και $E\Gamma B$ αντίστοιχα.

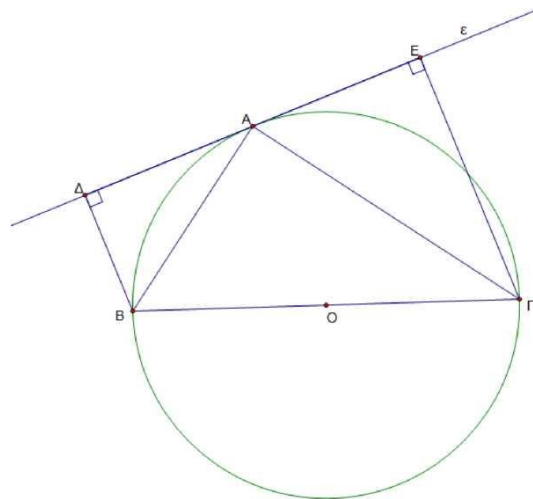
(Μονάδες 8)

β) Αν AE είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι $A\Delta = AE = AZ$

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $B\Delta + \Gamma E = B\Gamma$.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Είναι $B_1 = A_2$ ως γωνία χορδής – εφαπτομένης και :

$$B_2 = 90^\circ - A_1 = 90^\circ - (180^\circ - B\hat{A}\Gamma - A_2) = 90^\circ - 180^\circ + 90^\circ + A_2 = A_2$$

Επομένως $B_1 = B_2$, οπότε η BA είναι διχοτόμος.

Ομοίως για την ΓA .

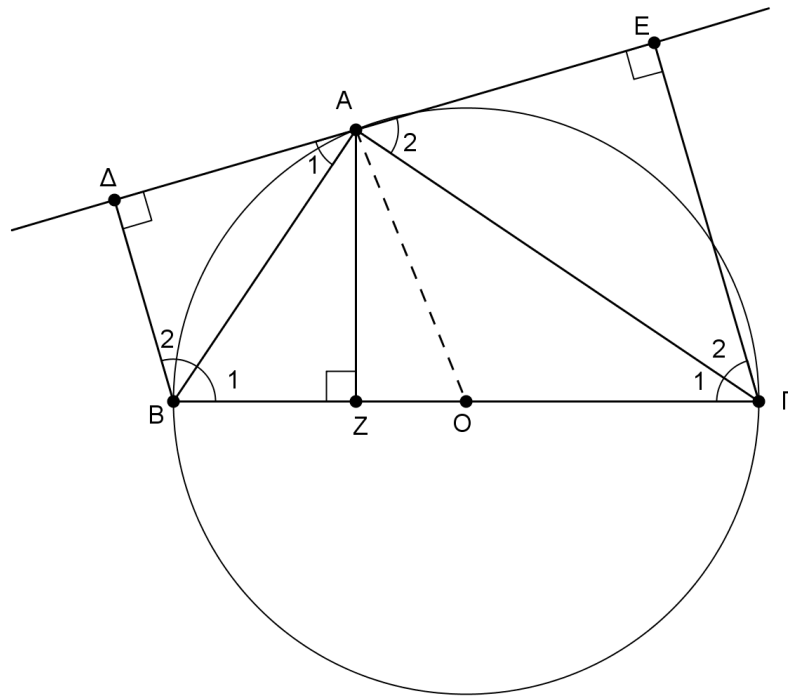
β) Το τετράπλευρο $\Delta B\Gamma E$ είναι τραπέζιο αφού $\Delta B // \Gamma E$ ως κάθετες στην ίδια ευθεία. Ακόμα $OA \perp \Delta E$, οπότε $OA // \Delta B // \Gamma E$ κι αφού το O είναι μέσον της $B\Gamma$, η OA είναι διάμεσος του τραπεζίου.

Επομένως $A\Delta = AE$

Τότε :

$$\Delta B + \Gamma E = 2 \cdot AO = 2 \cdot O\Gamma = OB + O\Gamma = B\Gamma$$

Ακόμα από την ισότητα των τριγώνων $\triangle B\Delta, \triangle BAZ$, έχουμε $A\Delta = AZ$ και τελικά $A\Delta = AZ = AE$



γ) Η AO είναι η διάμεσος του τραπεζίου και ισχύει :

$$\Delta B + \Gamma E = 2 \cdot AO = 2 \cdot O\Gamma = OB + O\Gamma = B\Gamma$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4757)

Στις πλευρές Ax' και Ax γωνίας $x'Ax$ θεωρούμε σημεία B και Γ ώστε $AB = A\Gamma$. Οι κάθετες στις Ax' και Ax στα σημεία B και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ .

Αν οι ημιευθείες Ay και Az χωρίζουν τη γωνία $x'Ax$ σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $E\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

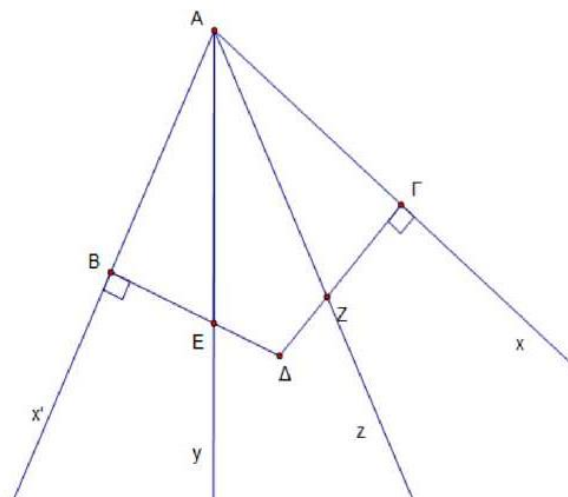
Μονάδες 8

β) Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $x'Ax$.

Μονάδες 8

γ) Οι γωνίες $\Gamma B\Delta$ και $\Gamma A\Delta$ είναι ίσες.

Μονάδες 9



Λύση

α) Αρκεί να δείξουμε $AE = AZ$.

Έχουμε, $\triangle ABE \cong \triangle AZG$, γιατί

- οι γωνίες B, Γ είναι ορθές
- $AB = AG$
- οι γωνίες BAE και ZAG είναι ίσες

άρα $AE = AZ$ και $BE = ZG$.

β) Αρκεί να δείξουμε το Δ ισαπέχει από τις πλευρές Ax' και Ax , δηλαδή $\Delta B = \Delta \Gamma$.

Έχουμε, $\triangle ABD \cong \triangle ADG$, γιατί

- οι γωνίες B, Γ είναι ορθές
- $AB = AG$
- $AD = AD$

άρα $BD = DG$

γ), Επειδή $B + \Gamma = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο. Επομένως η πλευρά $\Delta\Gamma$ φαίνεται υπό ίσες γωνίες, άρα $\Gamma B\Delta = \Delta A\Gamma$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4793)

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και ο περιγεγραμμένος του κύκλος (O, ρ) ώστε η διαγώνιος του ΔB να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία B είναι διπλάσια της γωνίας Δ και οι πλευρές AB και $B\Gamma$ είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη $B\Delta$ στο O , η οποία τέμνει τις πλευρές $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$ στα E και Z αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$.

Μονάδες 6

β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔAB και $\Delta \Gamma B$.

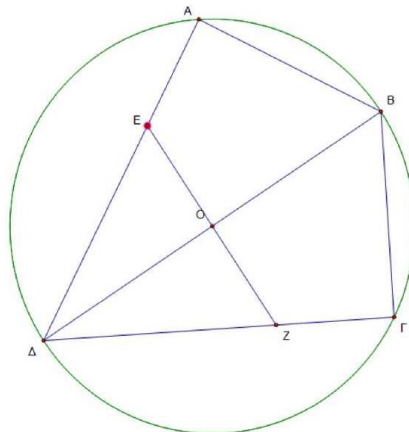
Μονάδες 6

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma O$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 7

δ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABOE$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Μονάδες 6

**Λύση**

α) Έχουμε,

$$\begin{cases} B + \Delta = 180^\circ & (\text{ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο τετράπλευρο}) \\ B = 2\Delta & (\text{δεδομένα}) \end{cases}$$

άρα, $2\Delta + \Delta = 180^\circ \Rightarrow 3\Delta = 180^\circ \Rightarrow \Delta = 60^\circ$, άρα $B = 120^\circ$

β) Έχουμε, $\hat{\Delta}AB = \hat{\Delta}GB$ γιατί

- $A = \Gamma = 90^\circ$ (εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο)
- $\Delta B = \Delta B$ (κοινή πλευρά τριγώνων)
- $AB = \Gamma B$ (δεδομένα)

γ) Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΔAB και $\Gamma B\Delta$ έχουμε,

$$AO = \frac{\Delta B}{2} = \frac{2\rho}{2} = \rho \text{ και } \Gamma O = \frac{\Delta B}{2} = \rho$$

Το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές ($OA = OB = \rho$) και από την προηγούμενη σύγκριση

τριγώνων έχουμε $B_1 = B_2 = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$, άρα τα τρίγωνα AOB και $OB\Gamma$ είναι

ισόπλευρα, δηλαδή $AB = \rho$ και $\Gamma B = \rho$.

Επομένως το $AB\Gamma O$ έχει όλες τις πλευρές του ίσες με ρ , άρα είναι ρόμβος.

δ) Έχουμε, $A + EOB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, άρα δύο απέναντι γωνίες του τετράπλευρου $ABOE$ είναι παραπληρωματικές, οπότε είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4822)

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΓAB ($\hat{A} = 90^\circ$). Με διάμετρο την πλευρά του $A\Gamma$ φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα $B\Gamma$ στο Δ . Από το Δ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την AB στο M .

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma A\Delta = B$

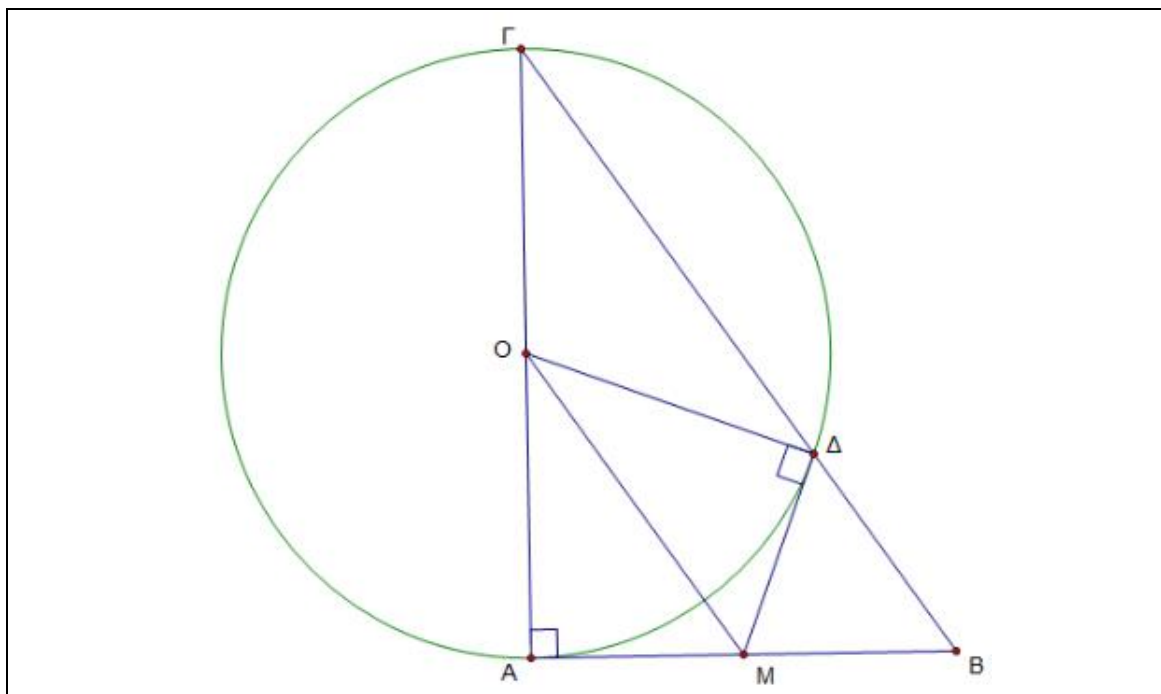
(Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο ΔMB είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

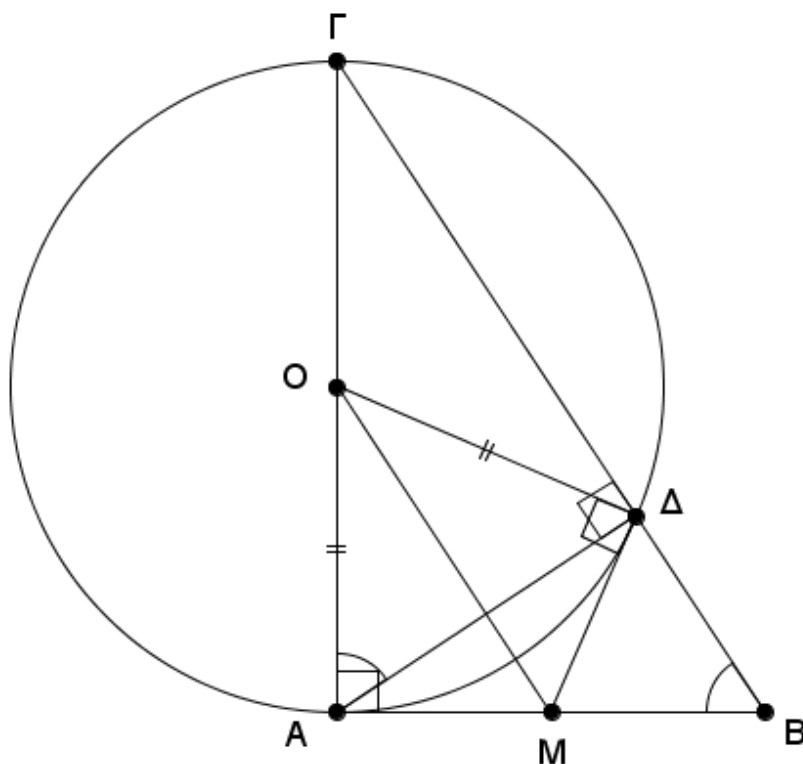
γ) Το M είναι το μέσον του AB .

(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Η γωνία $\Delta\Delta\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, άρα $\Delta\Delta\Gamma = 90^\circ$ (1) και το τρίγωνο $\Delta\Delta\Gamma$ ορθογώνιο.



Τότε, $\Gamma\Delta\Delta = \Gamma\beta\alpha$ ως συμπληρωματικές της γωνίας Γ στα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta\Delta\Gamma$ και $\alpha\beta\Gamma$ (ή ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες).

β) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΜ και ΑΔΜ. Είναι:

ΑΣΚΗΣΗ (4_5895)

Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\Delta B\Gamma$ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$) (όπου A και Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$) και το μέσο M της $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές.

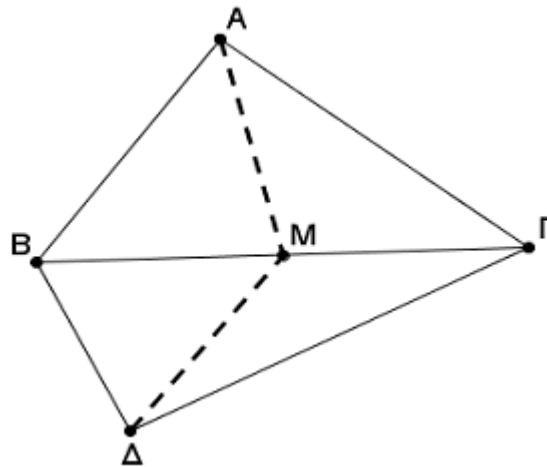
(Μονάδες 9)

β) $AM\Delta = 2A\Gamma\Delta$

(Μονάδες 9)

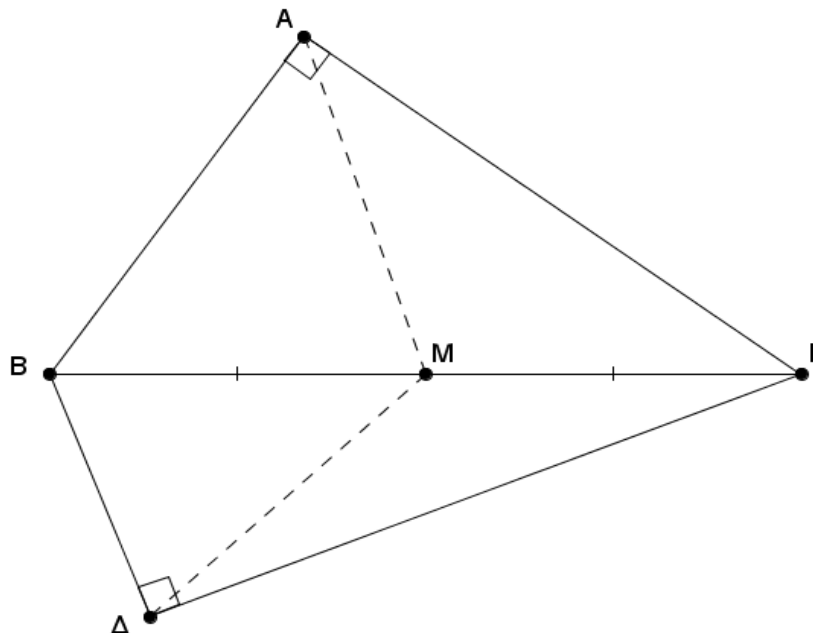
γ) $\Gamma B M = \Gamma A \Delta$

(Μονάδες 7)

**ΛΥΣΗ**

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, η διάμεσος AM (M μέσον της $B\Gamma$) αντιστοιχεί στην

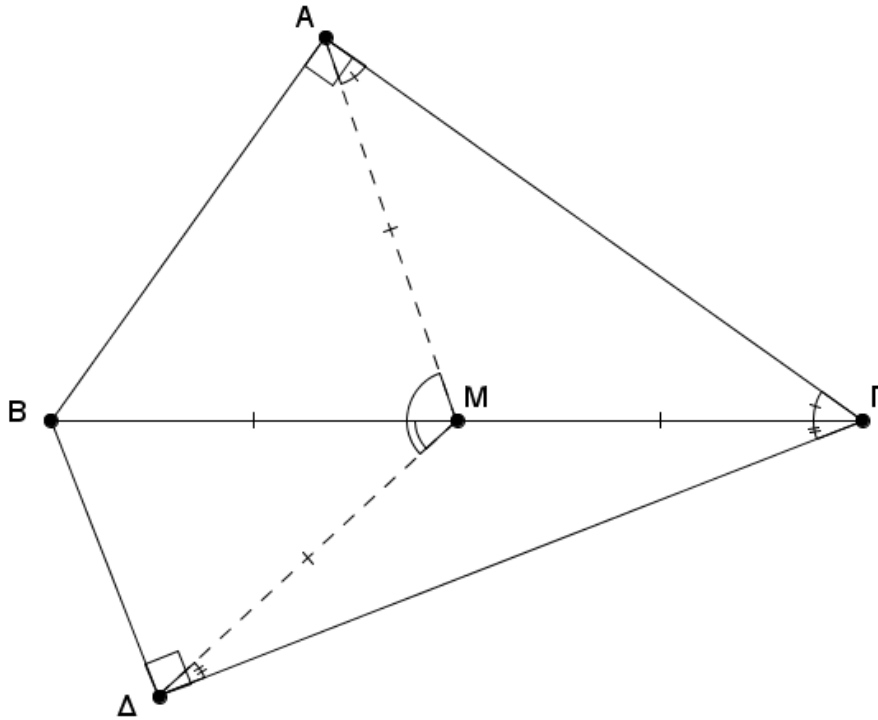
υποτείνουσα $B\Gamma$, άρα είναι $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ (1)



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$, η διάμεσος ΔM (M μέσον της $B\Gamma$) αντιστοιχεί στην

υποτείνουσα $B\Gamma$, άρα είναι $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2}$ (2)

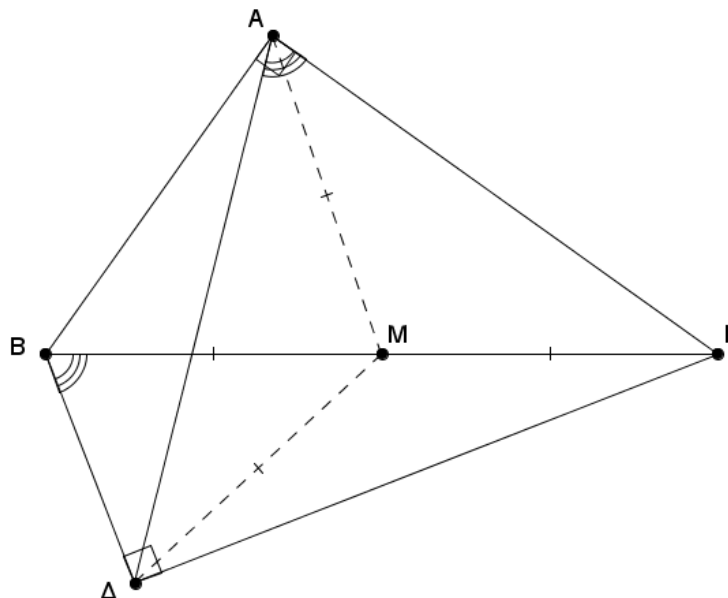
- Από (1) και (2) είναι $AM = DM$. Οπότε το τρίγωνο AMD είναι ισοσκελές.
 β) Από την σχέση (1) είναι και $AM = MG$, άρα το τρίγωνο AMG είναι ισοσκελές, οπότε $MAG = MGA$ και συνεπώς $AMB = 2AGM$ (3), καθώς η γωνία AMB είναι εξωτερική στο τρίγωνο AMG .



Από την σχέση (2) είναι και $DM = MG$, άρα το τρίγωνο DMG είναι ισοσκελές, οπότε $MAG = MGA$ και συνεπώς $DMB = 2DGM$ (4), καθώς η γωνία DMB είναι εξωτερική στο τρίγωνο DMG .

Από (3) και (4) προκύπτει ότι $AM = DM$

- γ) $BAG = BDG = 90^\circ \Rightarrow BAG + BDG = 180^\circ$, άρα το τετράπλευρο $ABDG$ είναι εγγράψιμο και συνεπώς η πλευρά AD θα φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες, δηλαδή $\angle ABD = \angle ACD$



ΑΣΚΗΣΗ (4_5910)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O . Θεωρούμε το μέσο M του κυρτογώνιου τόξου $B\Gamma$ και το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΔAO .

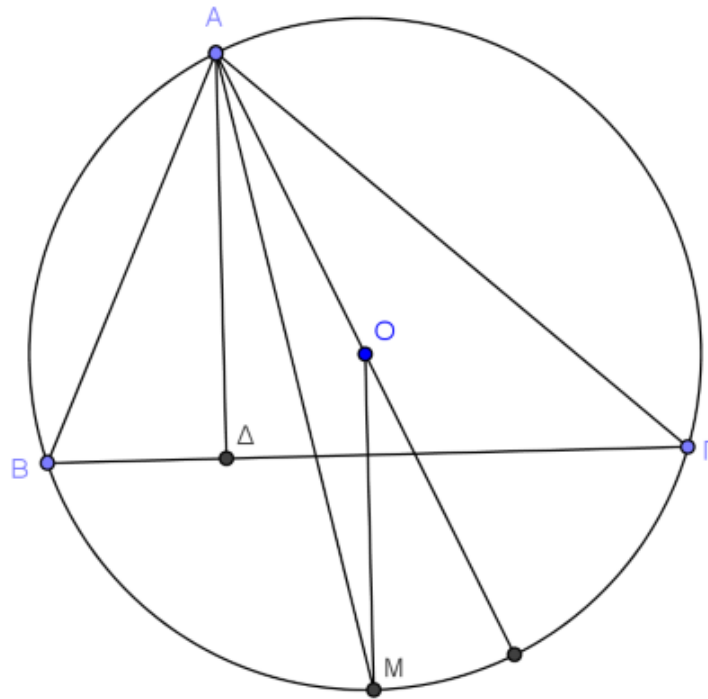
(Μονάδες 8)

β) $\angle OAG = \angle AAB$

(Μονάδες 9)

γ) $\angle AO = B - \Gamma$

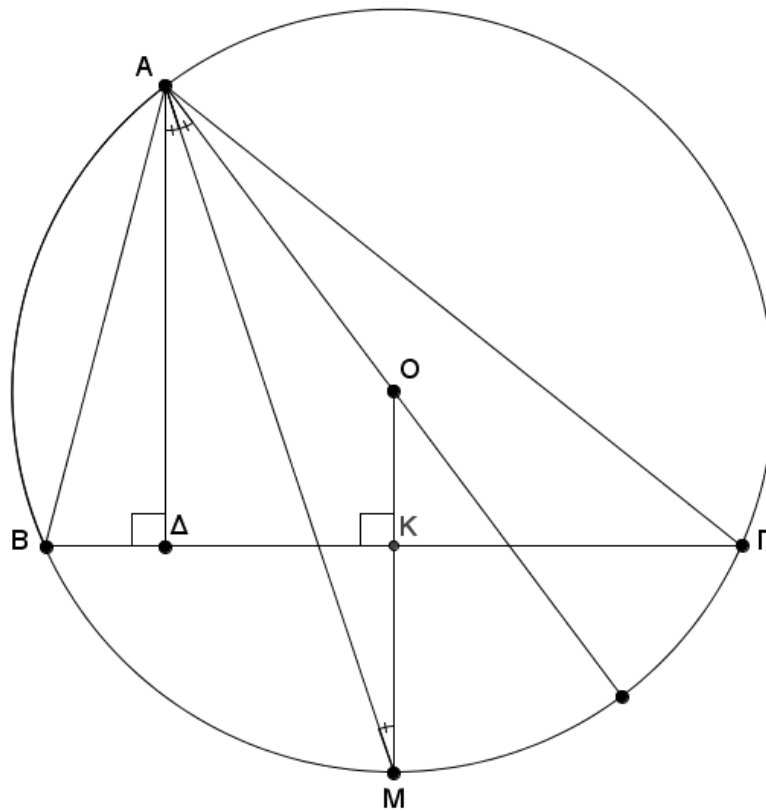
(Μονάδες 8)

**Σχόλιο:**

Υπάρχει ο όρος «**κυρτογώνιο τόξο** $B\Gamma$ » της εκφώνησης κάπου στο σχολικό βιβλίο; (Βλέπε και §3.4 Πορίσματα III και IV, όπου δεν υπάρχει κάτι αντίστοιχο...)

ΛΥΣΗ

α) Αρχικά δείχνουμε ότι OM είναι το απόστημα της χορδής $B\Gamma$.



Γνωρίζουμε (από το κεφάλαιο 2 παράγραφος 2.17, που είναι εκτός διδακτέας – εξεταστέας ύλης...) ότι το απόστημα της ΒΓ είναι μοναδικό.

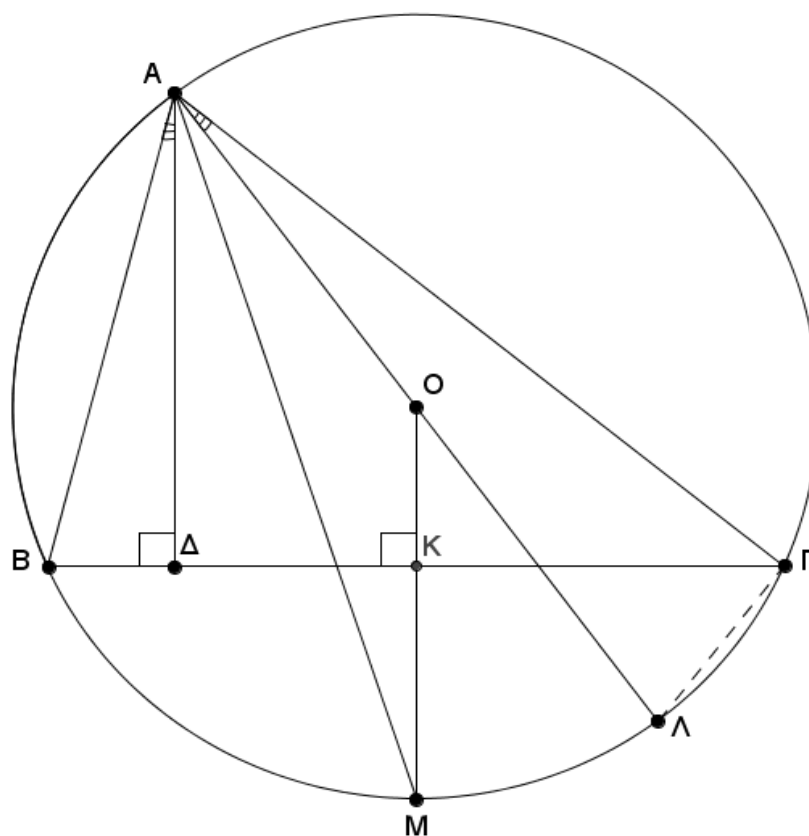
Το Ο είναι σημείο του αποστήματος αυτού, αλλά και το Μ ως μέσον του αντίστοιχου τόξου. Άρα ΟΜ είναι το απόστημα της χορδής ΒΓ και έτσι $ΟΜ \perp ΒΓ$ (1), ενώ Κ (το σημείο τομής ΟΜ και ΒΓ) το μέσον της ΒΓ, δηλαδή $ΒΚ = ΚΓ$ (2) Είναι, επίσης, ΑΔ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε $ΑΔ \perp ΒΓ$ (3).

Από (1) και (3), έχουμε ότι $AD \parallel OM$ (4), ως κάθετες στην ίδια ευθεία σε διαφορετικά σημεία. Τότε $\Delta AM = \Delta MO$ (5), ως εντός εναλλάξ των παραπάνω παραλλήλων με τέμνουσα την AM .

Επίσης, ισχύει ότι το τρίγωνο ΑΟΜ είναι ισοσκελές, μιας και οι ακτίνες ΟΑ και ΟΜ είναι ίσες, οπότε $\angle \text{ΟΑΜ} = \angle \text{ΟΜΟ}$ (6), ως προσκείμενες στην βάση του.

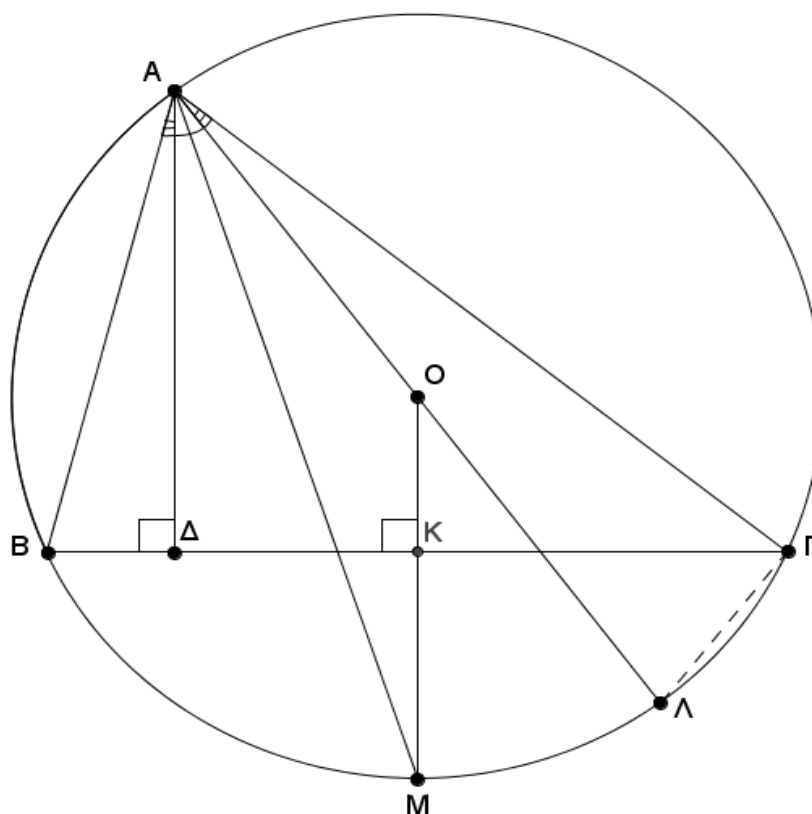
Από (5) και (6) είναι $\Delta AM = OAM$, άρα AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΔAO .

β) Η γωνία ΑΓΔ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα ορθή και έτσι το τρίγωνο ΑΓΔ ορθογώνιο και $\text{ΟΑΓ} = 90^\circ - \text{ΑΛΓ}$ (7), ενώ στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ (ΑΔ ύψος) είναι $\Delta \text{ΑΒ} = 90^\circ - \text{ΑΒΔ}$ (8).



Όμως $\angle A\Lambda\Gamma = \angle A\Delta\Gamma$ (9) καθώς είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο, οπότε
 $\angle O\Lambda\Gamma = \angle \Delta A\Gamma$

γ) Έχουμε ότι



$$\begin{aligned}
 \Delta \text{AO} &= \text{A} - \text{BA}\Delta - \Gamma \text{AO} \\
 &= (180^\circ - \text{B} - \Gamma) - (90^\circ - \text{B}) - (90^\circ - \text{A}\Lambda\Gamma) \\
 &= \cancel{180^\circ} - \cancel{\text{B}} - \Gamma - \cancel{90^\circ} + \cancel{\text{B}} - \cancel{90^\circ} + \text{A}\Lambda\Gamma \\
 &= \text{A}\Lambda\Gamma - \Gamma \\
 &\stackrel{(9)}{=} \text{B} - \Gamma
 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_6875)

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ ($\text{A} = 90^\circ$) φέρουμε τη διχοτόμο του $\text{A}\Delta$. Έστω ΔK και ΔP οι προβολές του Δ στις AB και $\text{A}\Gamma$ αντίστοιχα. Η κάθετη της $\text{B}\Gamma$ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά $\text{A}\Gamma$ στο E και την προέκταση της πλευράς AB (προς το B) στο σημείο Z .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\text{B} = \Delta\text{E}\Gamma$

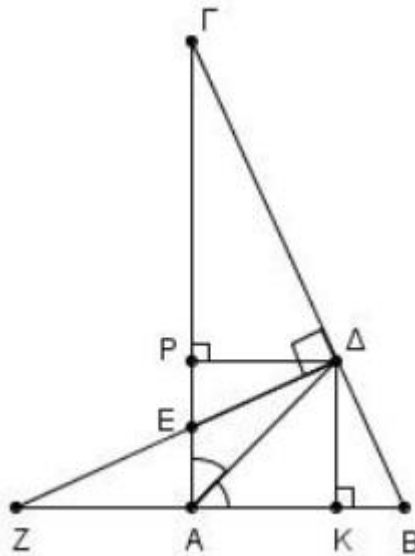
(Μονάδες 8)

ii. $\Delta\text{E} = \Delta\text{B}$

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\Gamma\text{Z}$

(Μονάδες 9)

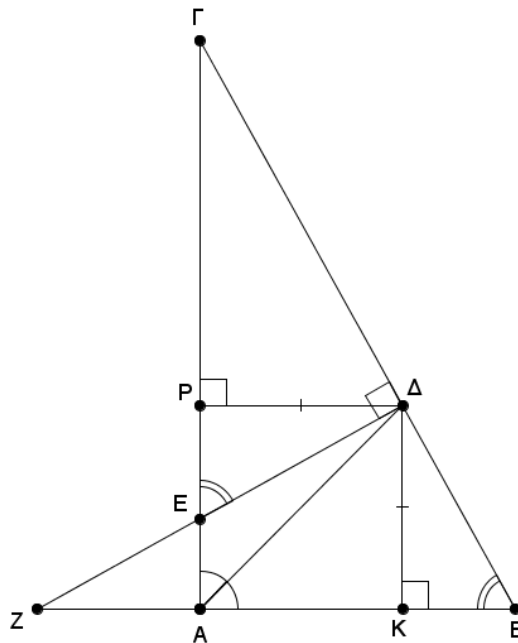


Σχόλιο: η προσθήκη της παρένθεσης (προς το B) είναι περιττή, σύμφωνα με και με το σχόλιο του σχολικού βιβλίου στο 2^ο κεφάλαιο.

ΛΥΣΗ

α) i. 1^{ος} τρόπος:

$\text{B} = \Delta\text{E}\Gamma$ ως συμπληρωματικές της γωνίας Γ στα ορθογώνια τρίγωνα $\text{AB}\Gamma$ και $\Gamma\Delta\text{E}$ αντίστοιχα.



2^{ος} τρόπος (mathematica):

Το τετράπλευρο ABDE είναι εγγράψιμο σε κύκλο καθώς $\angle BAE + \angle BDE = 180^\circ$,
 οπότε $\angle DEG = \angle B$, ως εξωτερική γωνία που ισούται με την απέναντι εσωτερική.

ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΡΕ και ΒΔΚ είναι ίσα, αφού:

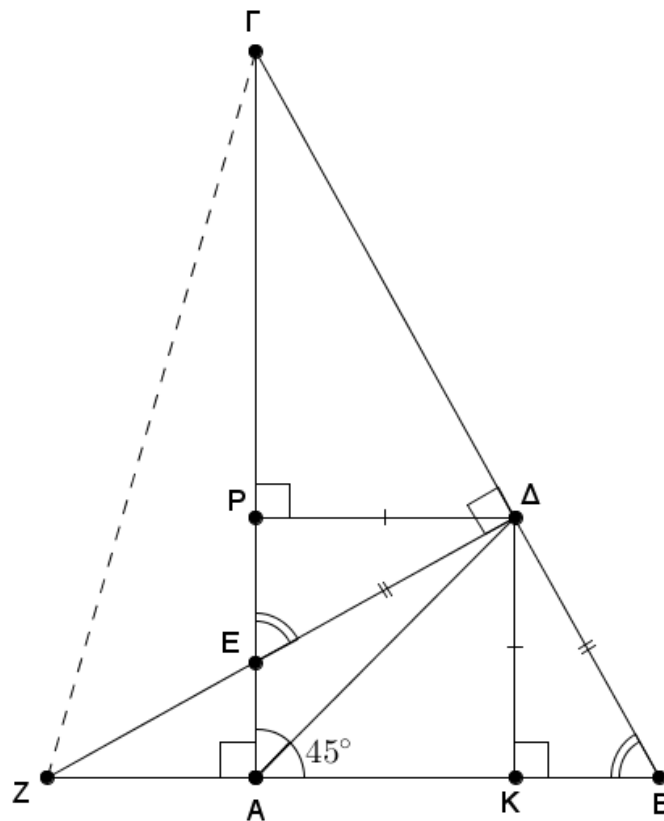
- 1) $\angle DEG = \angle B$ (από προηγούμενο ερώτημα)
- 2) $\angle DPE = \angle DKB$ (το Δ, ως σημείο της διχοτόμου της γωνίας ΒΑΓ, ισαπέχει από τις πλευρές της ΑΒ και ΑΓ)

καθώς έχουν μία ομόλογη πλευρά και μία προσκείμενη γωνία ίσες μία προς μία. Επομένως τα δύο τρίγωνα θα έχουν ίσα και όλα τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους, άρα και $\angle DE = \angle DB$

2^{ος} τρόπος (mathematica):

Πάλι από το εγγράψιμο τετράπλευρο ABDE έχουμε $\angle EBD = \angle EAD = 45^\circ$ και $\angle BED = \angle BAD = 45^\circ$, αφού μια πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες. Επομένως $\angle BED = \angle DBE = 45^\circ$, οπότε το τρίγωνο BDE είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια: $\angle DE = \angle DB$

β) Το τετράπλευρο AZΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο καθώς $\angle ZAG = \angle ZDG = 90^\circ$, οπότε η πλευρά ΓΖ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.



Επομένως $\Delta \Gamma Z = \Delta AB = 45^\circ$, ως εξωτερική γωνία που ισούται με την απέναντι εσωτερική.

ΑΣΚΗΣΗ (4_6878)

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) έχουμε ότι $B = 30^\circ$. Φέρουμε το ύψος AH και τη διάμεσο AM του τριγώνου $AB\Gamma$. Από την κορυφή B φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο AM , η οποία την τέμνει στο σημείο E όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \frac{AB}{2}$,

(Μονάδες 7)

β) $AH = BE$,

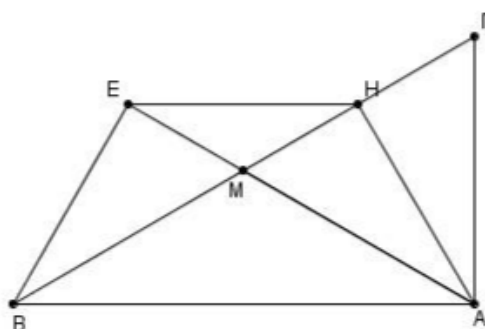
(Μονάδες 7)

γ) το τετράπλευρο $AHEB$ είναι εγγράψιμο,

(Μονάδες 6)

δ) $EH \parallel AE$.

(Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

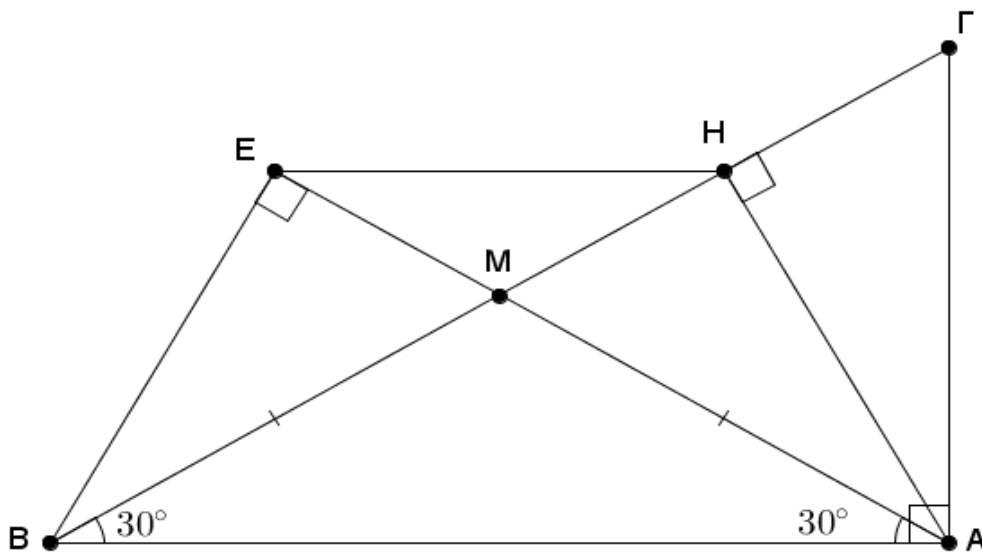
α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, η διάμεσος AM αντιστοιχεί στην υποτείνουσα $B\Gamma$, άρα είναι

$$AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB = M\Gamma \quad (1),$$

οπότε το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές με

$$MBA = MAB = 30^\circ \quad (2).$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABE ($\angle AEB = 90^\circ$) η κάθετη πλευρά BE είναι απέναντι από γωνία $MAB = 30^\circ$, άρα $BE = \frac{AB}{2}$ (3)

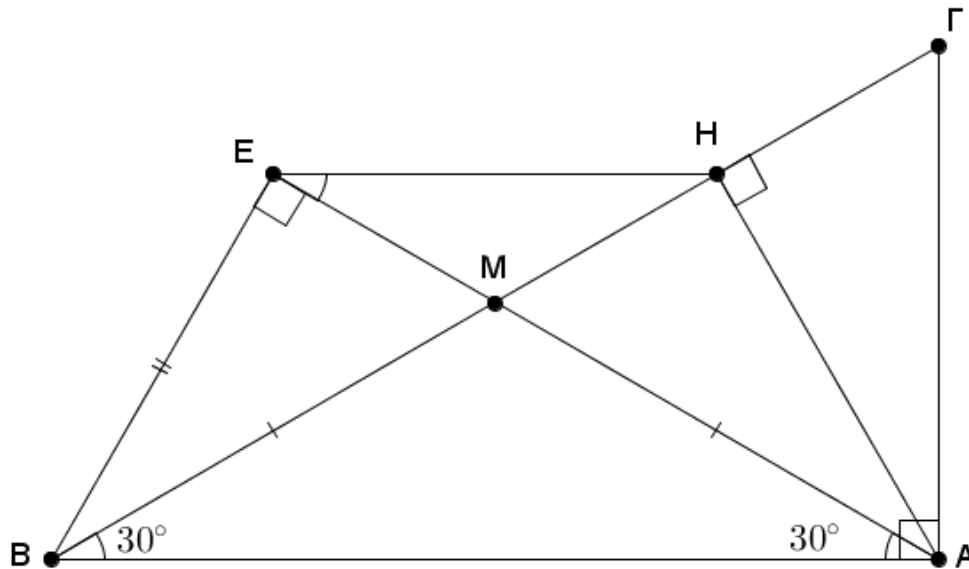


β) Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο ABH ($\angle AHB = 90^\circ$) η κάθετη πλευρά AH είναι απέναντι από γωνία $MBA = 30^\circ$, άρα $AH = \frac{AB}{2}$ (4)

Από (3) και (4) προκύπτει $AH = BE$.

γ) Το τετράπλευρο $AHEB$ είναι εγγράψιμο καθώς $\angle AEB = \angle AHB = 90^\circ$, δηλαδή μια πλευρά (η AB) φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

δ) Αρχικά συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ABE και ABH , που έχουν:



- 1) AB κοινή πλευρά
- 2) $BE = AH$ (από β) ερώτημα), δηλαδή έχουν δύο ομόλογες πλευρές ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Κατά συνέπεια θα έχουν και όλα τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους ίσα, άρα και $BH = AE$ (5)

Από (1) και (5), με αφαίρεση κατά μέλη, έχουμε: $ME = MH$, άρα το τρίγωνο EMH ισοσκελές, όπως και το AMB , από την (1). Τα δύο αυτά τρίγωνα έχουν τις γωνίες των αντίστοιχων κορυφών τους ίσες ως κατακορυφήν, άρα και οι προσκείμενες γωνίες στις βάσεις τους επίσης ίσες.

Συνεπώς $HEA = EAB$ και έτσι οι EH, AB σχηματίζουν ένα ζεύγος εντός εναλλάξ γωνιών καθώς τέμνονται από την AE , οπότε είναι $EH \parallel AB$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_6879)

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) . Έστω σημείο Δ του τόξου AB τέτοιο ώστε $\Delta B \perp B\Gamma$.

α) $A\Delta \perp A\Gamma$.

(Μονάδες 8)

β) Έστω H το ορθόκентρο του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta BH$ είναι παραλληλόγραμμο.

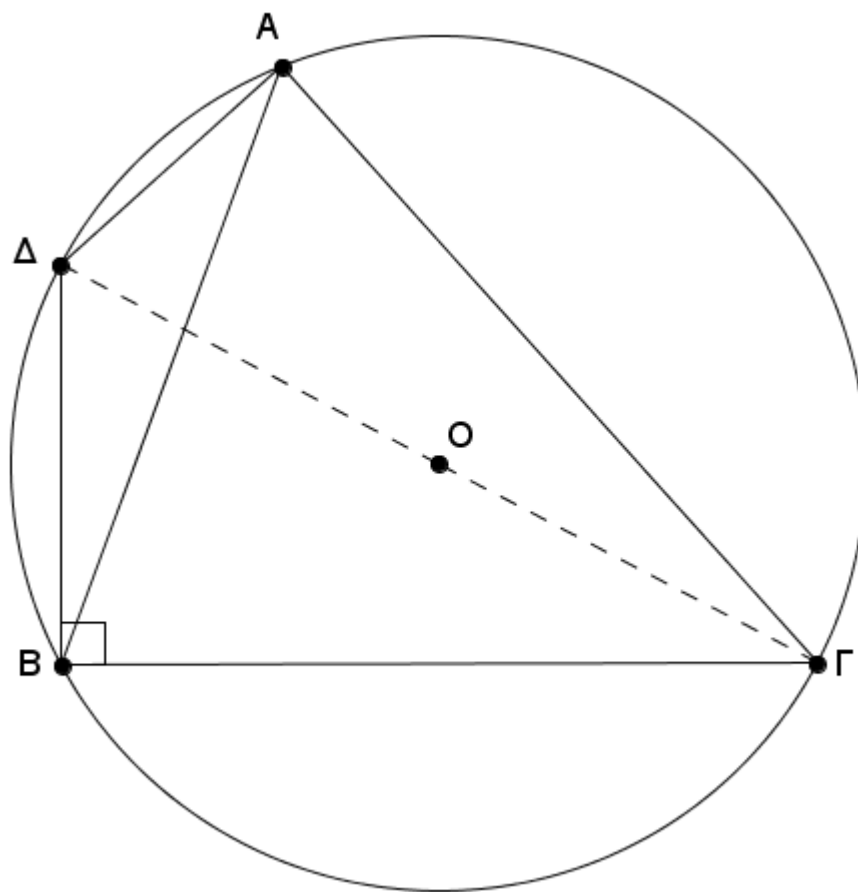
(Μονάδες 9)

γ) Αν M το μέσον της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $OM = \frac{AH}{2}$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

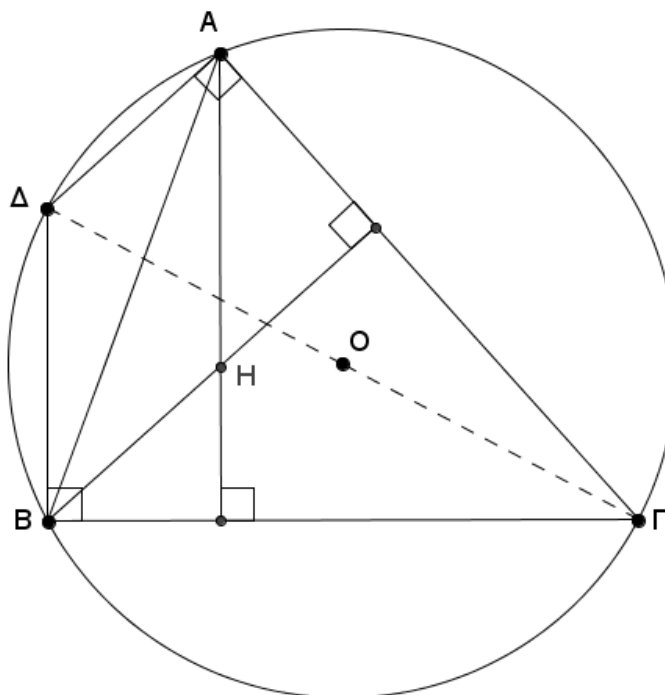
α)



Είναι

$$\Delta B \perp B\Gamma \Rightarrow \Delta B\Gamma = 90^\circ \xRightarrow{\Delta B\Gamma \text{ εγγεγραμμένη}} \Delta A\Gamma = 90^\circ \Rightarrow \Delta B\Gamma = 90^\circ \xRightarrow{\Delta A\Gamma \text{ εγγεγραμμένη}} \Delta A\Gamma = 90^\circ, \\ \text{άρα } A\Delta \perp A\Gamma$$

β) Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABΓ, άρα AH ⊥ BΓ και BH ⊥ AΓ

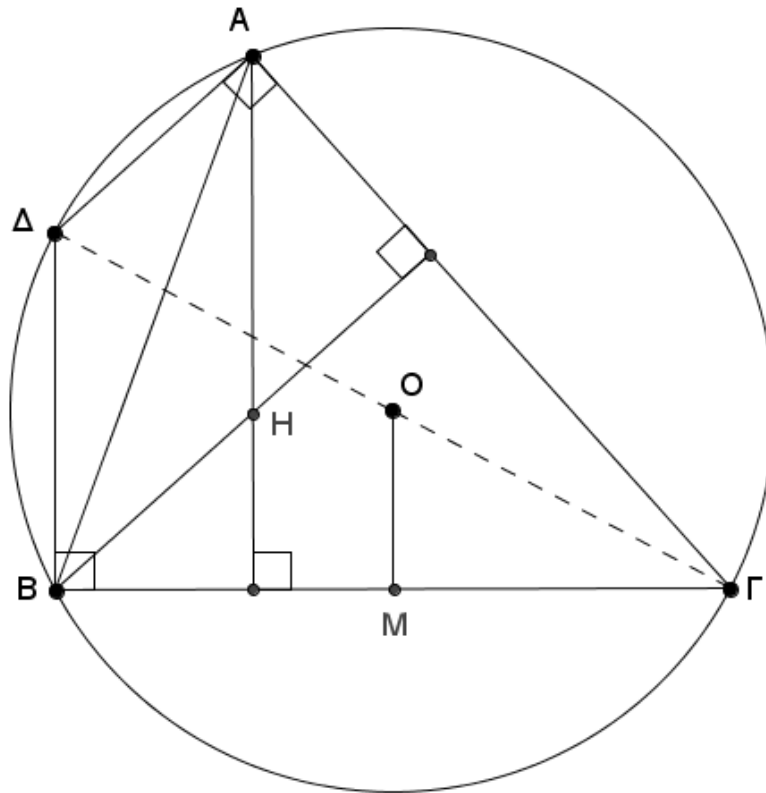


Είναι AH ⊥ BΓ και ΔB ⊥ BΓ, άρα AH || BΔ (1).

Επίσης, $BH \perp AG$ και $AD \perp AG$, άρα $BH \parallel DA$ (2).

Από (1) και (2) το τετράπλευρο $ADBH$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ)



Στο τρίγωνο $BΓΔ$, O είναι το μέσον της διαμέτρου $ΓΔ$, ενώ M το μέσον της $BΓ$

$$\text{οπότε } OM = \frac{BD}{2} = \frac{AH}{2}$$