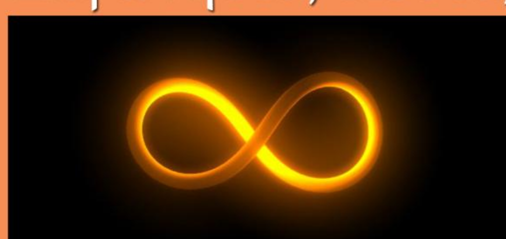
Γεωμετρία

Β΄ Λυκείου

Τράπεζα Θεμάτων

lisari team

Εκφωνήσεις-Λύσεις



η καλύτερη ομάδα λόγω team_ής

(Έκδοση: 17 – 02 – 2015)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις

είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς

των συνεργατών του δικτυακού τόπου

http://lisari.blogspot.gr

4η έκδοση: 17 – 02 – 2015 *(συνεχής ανανέωση)*

Το βιβλίο διατίθεται **αποκλειστικά**

από το μαθηματικό blog

http://lisari.blogspot.gr

Περιεχόμενα

Σελίδες

Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο δίνονται όλες οι ασκήσεις της **Τράπεζας Θεμάτων** που αφορούν στην **Γεωμετρία της Β΄ Λυκείου** μαζί με τις λύσεις τους. Η παρουσίαση των λύσεων είναι κατά το δυνατόν αναλυτική έτσι, ώστε το αρχείο να μπορεί να διαβαστεί και να μελετηθεί εύκολα από τους μαθητές. Σε αρκετές περιπτώσεις οι λύσεις συνοδεύονται με αναφορές σε παρόμοιες ασκήσεις του σχολικού βιβλίου ή της τράπεζας θεμάτων καθώς και με κάποια στοιχεία θεωρίας ή ακόμα και μεθοδολογίας.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε από μια **διαδικτυακή** (και όχι μόνο) **ομάδα μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος. Η ομάδα συγκροτήθηκε από τους μαθηματικούς που ανταποκρίθηκαν στο κάλεσμα που απεύθυνε μέσα από το blog **http://lisari.blogspot.gr** ο ακούραστος **Μάκης Χατζόπουλος.** Εργάστηκε με μεράκι, κάτω από πίεση χρόνου, για να προσφέρει στην εκπαιδευτική κοινότητα, μαθητές και καθηγητές, το συγκεκριμένο υλικό.

Επιθυμία όλων μας είναι να συμβάλλουμε, έστω και ελάχιστα, στην **βελτίωση της διδασκαλίας** των μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, μέσα από την παροχή υποστηρικτικού υλικού στην ελληνική εκπαιδευτική κοινότητα.

Μετά την αρχική συγγραφή των λύσεων έγιναν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις για την όσο το δυνατό **ποιοτικότερη παρουσίαση**. Ζητούμε συγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες οι οποίες ενδεχομένως θα έχουν διαλάθει της προσοχής μας, κάτι αναπόδραστο στην εκπόνηση μιας εργασίας τέτοιας έκτασης σε τόσο στενά περιθώρια χρόνου. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου το υλικό θα βελτιωθεί. Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

Η ομάδα του lisari

30 – 11 – 2014

lisari ***team***

Αντωνόπουλος Νίκος (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου Κατεύθυνση - Άργος)
Αυγερινός Βασίλης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου ΔΙΑΤΑΞΗ - Ν. Σμύρνη και Νίκαια)
Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο ΒΕΛΑΩΡΑΣ - Λιβαδειά Βοιωτίας)
Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο Ευθύνη - Ρέθυμνο)
Γιαννόπουλος Μιχάλης (Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)
Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο Αστρολάβος - Άρτα)
Δούδης Δημήτρης (3ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)
Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια Πουκαμισάς Γλυφάδας)
Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο Ώθηση - Αργυρούπολη)
Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο Παπαπαναγιώτου – Παπαπαύλου - Σέρρες)
Κανάβης Χρήστος (Διδακτορικό στο ΕΜΠ – 2ο ΣΔΕ φυλακών Κορυδαλλού)
Καρδαμίτσης Σπύρος (Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων)
Κοπάδης Θανάσης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίων 19+ - Πολύγωνο)
Κουλούρης Αντρέας (3ο Λύκειο Γαλατσίου)
Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο Στόχος - Περιστέρι)
Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο Ρηγάκης - Κοζάνη)
Μαρούγκας Χρήστος (3ο ΓΕΛ Κηφισιάς)
Νάννος Μιχάλης (1ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)
Νικολόπουλος Θανάσης (Λύκειο Κατασταρίου, Ζάκυνθος)
Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο Φάσμα - Αγρίνιο)
Παντούλας Περικλής (Φροντιστήρια Γούλα-Δημολένη - Ιωάννινα)
Παπαδομανωλάκη Μαρία (Ιδιοκτήτρια Πρότυπου Κέντρου Μάθησης ΔΙΑΚΡΙΣΙΣ - Ρέθυμνο)
Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός Ρόμβος)
Πορίχης Λευτέρης (Γυμνάσιο Λιθακιάς – Ζάκυνθος)
Ράπτης Γιώργος (6ο ΓΕΛ Βόλου)
Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο Μπαχαράκης - Θεσσαλονίκη)
Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1ο Λύκειο Χαλκίδας)
Σπλήνης Νίκος (Φροντιστήριο ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ - Ηράκλειο Κρήτης)
Σπυριδάκης Αντώνης (Γυμνάσιο Βιάννου - Λασίθι)
Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)
Σταυρόπουλος Σταύρος (Γραμματέας Ε.Μ.Ε Κορινθίας - Γυμνάσιο Λ.Τ. Λέχαιου Κορινθίας)
Τηλέγραφος Κώστας (Φροντιστήριο Θεμέλιο - Αλεξανδρούπολη)
Τρύφων Παύλος (1ο Εσπερινό ΕΠΑΛ Περιστερίου)
Φιλιππίδης Χαράλαμπος (Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί)
Χαραλάμπους Σταύρος (Μουσικό Σχολείο Λαμίας)
Χατζόπουλος Μάκης (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων)

Τράπεζα Θεμάτων
Γεωμετρία Β΄ τάξης

30 Νοεμβρίου 2014

Λύτες

Βασίλης Αυγερινός

Γιάννης Βελαώρας

Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης

Δημήτρης Δούδης

Σπύρος Καρδαμίτσης

Ανδρέας Κουλούρης

Μιχάλης Νάννος

Θεόδωρος Παγώνης

Νίκος Σκομπρής

Παύλος Σταυρόπουλος

Σταύρος Σταυρόπουλος

Χαράλαμπος Φιλιππίδης

Σταύρος Χαραλάμπους

Μάκης Χατζόπουλος

Έλεγχος

Κεφάλαιο 7

Περικλής Παντούλας

Κώστας Τηλέγραφος

Κεφάλαιο 8

Γιάννης Βελαώρας

Μάκης Χατζόπουλος

Κεφάλαιο 9

Θεόδωρος Παγώνης

Χρήστος Κανάβης

Κεφάλαιο 10

Χρήστος Κουστέρης

Παύλος Σταυρόπουλος

Κεφάλαιο 11

Μάκης Χατζόπουλος

Γενικές διορθώσεις

Σπύρος Καρδαμίτσης

Χρήστος Κανάβης

Συντονιστής

Νίκος Σκορμπής

Εξώφυλλο

Μιχάλης Νάννος

Πρόλογος

Ανδρέας Κουλούρης

Επιμελητής

Μάκης Χατζόπουλος

lisari team

η καλύτερη ομάδα λόγω team_ής!

Στοιχεία θεωρίας από το σχολικό βιβλίο

1) Ως **λόγο** δύο ευθυγράμμων τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ ορίζουμε τον θετικό αριθμό λ για τον οποίο ισχύει: $AB = \lambda \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow \dfrac{AB}{\Gamma\Delta} = \lambda$.

2) **Μέτρο** ή **μήκος** ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι ο λόγος του, προς ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα που παίρνουμε ως μονάδα μέτρησης.

3) **Αναλογία** είναι η ισότητα λόγων. Η σχέση $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} = \lambda$ είναι μια αναλογία με λόγο λ και όρους τα τμήματα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Στην παραπάνω αναλογία τα τμήματα α και γ λέγονται **ανάλογα** των β και δ. Τα α και δ λέγονται **άκροι** όροι της αναλογίας, ενώ τα β και γ **μέσοι** όροι της αναλογίας.

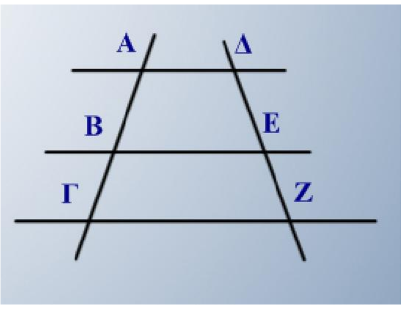
Ιδιότητες αναλογιών

- ✓ $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$
- ✓ $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\gamma} = \dfrac{\beta}{\delta}$
- ✓ $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\delta}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$
- ✓ $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \dfrac{\gamma \pm \delta}{\delta}$
- ✓ $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\alpha \pm \beta} = \dfrac{\gamma}{\gamma \pm \delta}$
- ✓ $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} = \ldots = \dfrac{\kappa}{\lambda} = \dfrac{\alpha + \gamma + \ldots + \kappa}{\beta + \delta + \ldots + \lambda}$

Θεώρημα Θαλή

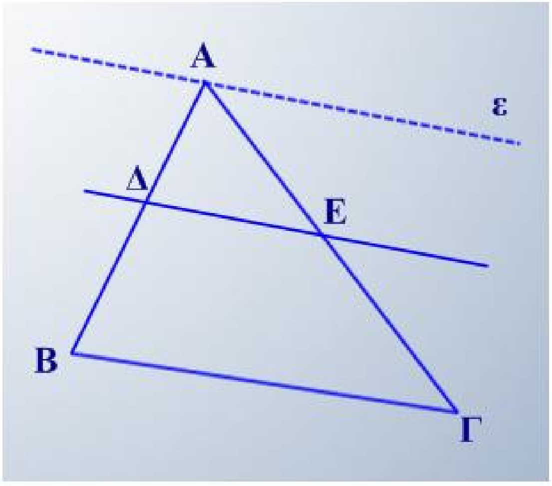
Αν (τρεις τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, ορίζουν σ'αυτές τμήματα ανάλογα.
Δηλαδή με βάση το σχήμα ισχύει η αναλογία:

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$$



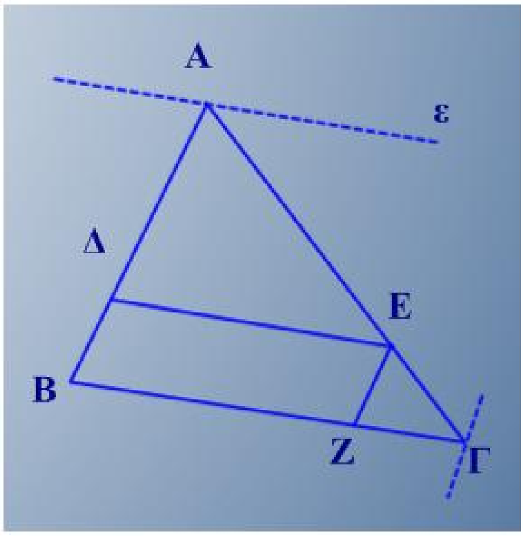
Πόρισμα

Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα και αντίστροφα.



Θεώρημα

Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.



Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου

Η εσωτερική διχοτόμος γωνίας τριγώνου χωρίζει την απέναντι πλευρά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών. Δηλαδή, στο παρακάτω σχήμα ισχύει: $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΒΔ}{ΓΔ}$.

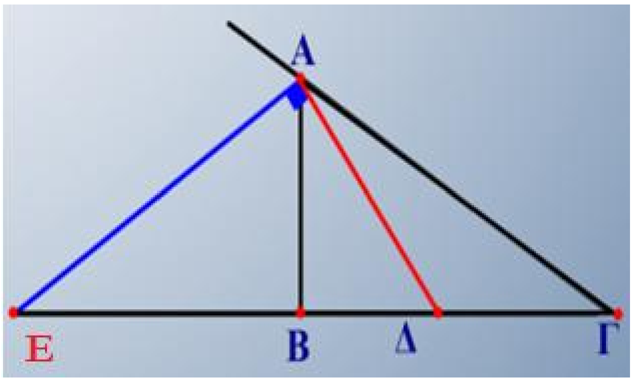
Η $ΑΔ$ είναι η εσωτερική διχοτόμος του $ΑΒΓ$.

<u>Σχόλιο</u>: Επειδή το σημείο $Δ$ που διαιρεί την πλευρά $ΒΓ$ σε λόγο $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$ είναι μοναδικό, το θεώρημα ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή:

Αν το $Δ$ είναι σημείο της πλευράς $ΒΓ$ και ισχύει $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΒΔ}{ΓΔ}$, τότε η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Α}$.

Θεώρημα εξωτερικής διχοτόμου

Η διχοτόμος μιας εξωτερικής γωνίας τριγώνου τέμνει την προέκταση της απέναντι πλευράς σε ένα σημείο, το οποίο διαιρεί εξωτερικά την πλευρά αυτή σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών. Δηλαδή, στο σχήμα ισχύει: $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{BE}{\Gamma E}$. Η AE είναι η εξωτερική διχοτόμος του $AB\Gamma$.



<u>Σχόλιο</u>: Αν το E είναι σημείο της προέκτασης της πλευράς $B\Gamma$ και ισχύει $\frac{BE}{\Gamma E} = \frac{AB}{A\Gamma}$, τότε η AE είναι η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $\widehat{A}$, δηλαδή το θεώρημα ισχύει και αντίστροφα.

Θέμα Β

ΆΣΚΗΣΗ Β1 (18975)

Θεωρούμε τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = 9$ και $ΑΓ = 15$. Από το βαρύκεντρο $Θ$ του τριγώνου, φέρουμε ευθεία $ε$ παράλληλη στην πλευρά $ΒΓ$, που τέμνει τις $ΑΒ$ και $ΑΓ$ στα σημεία $Δ$ και $Ε$ αντίστοιχα.

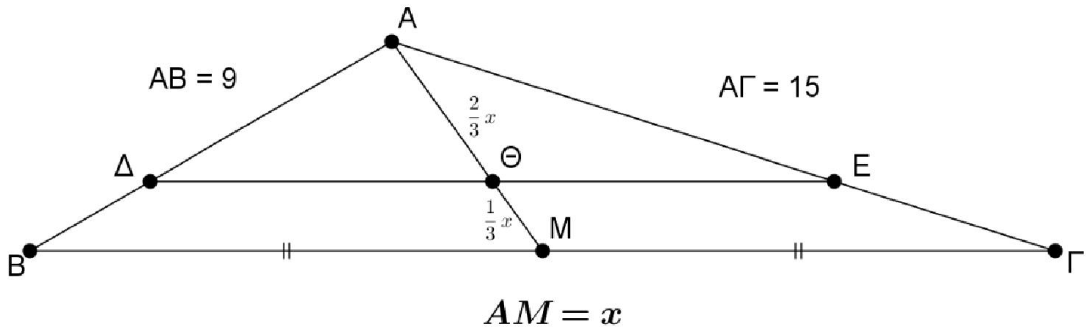
α) Να αποδείξετε ότι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{2}{3}$ και $\frac{ΑΕ}{ΕΓ} = 2$

Μονάδες 15

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $ΑΔ$ και $ΓΕ$.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ



Το βαρύκεντρο ενός τριγώνου έχει την ιδιότητα να απέχει από την κάθε κορυφή τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.

Οπότε, αν $ΑΜ = x$, τότε αφού το $Θ$ είναι βαρύκεντρο του $ΑΒΓ$ και η $ΑΜ$ είναι διάμεσος έχουμε:

$$ΑΘ = \frac{2}{3}ΑΜ \Rightarrow ΑΘ = \frac{2}{3}x \quad \text{και} \quad ΘΜ = \frac{1}{3}ΑΜ \Rightarrow ΘΜ = \frac{1}{3}x$$

α) Από τις παράλληλες και $ΒΜ$, με τεμνόμενες $ΑΒ$ και $ΑΜ$, από το θεώρημα Θαλή έχουμε,

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΘ}{ΑΜ} \Rightarrow \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{\frac{2}{3}x}{x} \Rightarrow \boxed{\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{2}{3}} \quad (1)$$

Από τις παράλληλες $ΕΘ$ και $ΓΜ$, με τεμνόμενες $ΑΓ$ και $ΑΜ$, από το θεώρημα Θαλή έχουμε,

$$\frac{ΑΕ}{ΕΓ} = \frac{ΑΘ}{ΘΜ} \Rightarrow \frac{ΑΕ}{ΕΓ} = \frac{\frac{2}{3}x}{\frac{1}{3}x} \Rightarrow \boxed{\frac{ΑΕ}{ΕΓ} = 2} \quad (2)$$

β) Έχουμε,

$$(1) \Rightarrow \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{ΑΔ}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow ΑΔ = 9 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow ΑΔ = 6$$

και

$$(2) \Rightarrow \frac{ΑΕ}{ΕΓ} = 2 \Rightarrow \frac{ΑΕ + ΕΓ}{ΕΓ} = \frac{2+1}{1} \Rightarrow \frac{ΑΓ}{ΕΓ} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{15}{ΕΓ} = \frac{3}{1} \Rightarrow ΕΓ = 15 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow ΕΓ = 5$$

Παρόμοια με την 6η αποδεικτική άσκηση σχ. βιβλίου, παραγράφου 7.7

ΆΣΚΗΣΗ Β2 (19024)

Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ του παρακάτω σχήματος, το τμήμα $ΔΕ$ είναι παράλληλο στην πλευρά $ΒΓ$ του τριγώνου. Από το σημείο $Δ$ φέρουμε την παράλληλη προς τη $ΒΕ$ η οποία τέμνει την $ΑΓ$ στο σημείο $Ζ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{ΑΕ}{ΑΔ} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$

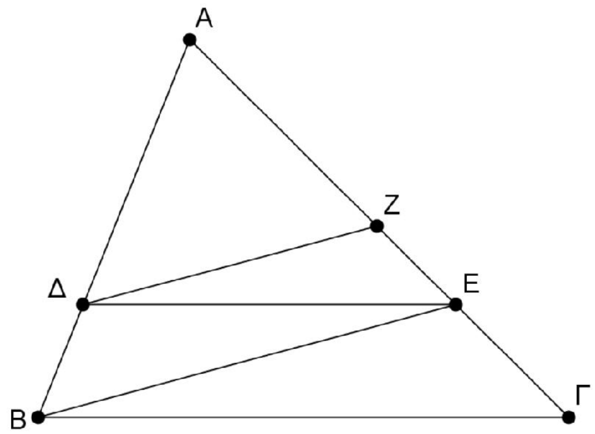
Μονάδες 8

β) $\frac{ΑΖ}{ΑΔ} = \frac{ΑΕ}{ΑΒ}$

Μονάδες 8

γ) $\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΑΖ}{ΑΕ}$

Μονάδες 8



ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ από υπόθεση είναι $ΔΕ / / ΒΓ$, άρα από το θεώρημα Θαλή έχουμε ότι:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} \Leftrightarrow \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΔ}$$

(από ιδιότητα αναλογιών εναλλάξαμε τους άκρους όρους)

β) Στο τρίγωνο $ΑΒΕ$ από υπόθεση είναι $ΔΖ / / ΒΕ$, άρα από θεώρημα Θαλή έχουμε ότι:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΖ}{ΑΕ} \Leftrightarrow \frac{ΑΕ}{ΑΒ} = \frac{ΑΖ}{ΑΔ}$$

(από ιδιότητα αναλογιών εναλλάξαμε τους άκρους όρους)

γ) Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ από υπόθεση είναι $ΔΕ / / ΒΓ$, άρα από το θεώρημα Θαλή έχουμε ότι:

$$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AE}{A\Gamma} \quad (1)$$

Στο τρίγωνο ABE από υπόθεση είναι $\Delta Z//BE$, άρα από το θεώρημα Θαλή έχουμε ότι:

$$.\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AZ}{AE} \quad (2).$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι:

$$\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{AZ}{AE}$$

ΆΣΚΗΣΗ Β3 (19026)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τυχαίο σημείο Δ στην πλευρά $B\Gamma$. Φέρνουμε από το σημείο Δ παράλληλες στις πλευρές $A\Gamma$ και AB που τέμνουν αντίστοιχα στις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\Delta E}{A\Gamma}=\frac{B\Delta}{B\Gamma}$

Μονάδες 8

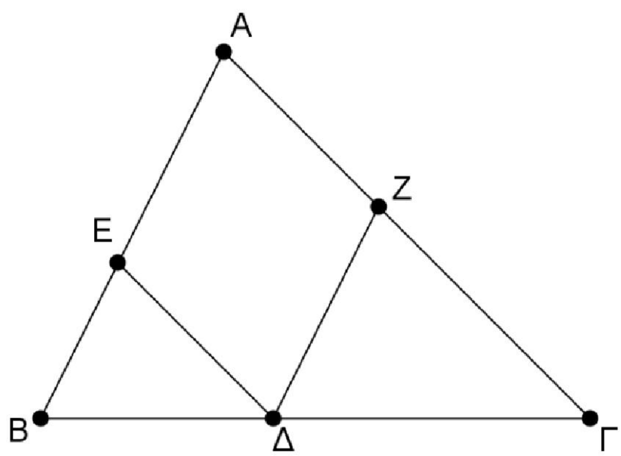
β) $\frac{Z\Delta}{AB}=\frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma}$

Μονάδες 8

α) $\frac{\Delta E}{A\Gamma}+\frac{Z\Delta}{AB}=1$

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ



α) Το τρίγωνο $BE\Delta$ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών AB, ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και είναι ΔΕ//ΑΓ. Επομένως τα τρίγωνα $BE\Delta$ και $AB\Gamma$ έχουν τις πλευρές τους ανάλογες άρα:

$$\frac{\Delta E}{A\Gamma}=\frac{B\Delta}{B\Gamma}=\frac{BE}{AB}\Rightarrow\frac{\Delta E}{A\Gamma}=\frac{B\Delta}{B\Gamma}$$

β) Το τρίγωνο $Z\Gamma\Delta$ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΓ, ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και είναι ΔΖ//ΑΒ. Επομένως τα τρίγωνα $Z\Gamma\Delta$ και $AB\Gamma$ έχουν τις πλευρές τους ανάλογες άρα:

$$\frac{Z\Delta}{AB}=\frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma}=\frac{Z\Gamma}{A\Gamma}\Rightarrow\frac{Z\Delta}{AB}=\frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma}$$

γ) Αφού από α) και β) έχουμε ότι:

$$\frac{\Delta E}{A\Gamma}=\frac{B\Delta}{B\Gamma} \text{ και } \frac{Z\Delta}{AB}=\frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma}$$

προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο αυτές σχέσεις και παίρνουμε:

$$\frac{\Delta E}{A\Gamma}+\frac{Z\Delta}{AB}=\frac{B\Delta}{B\Gamma}+\frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma}\Rightarrow\frac{\Delta E}{A\Gamma}+\frac{Z\Delta}{AB}=\frac{B\Delta+\Delta\Gamma}{B\Gamma}\Rightarrow\frac{\Delta E}{A\Gamma}+\frac{Z\Delta}{AB}=\frac{B\Gamma}{B\Gamma}\Rightarrow\frac{\Delta E}{A\Gamma}+\frac{Z\Delta}{AB}=1$$

ΆΣΚΗΣΗ Β4 (19031)

Στο κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος, η διχοτόμος της γωνίας A είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$ και τέμνει τη ΔB στο E και τη $\Delta\Gamma$ στο Z.

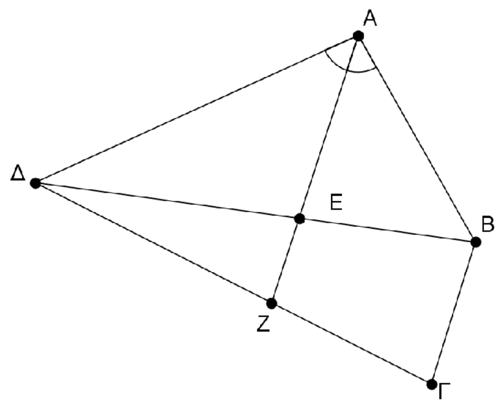
Αν $A\Delta=12,\ AB=8,\ \Delta E=9$ και $Z\Gamma=6$, να αποδείξετε ότι:

α) $EB=6$

Μονάδες 13

β) $\Delta Z=9$

Μονάδες 12



ΛΥΣΗ

α) Εφαρμόζοντας το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου (§7.8) για τη διχοτόμο AE, στο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε:

$$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{E\Delta}{EB}\Rightarrow\frac{12}{8}=\frac{9}{EB}\Rightarrow 12\cdot EB=72\Rightarrow EB=6$$

β) Στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι $ZE//B\Gamma$, οπότε από πόρισμα του θεωρήματος Θαλή (§7.7) έχουμε:

$$\frac{\Delta E}{EB}=\frac{\Delta Z}{Z\Gamma}\overset{\alpha)}{\Rightarrow}\frac{9}{6}=\frac{\Delta Z}{6}\Rightarrow\Delta Z=9$$

ΆΣΚΗΣΗ Β5 (19033)

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία E, Z, H και Θ των πλευρών του $A\Delta,\ AB,\ B\Gamma,\ \Gamma\Delta$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\frac{AE}{A\Delta}=\frac{AZ}{AB}=\frac{\Gamma H}{\Gamma B}=\frac{\Gamma\Theta}{\Gamma\Delta}=\frac{1}{3}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $EZ//\Theta H//\Delta B$

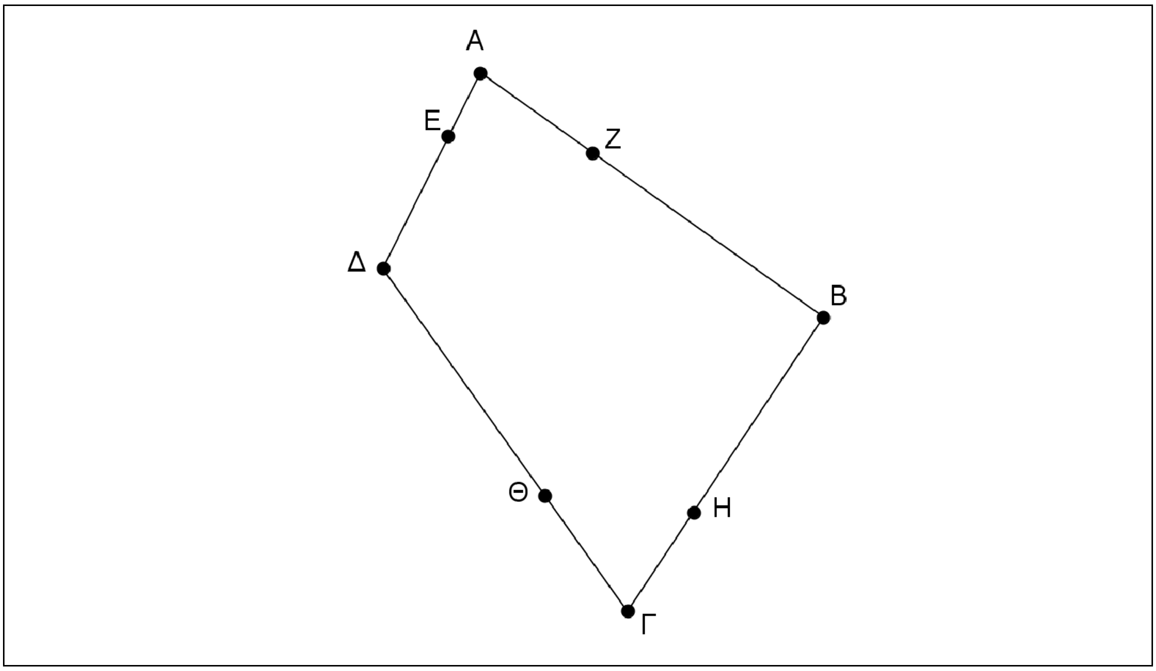
Μονάδες 10

β) $EZ=\Theta H=\frac{1}{3}\Delta B$

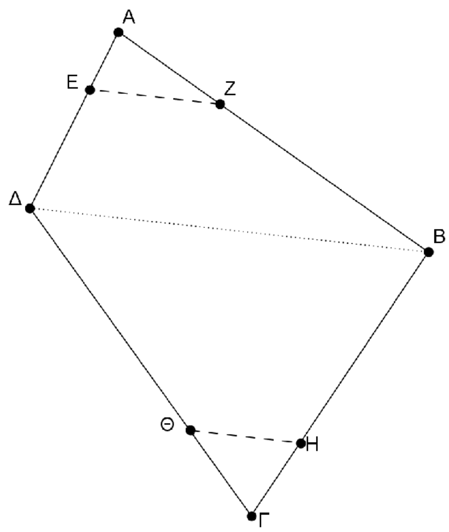
Μονάδες 10

γ) $EZH\Theta$ παραλληλόγραμμο

Μονάδες 5



ΛΥΣΗ



α) Από ιδιότητες αναλογιών (§7.4) έχουμε:

$$\frac{ΑΕ}{ΑΔ}=\frac{ΑΖ}{ΑΒ}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{ΑΕ}{ΑΕ-ΑΔ}=\frac{ΑΖ}{ΑΖ-ΑΒ}=\frac{1}{1-3}$$

$$\Rightarrow\frac{ΑΕ}{-(ΑΔ-ΑΕ)}=\frac{ΑΖ}{-(ΑΒ-ΑΖ)}=\frac{1}{-2}$$

$$\Rightarrow\frac{ΑΕ}{ΔΕ}=\frac{ΑΖ}{ΒΖ}=\frac{1}{2}\quad(1)$$

δηλαδή στο τρίγωνο $ΑΒΔ$ η ευθεία $ΕΖ$ χωρίζει τις πλευρές του $ΑΔ$ και $ΑΒ$ σε μέρη ανάλογα, οπότε, σύμφωνα με το πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή (§7.7), θα είναι παράλληλη στην τρίτη πλευρά του, την $ΒΔ$.

Δηλαδή θα ισχύει: $ΕΖ//ΔΒ\quad(2)$.

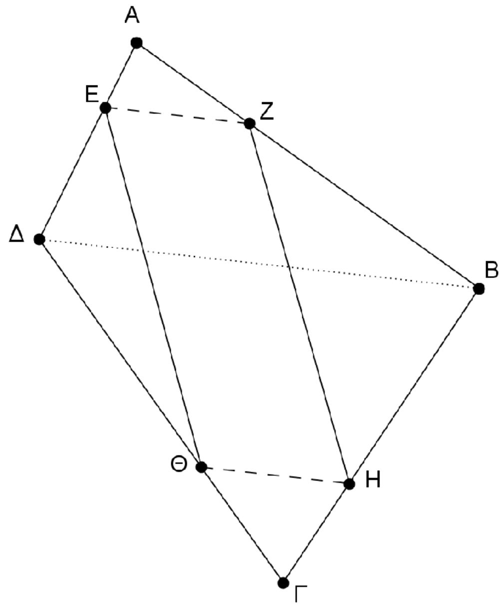
Ομοίως, στο τρίγωνο $ΒΓΔ$, προκύπτει ότι: $ΗΘ//ΔΒ\quad(3)$

Από (2) και (3) προκύπτει το ζητούμενο: $ΕΖ//ΘΗ//ΔΒ$

β) Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $ΕΖ//ΔΒ$, οπότε το τρίγωνο $ΑΕΖ$ ορίζεται από τις ευθείες $ΑΔ$, $ΑΒ$ του τριγώνου $ΑΒΔ$ και μια παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του $ΒΔ$. Τότε, από γνωστό θεώρημα (§7.7) έχουμε ότι το τρίγωνο $ΑΕΖ$ έχει πλευρές ανάλογες με προς τις πλευρές του ΑΔΒ.

Δηλαδή ισχύει,

$$\frac{ΑΕ}{ΑΔ}=\frac{ΑΖ}{ΑΒ}=\frac{ΕΖ}{ΒΔ}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{ΕΖ}{ΒΔ}=\frac{1}{3}\Rightarrow ΕΖ=\frac{1}{3}ΒΔ\quad(4)$$



Ομοίως, στο τρίγωνο $ΒΓΔ$ έχουμε ότι $ΗΘ//ΔΒ$, οπότε προκύπτει ότι

$$ΘΗ = \frac{1}{3}ΔΒ \quad (5)$$

Από (4) και (5) προκύπτει το ζητούμενο

$$ΕΖ = ΘΗ = \frac{1}{3}ΔΒ$$

γ) Από α) και β) έχουμε ότι $ΕΖ // = ΘΗ$, άρα το $ΕΖΗΘ$ είναι παραλληλόγραμμο.

ΆΣΚΗΣΗ Β6 (19036)

Οι διαγώνιοι του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ//ΓΔ)$ με $ΓΔ > ΑΒ$ τέμνονται στο $Ο$. Η παράλληλη από το $Β$ προς την $ΑΔ$ τέμνει την $ΑΓ$ στο $Μ$.

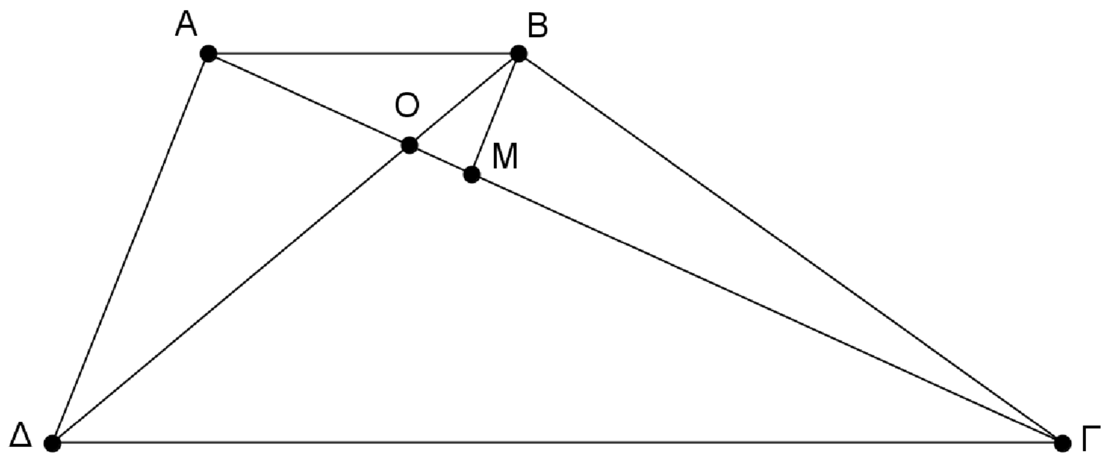
Αν $ΟΑ = 12$, $ΟΒ = 9$ και $ΟΓ = 36$, να αποδείξετε ότι:

α) $ΟΔ = 27$

Μονάδες 12

β) $ΟΜ = 4$

Μονάδες 13



ΛΥΣΗ

α) Από δεδομένα έχουμε $AB//\Gamma\Delta$, οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ ορίζεται από τις προεκτάσεις των πλευρών ΟΔ, ΟΓ του τριγώνου ΟΓΔ και μια παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του ΒΔ. Τότε, από θεώρημα (το τελευταίο της §7.7 και την αντίστοιχη παρατήρηση) έχουμε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΟΓΔ.

Δηλαδή ισχύει ότι:

$$\frac{OA}{O\Gamma}=\frac{OB}{O\Delta}\Rightarrow\frac{12}{36}=\frac{9}{O\Delta}\Rightarrow O\Delta=27$$

β) Ομοίως, το τρίγωνο ΟΒΜ θα έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΟΔΑ.

Δηλαδή ισχύει ότι:

$$\frac{OA}{OM}=\frac{O\Delta}{OB}\Rightarrow\frac{12}{OM}=\frac{27}{9}\Rightarrow OM=4$$

ΆΣΚΗΣΗ Β7 (19040)

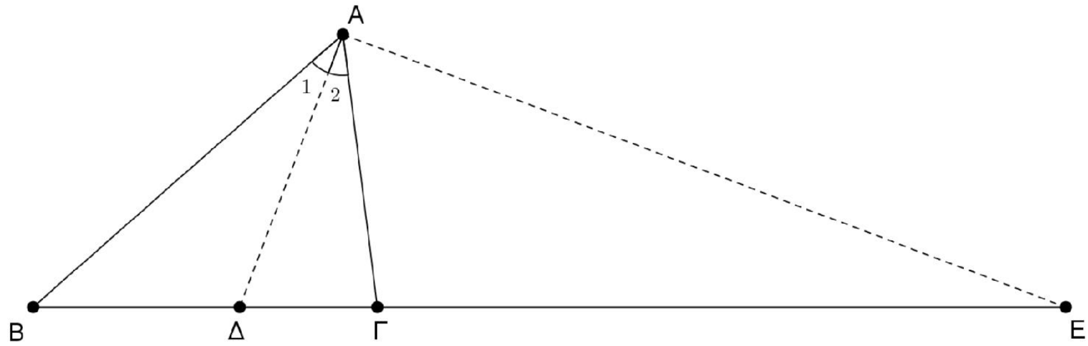
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ $(AB>A\Gamma)$ και ΑΔ, ΑΕ η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος του αντίστοιχα. Αν είναι $AB=6,\ \Delta B=3,\ B\Gamma=5$ και $BE=15$, να αποδείξετε ότι:

α) $A\Gamma=4$

Μονάδες 12

β) $\Delta E=12$

Μονάδες 13



ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta\Gamma=B\Gamma-B\Delta=5-3=2$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου (§7.8) στο τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΔ η διχοτόμος) έχουμε:

$$\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}\Rightarrow\frac{6}{A\Gamma}=\frac{3}{2}\Rightarrow A\Gamma=4$$

β) Εφαρμόζοντας το θεώρημα της εξωτερικής διχοτόμου (§7.8) στο τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΕ η διχοτόμος) έχουμε:

$$\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{BE}{\Gamma E}\Rightarrow\frac{6}{4}=\frac{15}{\Gamma E}\Rightarrow\Gamma E=\frac{4\cdot 15}{6}\Rightarrow\Gamma E=10$$

άρα $\Delta E=\Gamma\Delta+\Gamma E=2+10=12$

ΑΣΚΗΣΗ Β8 (22318)

Δίνεται τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με ΑΔ διχοτόμο της $\hat{\mathrm{A}}$. Φέρουμε τις διχοτόμους ΔΕ και ΔΖ των γωνιών $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

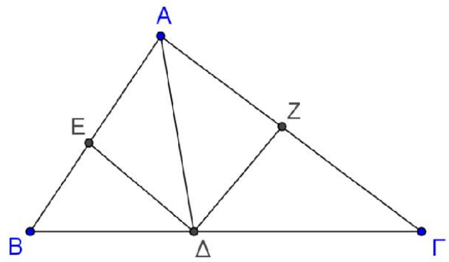
i. $\dfrac{\mathrm{AE}}{\dots}=\dfrac{\dots}{\Delta\mathrm{B}}$

ii. $\dfrac{\dots}{\mathrm{Z}\Gamma}=\dfrac{\Delta\mathrm{A}}{\dots}$

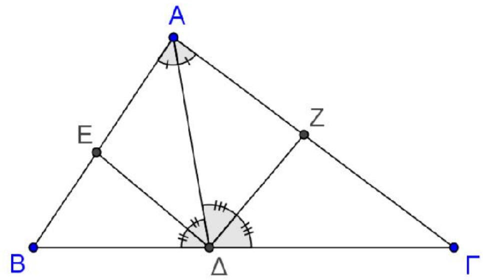
Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}\cdot\dfrac{\mathrm{Z}\Gamma}{\mathrm{AZ}}=\dfrac{\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{AB}}$

Μονάδες 15



<u>ΛΥΣΗ</u>



α) Στο τρίγωνο ΑΒΔ από το θεώρημα διχοτόμων έχουμε:

i. $\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}=\dfrac{\mathrm{A}\Delta}{\Delta\mathrm{B}}$ και στο τρίγωνο ΑΔΓ αντίστοιχα

ii. $\dfrac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{Z}\Gamma}=\dfrac{\Delta\mathrm{A}}{\Delta\Gamma}$

β) Έχουμε,

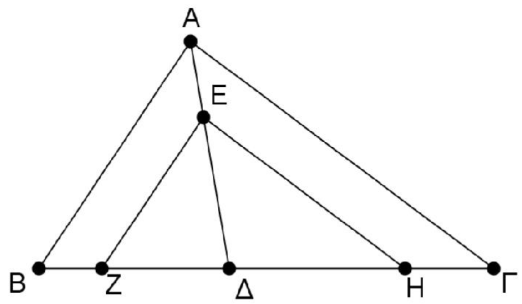
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}\cdot\dfrac{\mathrm{Z}\Gamma}{\mathrm{AZ}}\overset{\text{λόγω}(\alpha)}{=}\dfrac{\mathrm{A}\Delta}{\Delta\mathrm{B}}\cdot\dfrac{\Delta\Gamma}{\mathrm{A}\Delta}=\dfrac{\Delta\Gamma}{\Delta\mathrm{B}}\\ \text{Από το }\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}\text{, εξαιτίας ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος, }\dfrac{\Delta\Gamma}{\Delta\mathrm{B}}=\dfrac{\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{AB}}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}\cdot\dfrac{\mathrm{Z}\Gamma}{\mathrm{AZ}}=\dfrac{\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{AB}}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β9 (22320)

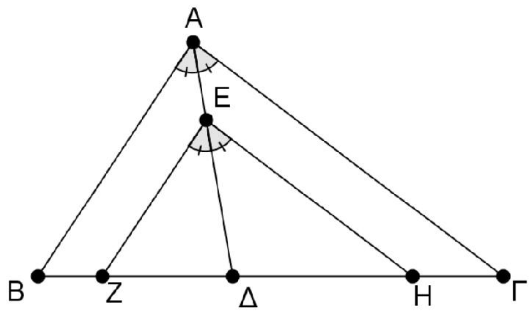
Θεωρούμε τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με ΑΔ εσωτερική διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$ και Ε σημείο της ΑΔ τέτοιο ώστε $\Delta\mathrm{E}=\frac{2}{3}\mathrm{A}\Delta$. Από το Ε φέρνουμε παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ που τέμνουν τη ΒΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{EZ}=\frac{2}{3}\mathrm{AB}$ (Μονάδες 12)

β) $\frac{\Delta\mathrm{Z}}{\Delta\mathrm{H}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}}$ (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ



α) Επειδή ΕΖ // ΑΒ τότε στο $\overset{\triangle}{\mathrm{AB}\Delta}$ θα ισχύει:

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A}\Delta}=\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{AB}}\Leftrightarrow\frac{\frac{2}{3}\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{A}\Delta}=\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{AB}}\Leftrightarrow\mathrm{EZ}=\frac{2}{3}\mathrm{AB}\,(1)$$

β) Όμοια στο $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Gamma}\Delta}$ επειδή ΕΗ // ΑΓ, τότε:

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A}\Delta}=\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{A\Gamma}}\Leftrightarrow\frac{\frac{2}{3}\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{A}\Delta}=\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{A\Gamma}}\Leftrightarrow\mathrm{EH}=\frac{2}{3}\mathrm{A\Gamma}\,(2).$$

Επίσης επειδή

$$\left.\begin{array}{l} ZE//AB \text{ τότε } Z\hat{E}\Delta = B\hat{A}\Delta \left(\text{εντός} - \text{εκτός και επί τα αυτά}\right) \\ EH//A\Gamma \text{ τότε } \Delta\hat{E}H = \Gamma\hat{A}\Delta \left(\text{εντός} - \text{εκτός και επί τα αυτά}\right) \\ \text{Όμως ισχύει } B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta \,(A\Delta \text{ είναι διχοτόμος}) \end{array}\right\}$$

$$\text{άρα } Z\hat{E}\Delta = \Delta\hat{E}H \Leftrightarrow E\Delta \text{ είναι διχοτόμος της } Z\hat{E}H$$

Άρα στο τρίγωνο $Z\overset{\triangle}{E}H$ από το θεώρημα διχοτόμων έχουμε:

$$\frac{\Delta Z}{\Delta H} = \frac{ZE}{EH} \overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow} \frac{\Delta Z}{\Delta H} = \frac{\frac{2}{3}AB}{\frac{2}{3}A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{\Delta Z}{\Delta H} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

Θέμα Δ

Άσκηση Δ1 (18994)

Στην πλευρά AB παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $BE=\frac{1}{3}AB$ και στην πλευρά $\Delta\Gamma$ θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $\Delta Z=\frac{1}{3}\Delta\Gamma$. Αν η διαγώνιος $A\Gamma$ τέμνει τις ΔE και BZ στα σημεία M και N αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

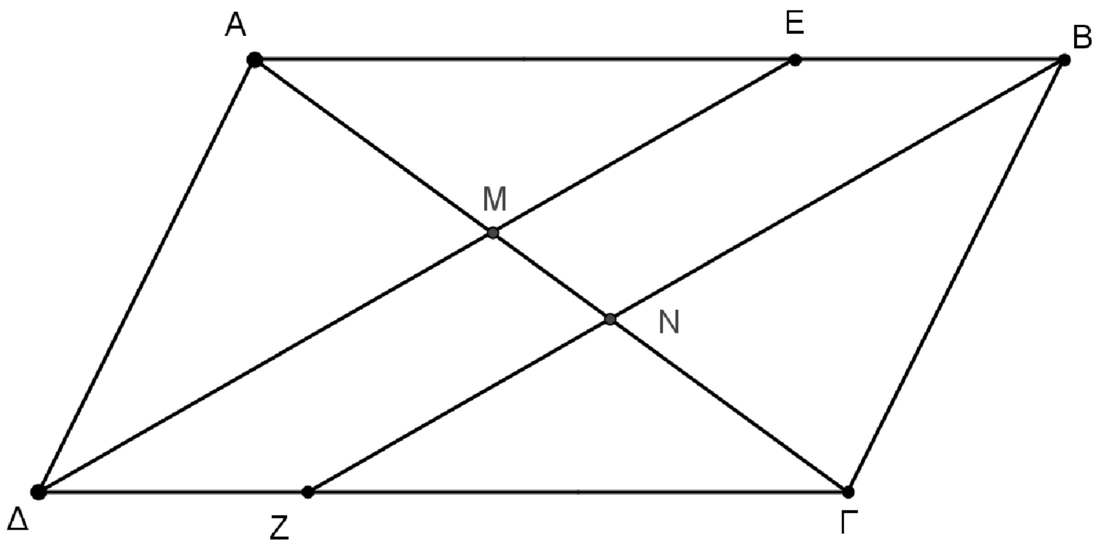
α) $AM=\Gamma N=2MN$

Μονάδες 13

β) $MN=\frac{1}{5}A\Gamma$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ



α) Έχουμε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο $\Rightarrow AB//\Delta\Gamma \Rightarrow BE//\Delta Z \quad (1)$

$$BE=\frac{1}{3}AB \overset{AB=\Delta\Gamma}{\Rightarrow} BE=\frac{1}{3}\Delta\Gamma \overset{\Delta Z=\frac{1}{3}\Delta\Gamma}{\Rightarrow} BE=\Delta\Gamma \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι το τετράπλευρο $BE\Delta Z$ είναι παραλληλόγραμμο άρα $\Delta E//ZB \Rightarrow ME//NB \quad (3)$

$$BE=\frac{1}{3}AB \Rightarrow AB=3BE \quad (4)$$

Έτσι, στο τρίγωνο ANB, λόγω της (3) έχουμε (πόρισμα σελίδα 152)

$$\frac{AM}{MN}=\frac{AE}{BE} \Rightarrow \frac{AM}{MN}=\frac{AB-BE}{BE} \overset{(4)}{\Rightarrow} \frac{AM}{MN}=\frac{3BE-BE}{BE} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{AM}{MN}=\frac{2BE}{BE} \Rightarrow \frac{AM}{MN}=2 \Rightarrow AM=2MN \quad (5)$$

Το τετράπλευρο $BE\Delta Z$ είναι παραλληλόγραμμο $\Rightarrow \Delta E//ZB \Rightarrow \Delta M//ZN \quad (6)$

$$\Delta Z = \frac{1}{3}\Delta\Gamma \Rightarrow \Delta\Gamma = 3\Delta Z \quad (7)$$

Έτσι, στο τρίγωνο ANB, λόγω της (6) έχουμε:

$$\frac{\Gamma N}{MN} = \frac{\Gamma Z}{\Delta Z} \Rightarrow \frac{\Gamma N}{MN} = \frac{\Delta\Gamma - \Delta Z}{\Delta Z} \overset{(7)}{\Rightarrow} \frac{\Gamma N}{MN} = \frac{3\Delta Z - \Delta Z}{\Delta Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma N}{MN} = \frac{2\Delta Z}{\Delta Z} \Rightarrow \frac{\Gamma N}{MN} = 2 \Rightarrow \Gamma N = 2MN \quad (8)$$

Από τις σχέσεις (5) και (8) έχουμε,

$$AM = \Gamma N = 2MN \quad (9)$$

β) Έχουμε:

$$AM + MN + \Gamma N + A\Gamma \overset{(9)}{\Rightarrow} 2MN + MN + 2MN = A\Gamma \Rightarrow 5MN = A\Gamma \Rightarrow MN = \frac{1}{5}A\Gamma$$

Άσκηση Δ2 (19000)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεωρούμε AM τη διάμεσό του και E τυχαίο σημείο του τμήματος BM. Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στην AM που τέμνει την πλευρά AB στο Δ και την προέκτασή της ΓA στο Z.

α) Να συμπληρώσετε τις αναλογίες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

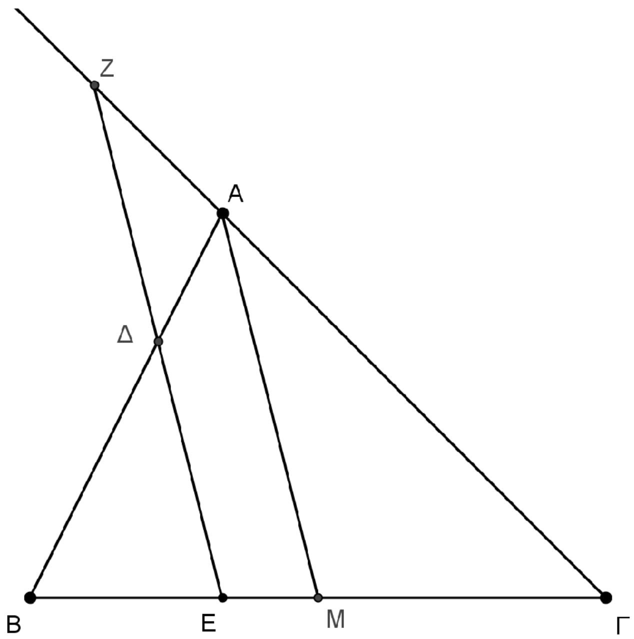
i. $\dfrac{\Delta E}{\ldots} = \dfrac{\ldots}{BM} = \dfrac{B\Delta}{\ldots.}$

ii. $\dfrac{\ldots.}{AM} = \dfrac{\Gamma E}{\ldots.} = \dfrac{\ldots}{\Gamma A}$

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $\Delta E + EZ$ είναι σταθερό, για οποιοδήποτε θέση του E στο BM

Μονάδες 13



ΛΥΣΗ

α) i) Το τρίγωνο $ΒΔΕ$ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ, ΒΜ του τριγώνου $ΒΑΜ$ κι είναι $ΔΕ//ΑΜ$. Συνεπώς θα έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες. Δηλαδή:

$$\frac{ΔΕ}{ΑΜ}=\frac{ΒΕ}{ΒΜ}=\frac{ΒΔ}{ΑΒ} \quad (1)$$

ii) Το τρίγωνο $ΓΖΕ$ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΓΑ, ΓΜ του τριγώνου $ΓΑΜ$ και είναι ΖΕ//ΑΜ. Συνεπώς θα έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες. Δηλαδή:

$$\frac{ΕΖ}{ΑΜ}=\frac{ΓΕ}{ΓΜ}=\frac{ΓΖ}{ΓΑ} \quad (2)$$

β) Έχουμε,

Από τη σχέση (1) έχουμε,

$$\frac{ΔΕ}{ΑΜ}=\frac{ΒΕ}{ΒΜ}\Rightarrow ΔΕ\cdot ΒΜ=ΑΜ\cdot ΒΕ \quad (3)$$

Από τη σχέση (2) έχουμε,

$$\frac{ΕΖ}{ΑΜ}=\frac{ΕΓ}{ΓΜ}\Rightarrow ΕΖ\cdot ΓΜ=ΑΜ\cdot ΕΓ \quad (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (4),

$$ΔΕ\cdot ΒΜ+ΕΖ\cdot ΓΜ=ΑΜ\cdot ΒΕ+ΑΜ\cdot ΕΓ \overset{ΒΜ=ΓΜ}{\Rightarrow} ΔΕ\cdot ΒΜ+ΕΖ\cdot ΒΜ=ΑΜ\cdot ΒΕ+ΑΜ\cdot ΕΓ$$

$$\Rightarrow (ΔΕ+ΕΖ)\cdot ΒΜ=ΑΜ\cdot(ΒΕ+ΕΓ)$$

$$\Rightarrow (ΔΕ+ΕΖ)\cdot ΒΜ=ΑΜ\cdot ΒΓ$$

$$\Rightarrow ΔΕ+ΕΖ=\frac{ΑΜ\cdot ΒΓ}{ΒΜ}$$

$$\overset{ΒΓ=2ΒΜ}{\Rightarrow} ΔΕ+ΕΖ=\frac{ΑΜ\cdot 2ΒΜ}{ΒΜ}$$

$$\Rightarrow ΔΕ+ΕΖ=2ΑΜ=\text{σταθερό}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (22334)

Δύο οχήματα κινούμενα με σταθερές ταχύτητες $υ_1$ και $υ_2$, περνούν ταυτόχρονα τη χρονική στιγμή $t_0=0$ από τα σημεία Α και Β αντίστοιχα και συναντιούνται στο σημείο Γ όπως φαίνεται στο σχήμα.

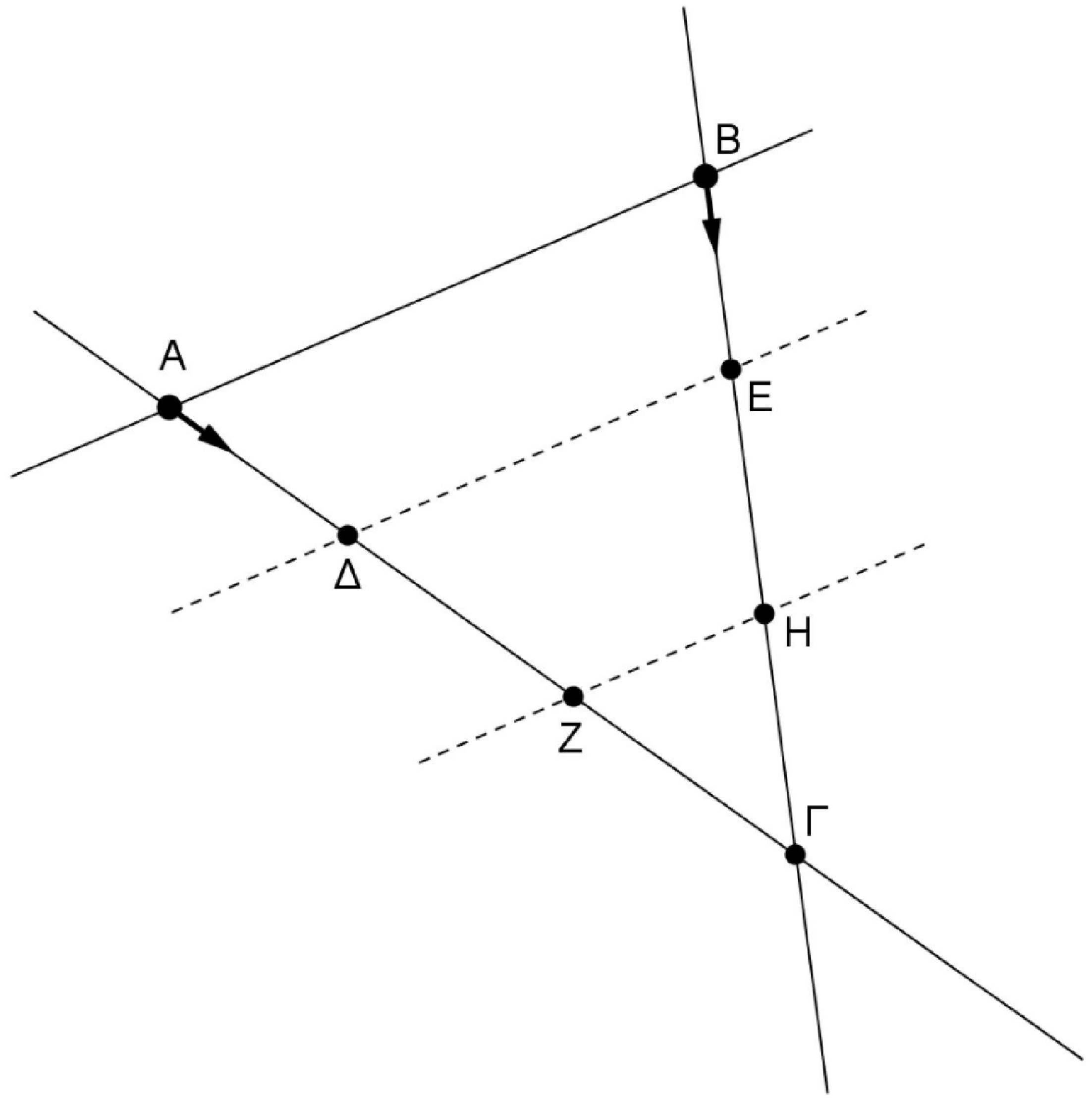
(Δίνεται ότι η ταχύτητα ενός σώματος που κινείται με σταθερή ταχύτητα είναι ίση με το διάστημα που κινήθηκε προς τον αντίστοιχο χρόνο.)

α) Μετά από χρόνο t_1 το όχημα που περνά από το σημείο Α βρίσκεται στο σημείο Δ της διαδρομής ΑΓ ενώ το όχημα που περνά από το σημείο Β βρίσκεται στο σημείο Ε της διαδρομής ΒΓ. Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΑΒ.

(Μονάδες 12)

β) Έστω Ζ σημείο της διαδρομής ΑΓ και Η σημείο της διαδρομής ΒΓ. Αν ΖΗ//ΑΒ, να αποδείξετε ότι τα οχήματα περνούν ταυτόχρονα από τις θέσεις Ζ και Η.

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Έστω t_1 ο χρόνος που τα οχήματα χρειάζονται να κινηθούν από τα σημεία Α και Β, στα Δ και Ε αντίστοιχα, τότε

$$A\Delta = \upsilon_1 \cdot t_1 \text{ και } BE = \upsilon_2 \cdot t_1$$

άρα

$$\frac{A\Delta}{BE} = \frac{\upsilon_1 \cdot t_1}{\upsilon_2 \cdot t_1} \Rightarrow \frac{A\Delta}{BE} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} \quad (1)$$

Επίσης $t_{ολ}$ ο χρόνος που χρειάζονται τα οχήματα να φτάσουν από τα σημεία Α και Β στο σημείο Γ, άρα

$$A\Gamma = \upsilon_1 \cdot t_{ολ} \text{ και } B\Gamma = \upsilon_2 \cdot t_{ολ}$$

οπότε,

$$\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{\upsilon_1 \cdot t_{ολ}}{\upsilon_2 \cdot t_{ολ}} \Rightarrow \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} \quad (2)$$

από (1) και (2) έχουμε,

$$\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{BE} \Rightarrow \Delta E \parallel AB$$

β) Έστω t' ο χρόνος που απαιτείται το όχημα να φτάσει από το σημείο Α στο σημείο Ζ και t'' ο χρόνος που απαιτείται το όχημα να φτάσει από το σημείο Β στο σημείο Η.
Θα δείξουμε ότι: $t' = t''$

Από Θεώρημα Θαλή έχουμε,

$$\frac{AZ}{BH} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{\upsilon_1 \cdot t'}{\upsilon_2 \cdot t''} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} \Rightarrow \frac{t'}{t''} = 1 \Rightarrow t' = t''$$

Συνοπτική θεωρία 8ου Κεφαλαίου

Όμοια ευθύγραμμα σχήματα	**Ανάλογες πλευρές και Ίσες γωνίες**
Κριτήρια Ομοιότητας τριγώνων	**• Δυο ίσες γωνίες • Δυο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες • Τρεις πλευρές ανάλογες**

1) Θεώρημα

Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

$$\lambda = \frac{A'B' + B'\Gamma' + \Gamma'\Delta' + \Delta'E' + E'A'}{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E + EA} = \frac{\Pi'}{\Pi}$$

2) Ο λόγος των ομόλογων πλευρών δύο ευθύγραμμων σχημάτων, λέγεται λόγος ομοιότητας αυτών και συμβολίζεται με λ. Η ομοιότητα μεταξύ δύο ευθύγραμμων σχημάτων συμβολίζεται με ≈

Ποια είναι η χρησιμότητα των όμοιων τριγώνων;

1) Το θεώρημα που εκφράζει ότι δύο όμοια τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτελούν τους βασικούς συνδετικούς κρίκους της Γεωμετρίας με την Άλγεβρα. Η σύνδεση της Γεωμετρίας με την Άλγεβρα είναι ιδιαίτερα εποικοδομητική, καθώς μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε την εποπτεία της Γεωμετρίας σε αλγεβρικά προβλήματα και την ευχέρεια των πράξεων της Άλγεβρας σε γεωμετρικά προβλήματα.

2) Τα όμοια τρίγωνα και το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτέλεσαν τα θεμέλια της Τριγωνομετρίας.

3) Χρησιμοποιώντας όμοια τρίγωνα μπορούμε να υπολογίσουμε τις διαστάσεις ενός αντικειμένου μετρώντας τις διαστάσεις ενός μικρότερου μοντέλου του.

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (18984)

Θεωρούμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ.

α) Να εξετάσετε σε ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. ΑΒ = 8, ΑΓ = 12, $\hat{A} = 35°$, ΔΕ = 20, ΔΖ = 30, $\hat{\Delta} = 35°$.

ii. $\hat{A} = 47°$, $\hat{B} = 38°$, $\hat{E} = 47°$, $\hat{\Delta} = 95°$

iii. ΑΒ = ΑΓ, $\hat{A} = \hat{\Delta}$, ΔΕ = ΔΖ.

(Μονάδες 15)

β) Στις περιπτώσεις που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι όμοιο με το ΔΕΖ, να γράψετε τους ίσους λόγους των ομόλογων πλευρών τους.

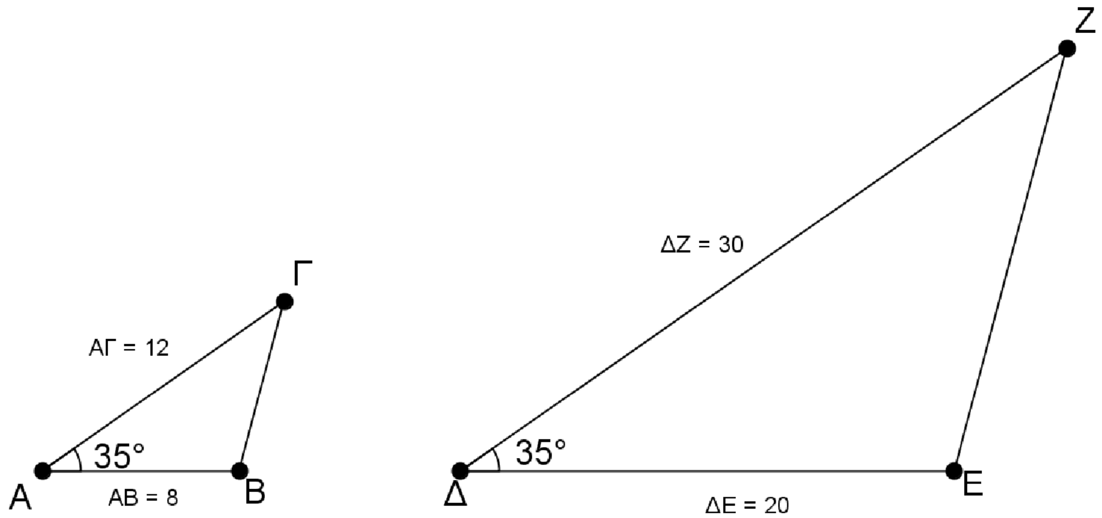
(Μονάδες 10)

Λύση

α) i. Έχουμε,

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \text{ και } \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} \text{ είναι } \frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}.$$

Ακόμα $\hat{A} = \hat{\Delta} = 35°$, άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ είναι όμοια από το 2^{o} κριτήριο ομοιότητας.



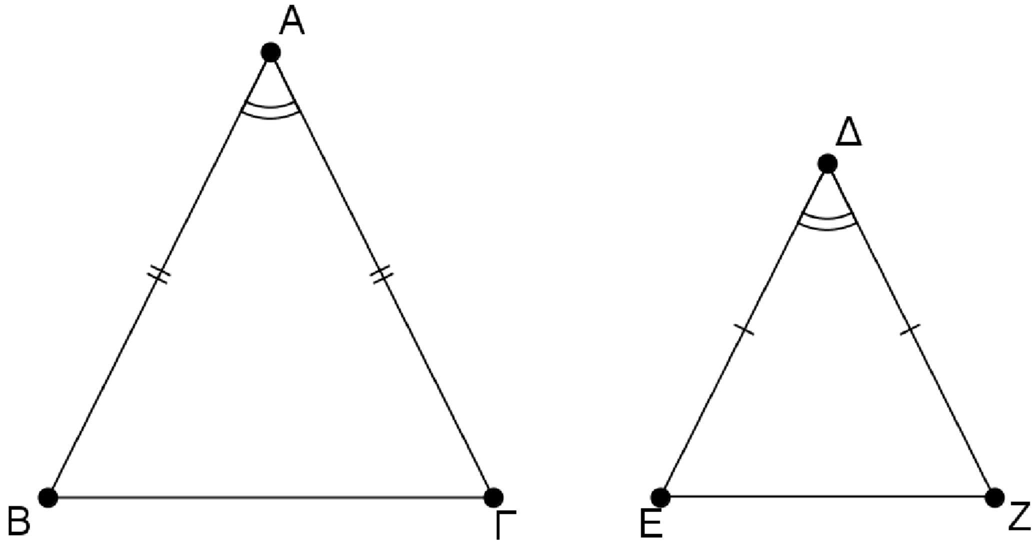
ii. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\Gamma} = 180° - (47° + 38°) = 95°$, άρα $\hat{A} = \hat{E} = 47°$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 95°$, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΕΖΔ είναι όμοια από το 1^{o} κριτήριο ομοιότητας.

iii. Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ είναι όμοια γιατί είναι ισοσκελή με μια αντίστοιχη γωνία ίση.

β) i. Είναι: $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}$

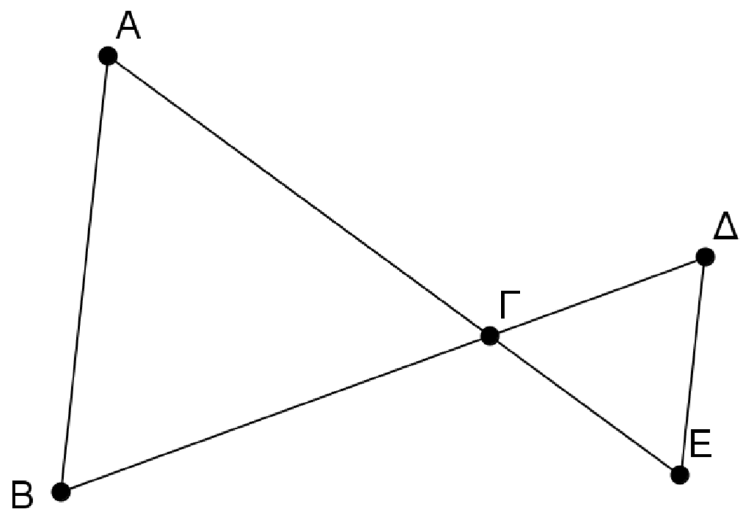
ii. Είναι: $\frac{AB}{EZ} = \frac{A\Gamma}{E\Delta} = \frac{B\Gamma}{Z\Delta}$

iii. Είναι: $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}$



ΑΣΚΗΣΗ Β2 (18990)

Στο παρακάτω σχήμα τα τμήματα ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο Γ.



Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) ΑΒ//ΔΕ

(Μονάδες 12)

β) $B\Gamma = 2\Delta\Gamma$ και $E\Gamma = \frac{1}{2}A\Gamma$

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Αν ΑΒ//ΔΕ τότε $\hat{A} = \hat{E}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΑΕ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΒΔ. Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΕΔΓ είναι όμοια από το $1^{ο}$ κριτήριο ομοιότητας.

β) Είναι $\frac{ΒΓ}{ΔΓ}=2$ και $\frac{ΑΓ}{ΕΓ}=2$, δηλαδή $\frac{ΒΓ}{ΔΓ}=\frac{ΑΓ}{ΕΓ}=2$. Ακόμα τα τρίγωνα έχουν $Α\hat{Γ}Β=Ε\hat{Γ}Δ$ ως κατακορυφήν, άρα είναι όμοια από το $2^{ο}$ κριτήριο ομοιότητας.

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (18993)

α) Να εξετάσετε αν δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. ΑΓ = 4, ΒΓ = 16, ΒΑ = 18, ΔΖ = 10, ΕΖ = 40, ΔΕ = 48.

ii. $\hat{Α}=63°$, $\hat{Γ}=83°$, $\hat{Δ}=63°$, $\hat{Ε}=34°$

(Μονάδες 15)

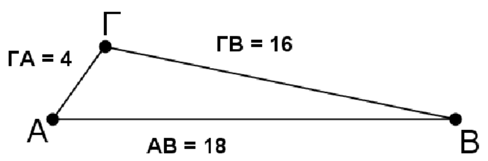
β) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 6, ΑΓ = 7 και ΒΓ = 8. Ποιο θα είναι το μήκος των πλευρών ενός τριγώνου ΔΕΖ το οποίο είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ, με λόγο ομοιότητας 3;

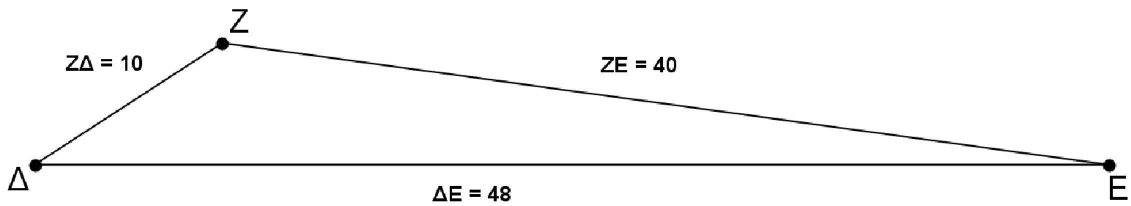
(Μονάδες 10)

Λύση

α)

i. Είναι $\frac{ΑΓ}{ΔΖ}=\frac{ΒΓ}{ΕΖ}=\frac{2}{5}$, ενώ $\frac{ΒΑ}{ΔΕ}=\frac{18}{48}=\frac{3}{8}\neq\frac{2}{5}$, άρα τα τρίγωνα δεν είναι όμοια.





ii. Είναι $\hat{Β}=180°-(63°+83°)=34°$, δηλαδή $\hat{Α}=\hat{Δ}=63°$ και $\hat{Β}=\hat{Ε}=34°$, άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ είναι όμοια από το $1^{ο}$ κριτήριο ομοιότητας.

β) Έστω x, y, z οι πλευρές του τριγώνου ΔΕΖ, τότε

$$\frac{x}{ΑΒ}=\frac{y}{ΑΓ}=\frac{z}{ΒΓ}=3 \text{ ή } \frac{x}{6}=\frac{y}{7}=\frac{z}{8}=3,$$

άρα x = 18, y = 21 και z = 24.

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (19011)

Από ένα σημείο Σ που βρίσκεται έξω από έναν δοσμένο κύκλο φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ, ΣΒ και μία τέμνουσα ΣΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) i) τα τρίγωνα ΣΒΓ και ΣΔΒ είναι όμοια
ii) τα τρίγωνα ΣΑΓ και ΣΔΑ είναι όμοια

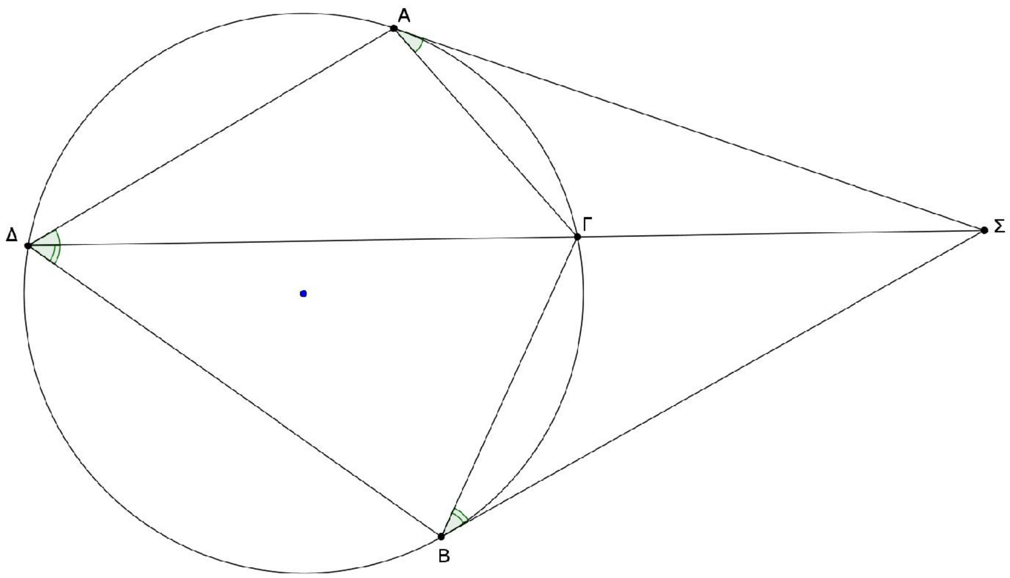
Μονάδες 16

β) $\text{ΑΓ} \cdot \text{ΒΔ} = \text{ΑΔ} \cdot \text{ΒΓ}$

Μονάδες 9

Λύση

α) i) Τα τρίγωνα ΣΒΓ και ΣΔΒ έχουν τη γωνία $\text{Β}\hat{\Sigma}\text{Γ}$ κοινή. Επίσης η γωνία $\text{Γ}\hat{\text{Β}}\Sigma$ είναι γωνία που σχηματίζεται από τη χορδή ΒΓ και την εφαπτομένη ΒΣ, άρα ισούται με την εγγεγραμμένη $\text{Β}\hat{\Delta}\text{Γ}$ που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}$.
Επομένως τα τρίγωνα ΣΒΓ και ΣΔΒ έχουν από δύο γωνίες ίσες άρα είναι όμοια.



ii) Τα τρίγωνα ΣΑΓ και ΣΔΑ έχουν τη γωνία $\text{Α}\hat{\Sigma}\text{Γ}$ κοινή. Επίσης η γωνία $\text{Γ}\hat{\text{Α}}\Sigma$ είναι γωνία που σχηματίζεται από τη χορδή ΑΓ και την εφαπτομένη ΑΣ, άρα ισούται με την εγγεγραμμένη $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Γ}$ που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}$. Επομένως τα τρίγωνα ΣΑΓ και ΣΔΑ έχουν από δύο γωνίες ίσες άρα είναι όμοια.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΣΒΓ και ΣΔΒ είναι όμοια, έχουν ανάλογες τις πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες.
Επομένως,

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΔ}} = \frac{\Sigma\text{Γ}}{\Sigma\text{Α}} \quad (1)$$

Επειδή και τα τρίγωνα ΣΑΓ και ΣΔΑ είναι όμοια, έχουμε,

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΒΔ}} = \frac{\Sigma\text{Γ}}{\Sigma\text{Α}} \quad (2)$$

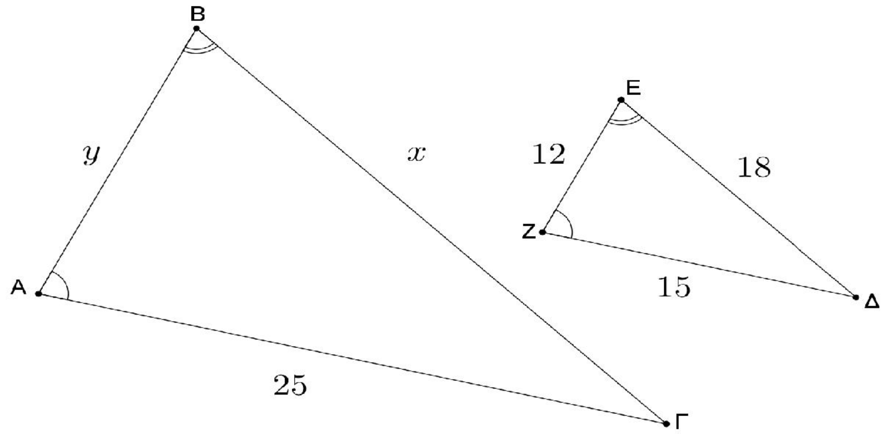
Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε,

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΔ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΒΔ}} \Rightarrow \text{ΑΓ} \cdot \text{ΒΔ} = \text{ΑΔ} \cdot \text{ΒΓ}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β5 (19014)

Τα παρακάτω τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν

$$\widehat{A}=\widehat{Z},\ \widehat{B}=\widehat{E},\ A\Gamma=25,\ EZ=12,\ E\Delta=18 \text{ και } Z\Delta=15$$



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια

Μονάδες 8

β) Να συμπληρώσετε την ισότητα των λόγων με τις κατάλληλες πλευρές του τριγώνου ΔΕΖ: $\frac{BA}{....}=\frac{A\Gamma}{....}=\frac{\Gamma B}{....}$

Μονάδες 9

γ) Να υπολογίσετε τα x και y

Μονάδες 8

<u>Λύση</u>

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια αφού από υπόθεση έχουν $\widehat{A}=\widehat{Z}$ και $\widehat{B}=\widehat{E}$

β) Απέναντι από τις ίσες γωνίες βρίσκονται οι ανάλογες πλευρές, επομένως είναι:

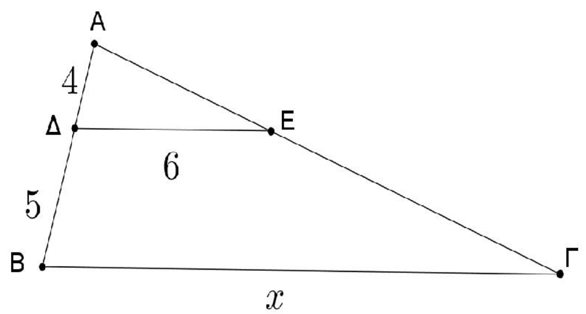
$$\frac{BA}{EZ}=\frac{A\Gamma}{Z\Delta}=\frac{\Gamma B}{\Delta E}$$

γ) Σύμφωνα με το ερώτημα β παίρνουμε:

$$\frac{BA}{EZ}=\frac{A\Gamma}{Z\Delta}\Rightarrow\frac{y}{12}=\frac{25}{15}\Rightarrow y=20 \text{ και } \frac{\Gamma B}{\Delta E}=\frac{A\Gamma}{Z\Delta}\Rightarrow\frac{x}{18}=\frac{25}{15}\Rightarrow x=30$$

ΑΣΚΗΣΗ Β6 (19015)

Στο σχήμα που ακολουθεί, το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στη πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και επιπλέον ισχύουν ΑΔ = 4, ΔΒ = 5 και ΔΕ = 6.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια

Μονάδες 9

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα:

$$\frac{AB}{....}=\frac{....}{\Delta E}=\frac{A\Gamma}{....}$$

Μονάδες 9

γ) Ένας μαθητής χρησιμοποιεί την αναλογία $\frac{4}{6}=\frac{5}{x}$ για να υπολογίσει το x. Να εξηγήσετε γιατί αυτή η αναλογία είναι λάθος, να γράψετε τη σωστή και να υπολογίσετε το x

Μονάδες 7

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν τη γωνία $\hat{A}$ κοινή και επειδή $\Delta E//B\Gamma$ είναι $A\hat{\Delta}E=A\hat{B}\Gamma$ (εντός εκτός και επί τα αυτά). Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν από δύο γωνίες ίσες επομένως είναι όμοια.

β) Απέναντι από τις ίσες γωνίες βρίσκονται οι ανάλογες πλευρές.
Επομένως,

$$\frac{AB}{A\Delta}=\frac{B\Gamma}{\Delta E}=\frac{A\Gamma}{AE}$$

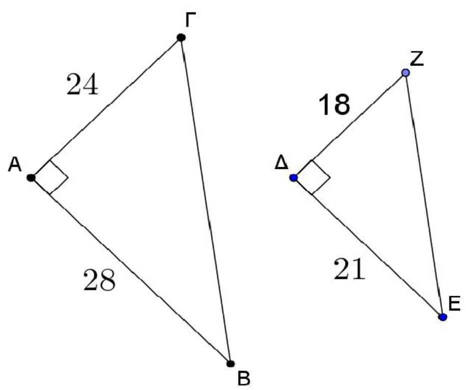
γ) Στην αναλογία $\frac{4}{6}=\frac{5}{x}$ ο πρώτος λόγος αποτελείται από πλευρές του τριγώνου ΑΔΕ άρα η δεύτερη αναλογία θα έπρεπε να αποτελείται από τις αντίστοιχες πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ. Η αναλογία είναι λάθος γιατί ο αριθμητής 5 του δεύτερου κλάσματος δεν είναι μήκος πλευράς τριγώνου ΑΒΓ.

Η σωστή αναλογία είναι:

$$\frac{A\Delta}{\Delta E}=\frac{AB}{B\Gamma}\Rightarrow\frac{4}{6}=\frac{9}{x}\Rightarrow 4x=54\Rightarrow x=\frac{27}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β7 (19017)

Τα παρακάτω τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ορθογώνια με ορθές τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ αντίστοιχα. Επιπλέον, για τις πλευρές των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ ισχύουν ΑΒ = 28, ΑΓ = 24 και ΔΕ = 21, ΔΖ = 18.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια

Μονάδες 10

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα:

$$\frac{AB}{....}=\frac{....}{EZ}=\frac{A\Gamma}{....}$$

Μονάδες 9

γ) Από τις παρακάτω ισότητες να επιλέξετε τη σωστή:

$$\text{i) } ZE=\frac{18}{21}\Gamma B \qquad \text{ii) } ZE=\frac{24}{28}\Gamma B \qquad \text{iii) } ZE=\frac{3}{4}\Gamma B \qquad \text{iv) } ZE=\frac{4}{3}\Gamma B$$

Μονάδες 6

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν $\widehat{A}=\widehat{\Delta}=90^0$ και τις πλευρές που περιέχουν τις γωνίες αυτές ανάλογες, αφού $\frac{24}{18}=\frac{28}{21}=\frac{4}{3}$. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.

β) Απέναντι από τις ίσες γωνίες βρίσκονται οι ανάλογες πλευρές επομένως είναι:

$$\frac{AB}{\Delta E}=\frac{B\Gamma}{EZ}=\frac{A\Gamma}{Z\Delta}$$

γ) Σύμφωνα με το ερώτημα α, ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι $\frac{4}{3}$ επομένως είναι: $\frac{\Gamma B}{ZE}=\frac{4}{3}\Rightarrow ZE=\frac{3}{4}\Gamma B$.Επομένως σωστή απάντηση είναι η (iii)

ΑΣΚΗΣΗ Β8 (19019)

Στο σχήμα που ακολουθεί ισχύουν

$$AB//\Delta\Gamma,\ \ AE=6,\ \ AB=8,\ \ \Gamma E=15 \text{ και } \Delta E=10.$$

α) Να βρείτε δύο ζεύγη ίσων γωνιών των τριγώνων ΑΕΒ και ΔΕΓ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

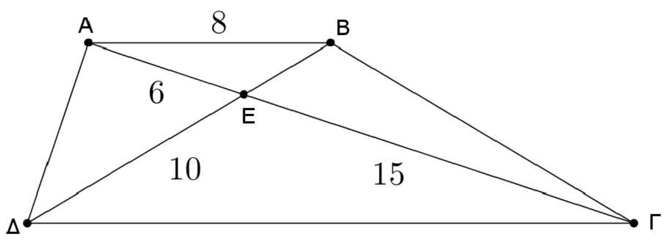
Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ είναι όμοια και να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών τους

Μονάδες 9

γ) Να υπολογίσετε τα τμήματα ΒΕ και ΔΓ

Μονάδες 8



Λύση

α) Είναι $A\hat{E}B = \Gamma\hat{E}\Delta$ ως κατακορυφήν και $B\hat{A}E = \Delta\hat{\Gamma}E$ ως εντός και εναλλάξ γωνίες

β) Σύμφωνα με το ερώτημα α τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ έχουν από δύο γωνίες ίσες άρα είναι όμοια. Η ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών τους είναι:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{AE}{E\Gamma} = \frac{BE}{E\Delta}$$

γ) Σύμφωνα με το ερώτημα β παίρνουμε:

$$\frac{AE}{E\Gamma} = \frac{BE}{E\Delta} \Rightarrow \frac{6}{15} = \frac{BE}{10} \Rightarrow 15 \cdot BE = 60 \Rightarrow BE = 4$$

Επίσης είναι:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{AE}{E\Gamma} \Rightarrow \frac{8}{\Gamma\Delta} = \frac{6}{15} \Rightarrow 6 \cdot \Gamma\Delta = 120 \Rightarrow \Gamma\Delta = 20$$

ΑΣΚΗΣΗ Β9 (19021)

Να χρησιμοποιήσετε τις πληροφορίες που σας δίνονται για το κάθε ζεύγος τριγώνων των παρακάτω σχημάτων προκειμένου να απαντήσετε στα ακόλουθα :

α) Ποιο από τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι όμοια και ποια δεν είναι; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 8

β) Για το ζεύγος ομοίων τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος

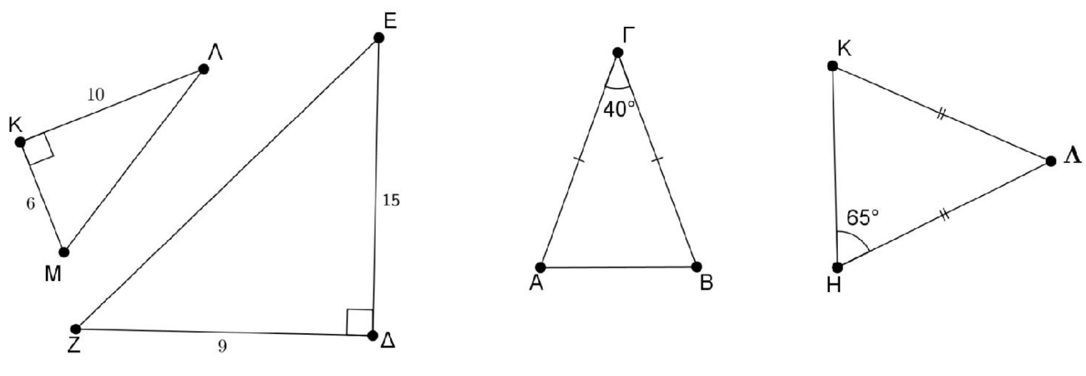
i) να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών

Μονάδες 8

ii) να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

Μονάδες 8

1ο ζεύγος: τρίγωνα ΚΛΜ και ΖΔΕ 2ο ζεύγος: τρίγωνα ΑΒΓ και ΗΚΛ



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΚΛΜ και ΕΖΔ , έχουν :

$$\frac{ΚΛ}{ΕΔ}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3} \text{ και } \frac{ΚΜ}{ΖΔ}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3} \text{ και } \widehat{Κ}=\widehat{Δ}=90^0$$

Άρα τα τρίγωνα ΚΛΜ και ΕΖΔ έχουν δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες τους ίσες άρα τα τρίγωνα είναι όμοια.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΓ = ΒΓ άρα $\widehat{Α}=\widehat{Β}$ οπότε,

$$\widehat{Α}+\widehat{Β}+\widehat{Γ}=180^0 \Rightarrow \widehat{Α}+\widehat{Α}+40^0=180^0 \Rightarrow 2\cdot\widehat{Α}=140^0 \Rightarrow \widehat{Α}=70^0$$

Άρα, $\widehat{Α}=\widehat{Β}=70^0$

Επίσης, το τρίγωνο ΚΛΗ είναι ισοσκελές με ΚΛ = ΛΗ άρα $\widehat{Κ}=\widehat{Η}=65^0$,οπότε

$$\widehat{Κ}+\widehat{Η}+\widehat{Λ}=180^0 \Rightarrow 65^0+65^0+\widehat{Λ}=180^0 \Rightarrow \widehat{Λ}=50^0$$

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΗΚΛ έχουν όλες τους τις γωνίες του άνισες , άρα δεν είναι όμοια .

β) i) Τα τρίγωνα ΚΛΜ και ΕΖΔ είναι όμοια άρα

$$\frac{ΚΛ}{ΕΔ}=\frac{ΚΜ}{ΖΔ}=\frac{ΜΛ}{ΕΖ} \quad (1)$$

ii) Από σχέση (1) έχουμε,

$$λ=\frac{ΚΛ}{ΕΔ}=\frac{ΚΜ}{ΖΔ}=\frac{ΜΛ}{ΕΖ}$$

άρα

$$λ=\frac{10}{15}=\frac{6}{9}=\frac{ΜΛ}{ΕΖ} \text{ δηλαδή } λ=\frac{2}{3}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β10 (19023)

Στο παρακάτω σχήμα, τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ και ΚΛΜΝΡ είναι όμοια και έχουν $\widehat{Δ}=\widehat{Ν}$ και $\widehat{Β}=\widehat{Λ}$

α) Να προσδιορίσετε το λόγο ομοιότητάς τους. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

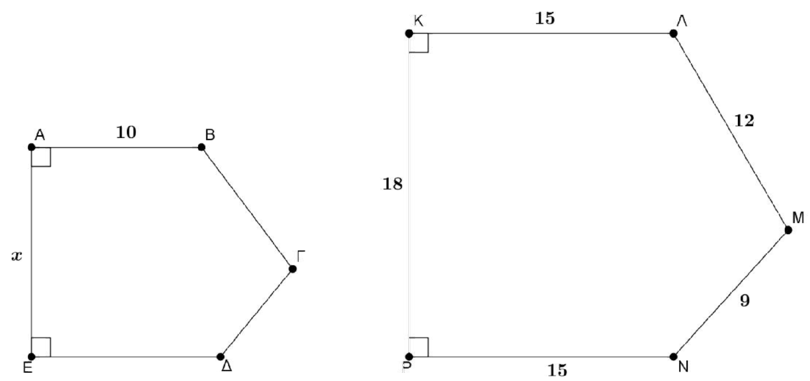
Μονάδες 8

β) Να υπολογίσετε το μήκος x της πλευράς ΑΕ

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε την περίμετρο του πολυγώνου ΑΒΓΔΕ

Μονάδες 9



Λύση

α) Αφού τα δύο πολύγωνα ΑΒΓΔΕ και ΚΛΜΝΡ είναι όμοια τότε ο λόγος ομοιότητας τους θα είναι ίσος με τον λόγο των πλευρών τους :

$$\lambda = \frac{AB}{K\Lambda} = \frac{B\Gamma}{\Lambda M} = \frac{\Gamma\Delta}{MN} = \frac{\Delta E}{NP} = \frac{EA}{PK} \quad \textbf{(1)}$$

άρα

$$\lambda = \frac{10}{15} = \frac{B\Gamma}{\Lambda M} = \frac{\Gamma\Delta}{MN} = \frac{\Delta E}{NP} = \frac{EA}{PK} \text{ δηλαδή } \lambda = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

β) Από την σχέση (1) έχω,

$$\lambda = \frac{AB}{K\Lambda} = \frac{B\Gamma}{\Lambda M} = \frac{\Gamma\Delta}{MN} = \frac{\Delta E}{NP} = \frac{EA}{PK}$$

δηλαδή

$$\lambda = \frac{EA}{PK} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{x}{18} \Leftrightarrow 3x = 36 \Leftrightarrow x = 12$$

γ) Από την σχέση (1) έχω,

$$\lambda = \frac{AB}{K\Lambda} = \frac{B\Gamma}{\Lambda M} = \frac{\Gamma\Delta}{MN} = \frac{\Delta E}{NP} = \frac{EA}{PK}$$

από θεωρία γνωρίζω ότι,

$$\lambda = \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E + EA}{K\Lambda + \Lambda M + MN + NP + PK} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E + EA}{15 + 12 + 9 + 15 + 18}$$

Αν $\Pi_1 = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E + EA$ η περίμετρος του πολύγωνου ΑΒΓΔΕ, τότε

$$\frac{2}{3} = \frac{\Pi_1}{69} \Rightarrow 3 \cdot \Pi_1 = 2 \cdot 69 \Rightarrow \Pi_1 = 46$$

ΑΣΚΗΣΗ Β11 (19030)

Στη διχοτόμο Οδ της γωνίας $x\hat{O}y$ θεωρούμε τα σημεία Α,Β τέτοια ώστε $OB = 2 \cdot OA$. Η κάθετος στην Οδ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά Οx στο σημείο Ε και έστω Δ η προβολή του Β στην Οy.

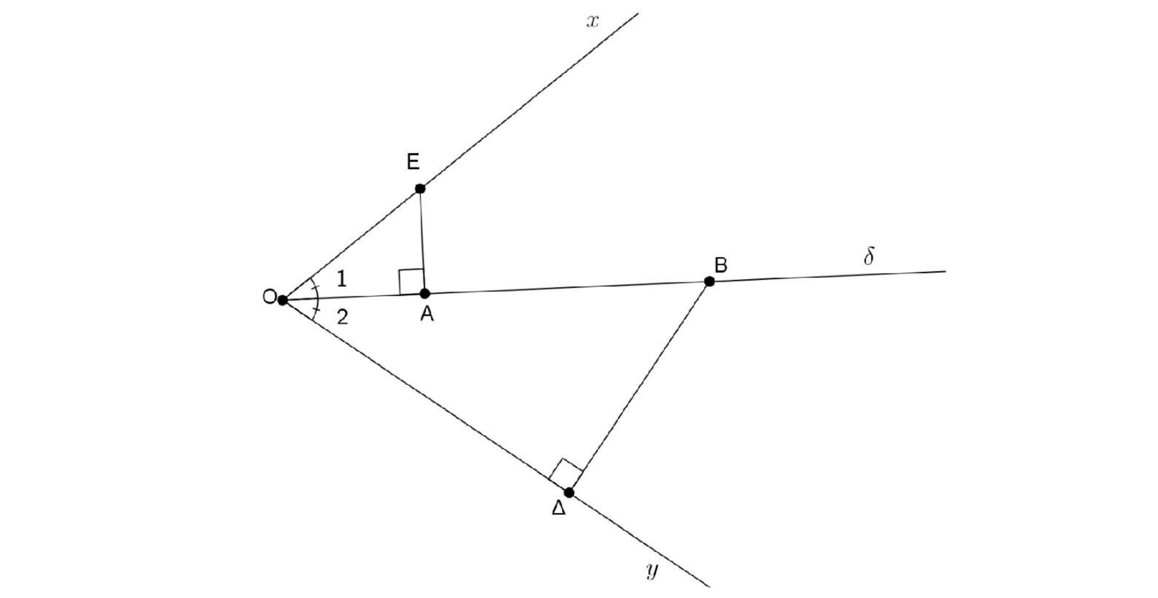
Να αποδείξετε ότι :

α) Τα τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΒΔ είναι όμοια

Μονάδες 10

β) $2 \cdot OA^2 = O\Delta \cdot OE$

Μονάδες 15



<u>Λύση</u>

α) Τα τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΔΒ , έχουν :

- $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (διότι Οδ διχοτόμος της $x\widehat{O}y$ από υπόθεση)
- $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^0$ (από υπόθεση αφού $EA \perp O\delta$ και $B\Delta \perp Oy$)

Άρα τα τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΔΒ έχουν δύο γωνίες τους ίσες άρα από κριτήριο ομοιότητας είναι όμοια .

β) Αφού τα τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΔΒ είναι όμοια τότε οι πλευρές τους θα είναι ανάλογες άρα:

$$\frac{AE}{B\Delta} = \frac{OE}{OB} = \frac{OA}{O\Delta} \Leftrightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{OA}{O\Delta} \overset{OB=2\cdot OA}{\Leftrightarrow} \frac{OE}{2\cdot OA} = \frac{OA}{O\Delta}$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot OA\cdot OA = OE\cdot O\Delta \Leftrightarrow 2\cdot OA^2 = OE\cdot O\Delta$$

ΑΣΚΗΣΗ Β12 (19035)

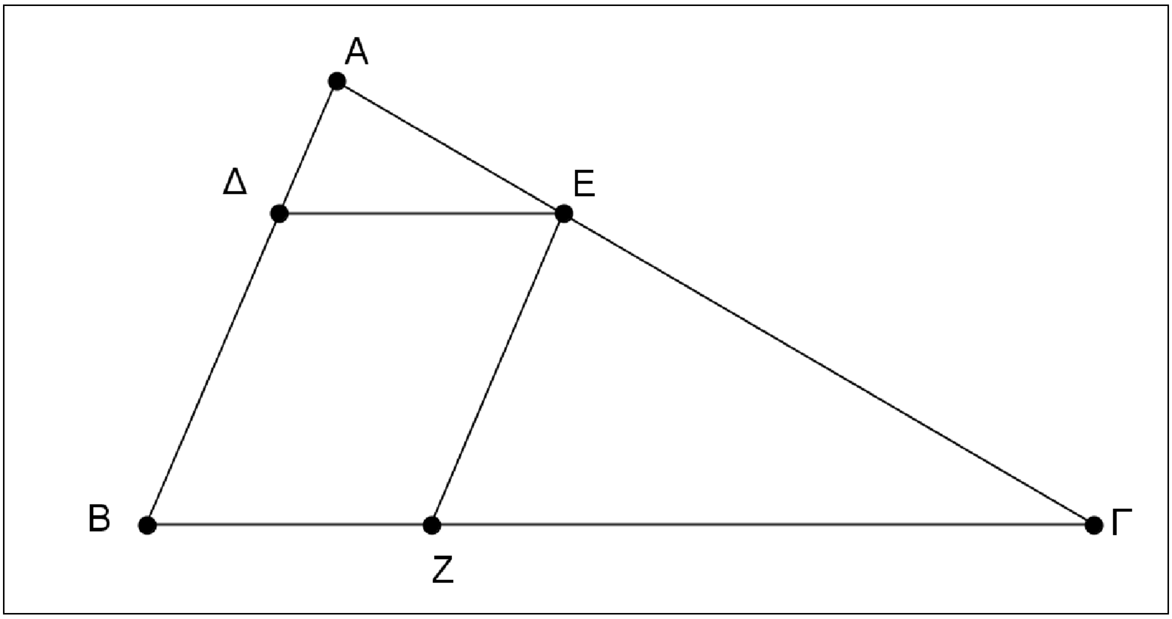
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα ώστε $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{3}$. Από το σημείο Ε φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΒ , η οποία τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ζ . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) $3BZ = B\Gamma$

(Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, αφού

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{1}{3} \text{ και η γωνία Α είναι κοινή}$$

β) Αρχικά το τετράπλευρο ΔΕΖΒ είναι παραλληλόγραμμο, αφού από το Πόρισμα του Θαλή (§7.7) έχουμε ότι η ευθεία ΔΕ χωρίζει στο τρίγωνο ΑΒΓ τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ σε μέρη ανάλογα, άρα ΔΕ // ΒΓ. Επίσης ΕΖ // ΑΒ, από τα δεδομένα της άσκησης, οπότε ΔΕ = ΒΖ.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν λόγο ομοιότητας

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΔΕ}{ΒΓ}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{ΔΕ}{ΒΓ}=\frac{1}{3}\overset{ΔΕ=ΒΖ}{\Rightarrow}\frac{ΒΖ}{ΒΓ}=\frac{1}{3}\Rightarrow 3ΒΖ = ΒΓ$$

ΆΣΚΗΣΗ Β13 (22308)

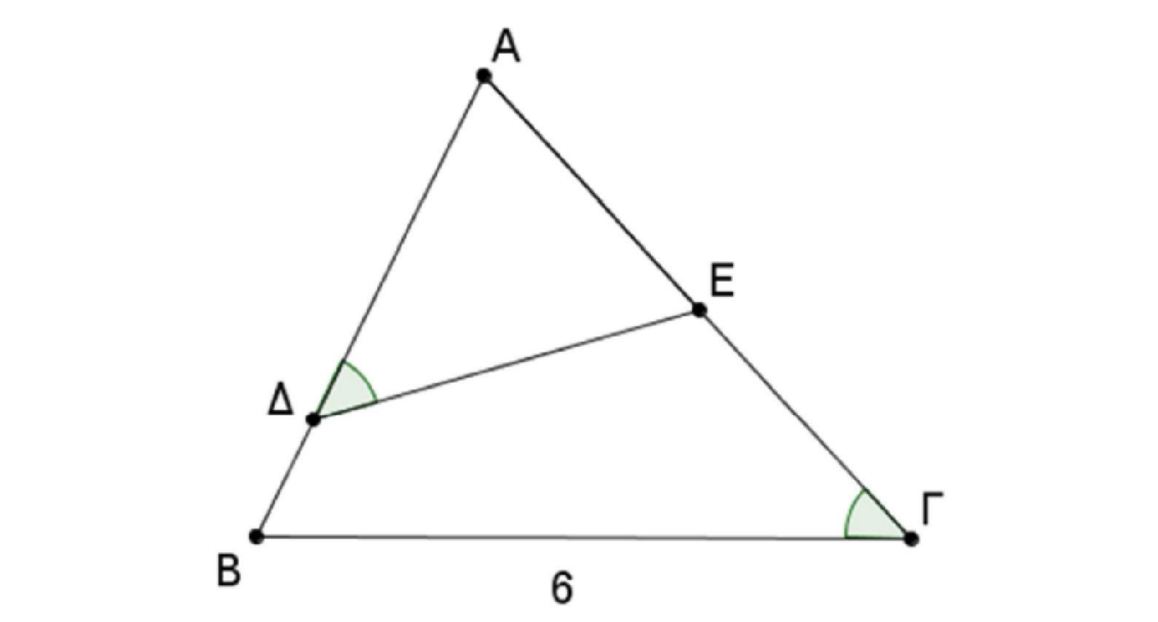
Στο ακόλουθο σχήμα είναι $Α\hat{Δ}Ε=Α\hat{Γ}Β$ και $ΒΓ=6$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια και να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα $\frac{ΑΒ}{...}=\frac{...}{ΔΕ}=\frac{ΑΓ}{...}$

Μονάδες 15

β) Αν ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσος με $\frac{3}{2}$, να βρείτε το μήκος του τμήματος ΔΕ.

Μονάδες 10



ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια καθώς έχουν:

$$\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} \text{ (από την υπόθεση)}$$

$$\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}} \text{ (κοινή γωνία)}$$

Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια.

Άρα από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ προκύπτει ότι:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\Delta\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{A}\Delta}$$

καθώς απέναντι από τις ίσες γωνίες βρίσκονται ομόλογες πλευρές.

β) Είναι και από το προηγούμενο ερώτημα

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\Delta\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{A}\Delta} = \frac{3}{2}$$

οπότε

$$\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\Delta\mathrm{E}} = \frac{3}{2} \overset{\mathrm{B\Gamma}=6}{\Leftrightarrow} \frac{6}{\Delta\mathrm{E}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\Delta\mathrm{E}}{6} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \Delta\mathrm{E} = \frac{6\cdot 2}{3} \Leftrightarrow \Delta\mathrm{E} = 4$$

Συνεπώς $\Delta\mathrm{E} = 4$ το ζητούμενο μήκος.

«Θέμα Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (18976)
Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη του ΑΔ και ΒΕ.
α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι και σκαληνό, τότε:
i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι όμοια.

Μονάδες 10

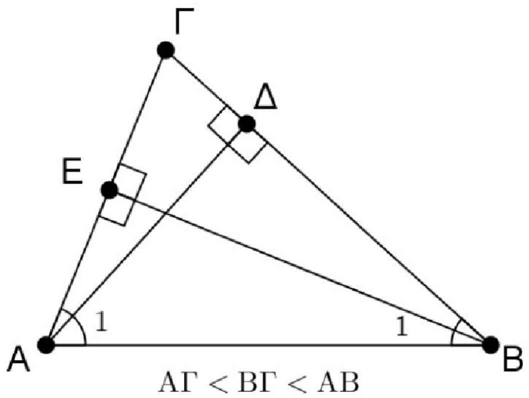
ii. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΑ δεν μπορεί να είναι όμοια.

Μονάδες 10

β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές με κορυφή το Γ, τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΑ είναι όμοια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ
α) i. Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι όμοια επειδή είναι ορθογώνια και έχουν την γωνία $\hat{\Gamma}$ κοινή.



ii. Τα δύο αυτά τρίγωνα είναι ορθογώνια. Για να είναι όμοια θα πρέπει να είναι και $\hat{B} = \hat{A}$ δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές, άτοπο γιατί το ΑΒΓ είναι οξυγώνιο και το ύψος του, ΑΔ είναι εσωτερικό της γωνίας $B\hat{A}E$.

β) Αν το ΑΒΓ είναι ισοσκελές με κορυφή το Γ, τότε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΑ είναι όμοια γιατί έχουν δύο γωνίες ίσες, αφού είναι ορθογώνια και έχουν $\hat{B} = \hat{A}$.

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (19016) *(τροποποιήθηκε στις 23 – 12 – 2014)*
Στο παρακάτω σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Ε και Δ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, έτσι ώστε να ισχύουν: $AE = \frac{2}{3}A\Gamma$ και $A\Delta = \frac{2}{3}AB$

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{AE\Delta} = \widehat{A\Gamma B}$

Μονάδες 9

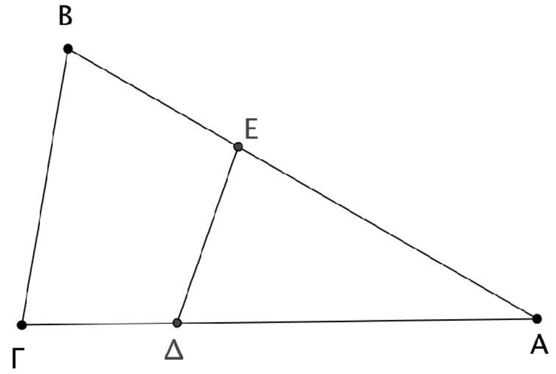
β) Να εξετάσετε αν ισχύει $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{E\Delta}{B\Gamma}$

Μονάδες 8

γ) Να εξετάσετε αν το τμήμα ΒΓ είναι παράλληλο στο τμήμα ΔΕ

Μονάδες 8

Να αιτιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας



Λύση

α) Από την υπόθεση έχουμε ότι : $\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{2}{3}$ και $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{2}{3}$ άρα έχουμε, $\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{2}{3}$

Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ είναι όμοια γιατί :

$$\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} \text{ και Α γωνία κοινή .}$$

Οι γωνίες $\widehat{ΑΕΔ}, \widehat{ΑΓΒ}$ είναι απέναντι από τις ομόλογες πλευρές ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα

Οπότε θα είναι ίσες , άρα $\widehat{ΑΕΔ} = \widehat{ΑΓΒ}$

β) Στο πρώτο ερώτημα δείξαμε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ είναι όμοια . Οι πλευρές ΕΔ , ΒΓ είναι απέναντι από τη γωνία Α που είναι κοινή για τα δύο τρίγωνα .

Έχουμε, $\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΕΔ}{ΒΓ}$

γ) Τα τμήματα ΕΔ , ΒΓ τέμνονται από την ευθεία ΑΒ .

Έστω ΕΔ // ΒΓ τότε, $\widehat{ΑΕΔ} = \widehat{ΑΒΓ}$ (1) (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη παραλλήλων) .

Από το πρώτο ερώτημα έχουμε, $\widehat{ΑΕΔ} = \widehat{ΑΓΒ}$ (2) .

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε,

$$\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΑΓΒ}$$

οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ , **άτοπο** γιατί από την υπόθεση έχουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι σκαληνό .

Άρα δεν γίνεται το τμήμα ΒΓ να είναι παράλληλο με το τμήμα ΔΕ .

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (19027) *(τροποποιήθηκε στις 23 – 12 – 2014 – αφαιρέθηκε το δ υποερώτημα)*

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{3}$. Από το σημείο Α φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ . Η ευθεία (ε) τέμνει τις προεκτάσεις των ΒΕ και ΓΔ στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα .

Να αποδείξετε ότι :

α) ΔΕ//ΓΒ

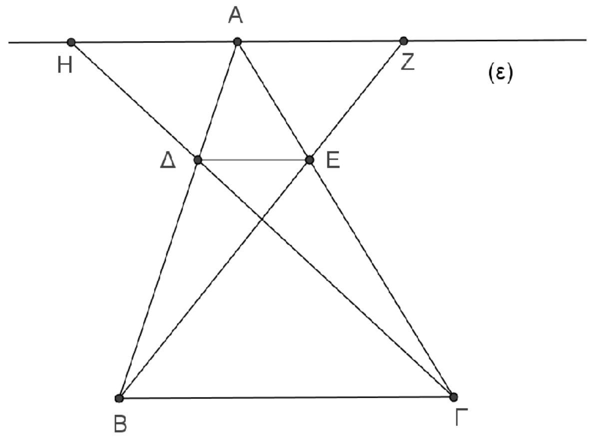
Μονάδες 8

β) $ZE = \frac{1}{2}EB$

Μονάδες 8

γ) $AZ=\frac{1}{2}B\Gamma$

Μονάδες 9



Λύση

α) Έχουμε τις ευθείες (ε) , ΔΕ και ΒΓ με (ε) // ΒΓ από τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ . Επειδή

$$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{1}{3} \text{ και } \frac{AE}{A\Gamma}=\frac{1}{3}$$

άρα $\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AE}{A\Gamma}$

Επομένως ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος Θαλή, οπότε ΔΕ // ΒΓ

β) Επειδή ΑΖ // ΒΓ τα τρίγωνα ΑΖΕ και ΕΒΓ είναι όμοια . Άρα

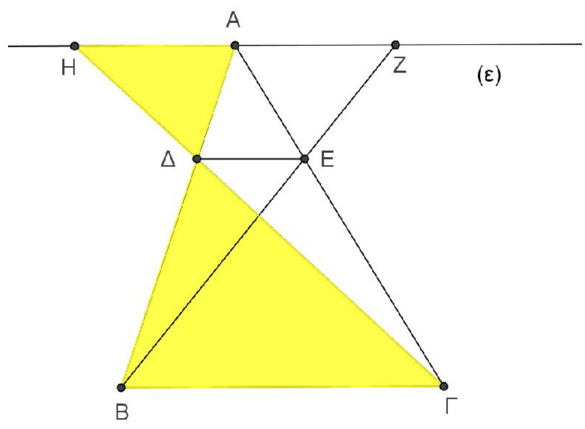
$$\frac{ZE}{EB}=\frac{AE}{E\Gamma} \quad (1)$$

Όμως είναι:

$$\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{AE}{A\Gamma-AE}=\frac{1}{3-1} \Leftrightarrow \frac{AE}{E\Gamma}=\frac{1}{2} \quad (2)$$

Άρα από τις σχέσεις (1) και (2) θα είναι και

$$\frac{ZE}{EB}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow ZE=\frac{1}{2}EB$$



γ) Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΖΕ και ΕΒΓ του προηγούμενου ερωτήματος , έχουμε ότι

$$\frac{AZ}{B\Gamma}=\frac{ZE}{EB} \Leftrightarrow \frac{AZ}{B\Gamma}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow AZ=\frac{1}{2}B\Gamma$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (19029) *(τροποποιήθηκε στις 23 – 12 – 2014 – αφαιρέθηκε το δ υποερώτημα)*

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB//\Gamma\Delta$) και σημείο Μ της πλευράς του ΑΔ ώστε $\frac{AM}{A\Delta}=\frac{1}{3}$

Από το Μ φέρνουμε παράλληλη προς τις βάσεις του τραπεζίου , η οποία τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα σημεία Κ και Ν αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

α) $\frac{AK}{A\Gamma}=\frac{1}{3}$

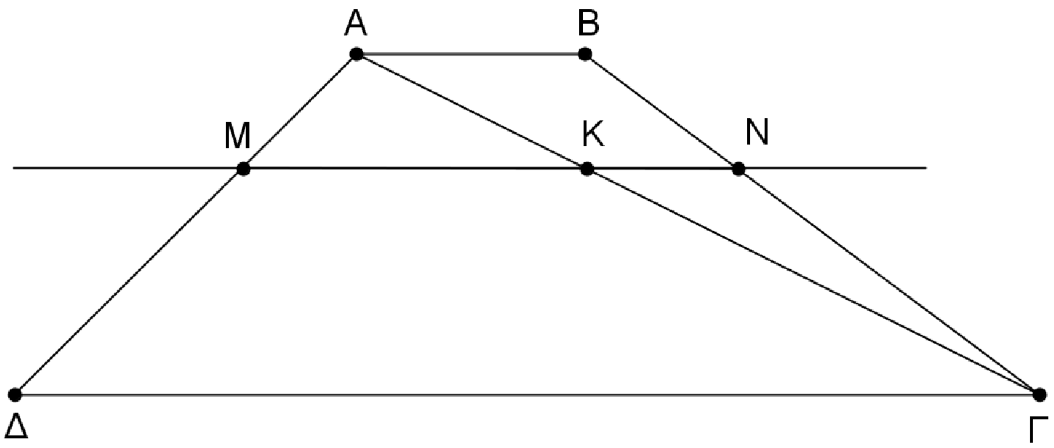
Μονάδες 8

β) $\frac{KN}{AB}=\frac{2}{3}$

Μονάδες 8

γ) $MN=\frac{1}{3}\Gamma\Delta+\frac{2}{3}AB$

Μονάδες 9



ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΓΔ είναι $MK//\Gamma\Delta$, οπότε τα τρίγωνα ΑΜΚ και ΑΓΔ έχουν πλευρές ανάλογες , άρα

$$\frac{AM}{A\Delta}=\frac{AK}{A\Gamma}=\frac{MK}{\Gamma\Delta}\Leftrightarrow\frac{AM}{A\Delta}=\frac{AK}{A\Gamma}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{AK}{A\Gamma}=\frac{1}{3}$$

β) Είναι

$$\frac{AK}{A\Gamma}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{A\Gamma-\Gamma K}{A\Gamma}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{A\Gamma}{A\Gamma}-\frac{\Gamma K}{A\Gamma}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 1-\frac{\Gamma K}{A\Gamma}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{\Gamma K}{A\Gamma}=\frac{2}{3}$$

Στο τρίγωνο ΓΑΒ είναι $KN//AB$, οπότε τα τρίγωνα ΓΚΝ και ΓΑΒ έχουν πλευρές ανάλογες , άρα

$$\frac{\Gamma K}{\Gamma A}=\frac{\Gamma N}{\Gamma B}=\frac{KN}{AB}\Leftrightarrow\frac{\Gamma K}{\Gamma A}=\frac{KN}{AB}\Leftrightarrow\frac{KN}{AB}=\frac{2}{3}$$

γ) Από α) ερώτημα έχω ότι

$$\frac{MK}{\Gamma\Delta}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow MK=\frac{1}{3}\Gamma\Delta\ ,$$

ενώ από β) ερώτημα έχω ότι

$$\frac{KN}{AB}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow KN=\frac{2}{3}AB.$$

Είναι

$$MN=MK+KN=\frac{1}{3}\Gamma\Delta+\frac{2}{3}AB$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ5 (19039) *(τροποποιήθηκε το β υποερώτημα στις 23 – 12 – 2014)*

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$, $\hat{A}=36^0$ και η διχοτόμος του ΒΔ.

α) Να αποδείξετε ότι :

i) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια.

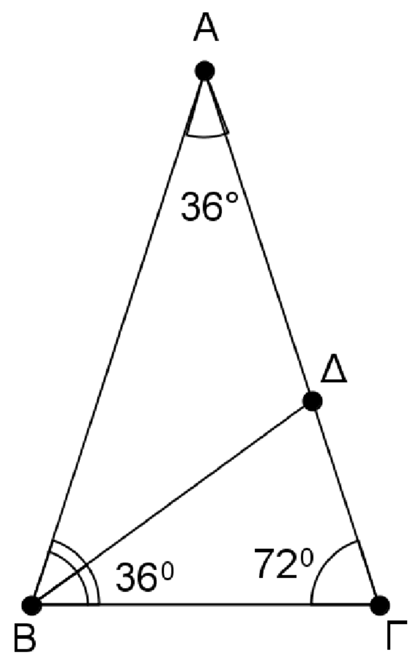
Μονάδες 6

ii) $A\Delta^2=A\Gamma\cdot\Delta\Gamma$

Μονάδες 9

β) Αν $A\Gamma=1$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΔ

Μονάδες 10



ΛΥΣΗ

α) Στο ΑΒΓ είναι ισοσκελές , οπότε $\hat{B}=\hat{\Gamma}$.Από άθροισμα γωνιών τριγώνου στο ΑΒΓ έχουμε,:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^0\Leftrightarrow 36^0+2\hat{B}=180^0\Leftrightarrow\hat{B}=72^0\text{ , άρα και }\hat{B}=\hat{\Gamma}=72^0 .$$

Επειδή ΒΔ είναι διχοτόμος, άρα

$$A\hat{B}\Delta=\Delta\hat{B}\Gamma=36^0.$$

Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ έχουν,

- $\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}$ (κοινή)
- $\Delta\hat{B}\Gamma=\hat{A}=36^0$

Δηλαδή έχουν 2 γωνίες ίσες μια προς μια , άρα είναι όμοια, οπότε

$$\frac{Β\Delta}{ΑΒ}=\frac{\Delta\Gamma}{Β\Gamma}=\frac{Β\Gamma}{Α\Gamma}$$

β) Επειδή $\hat{Α}=\Delta\hat{Β}\Gamma=36^0$ το τρίγωνο ΔΑΒ είναι ισοσκελές , άρα $Α\Delta=Β\Delta$.

Επίσης η γωνία ΒΔΓ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΔΒ , άρα

$$Β\hat{\Delta}\Gamma=\hat{Α}+Α\hat{Β}\Delta=36^0+36^0=72^0 \ ,$$

δηλαδή στο τρίγωνο ΒΔΓ έχω $Β\hat{\Delta}\Gamma=\hat{\Gamma}=72^0$, άρα ισοσκελές , οπότε $Β\Gamma=Β\Delta$

Επομένως η αναλογία του α) ερωτήματος γίνεται

$$\frac{Α\Delta}{Α\Gamma}=\frac{\Delta\Gamma}{Α\Delta}\Leftrightarrow Α\Delta^2=Α\Gamma\cdot\Delta\Gamma$$

<u>Β΄ τρόπος</u> : *Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου στο ΑΒΓ*

γ) Για $Α\Gamma=1$ από β) ερώτημα έχουμε, $Α\Delta^2=\Delta\Gamma$, άρα

$$Α\Gamma=Α\Delta+\Gamma\Delta\Leftrightarrow 1=Α\Delta+Α\Delta^2\Leftrightarrow Α\Delta^2+Α\Delta-1=0$$

η οποία είναι δευτεροβάθμια με διακρίνουσα :

$$\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-1)=5$$

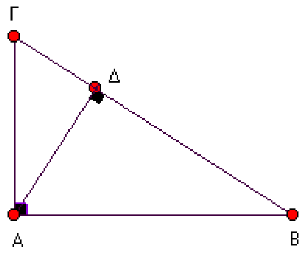
Οπότε

$$Α\Delta=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\Rightarrow Α\Delta=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ (η αρνητική λύση απορρίπτεται)}$$

Συνοπτική Θεωρία 9ου Κεφαλαίου

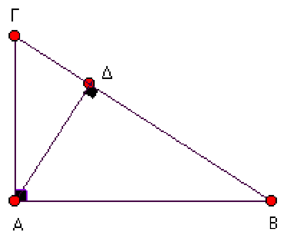
Παράγραφος 9.2: Πυθαγόρειο Θεώρημα

Θεώρημα Ι: Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.



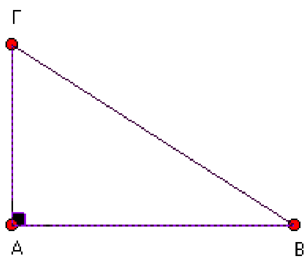
Υπόθεση	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\hat{A} = 90^0$ ΑΔ ύψος $ΑΔ \perp ΒΓ$	$ΑΒ^2 = ΒΔ \cdot ΒΓ$ $ΑΓ^2 = ΓΔ \cdot ΒΓ$

Πόρισμα: Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.



Υπόθεση	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\hat{A} = 90^0$ ΑΔ ύψος $ΑΔ \perp ΒΓ$	$\frac{ΑΒ^2}{ΑΓ^2} = \frac{ΒΔ}{ΓΔ}$ ή $\frac{γ^2}{β^2} = \frac{ΒΔ}{ΓΔ}$

Θεώρημα ΙΙ (Πυθαγόρειο Θεώρημα): Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας

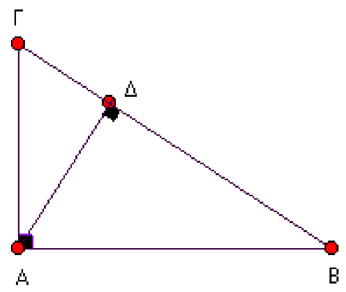


$$A = 90^0 \Rightarrow ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$$

$$\Rightarrow γ^2 + β^2 = α^2$$

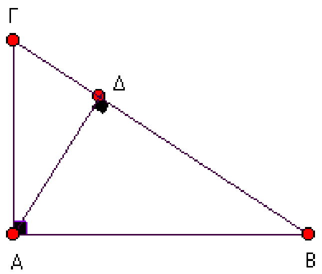
Θεώρημα ΙΙΙ (Αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος): Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει το άθροισμα των τετράγωνων των δυο πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της τρίτης πλευράς του, τότε το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την τρίτη πλευρά.

Θεώρημα IV: Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών του στην υποτείνουσα.



Υπόθεση	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\hat{A} = 90^0$ $υ_a = ΑΔ$ ύψος $ΑΔ \perp ΒΓ$	$ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΓΔ$ ή $υ_α^2 = ΒΔ \cdot ΓΔ$

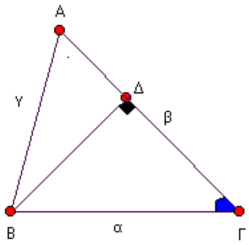
Εφαρμογή: Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το γινόμενο της υποτείνουσας επί το αντίστοιχο ύψος ισούται με το γινόμενο των καθέτων πλευρών του.



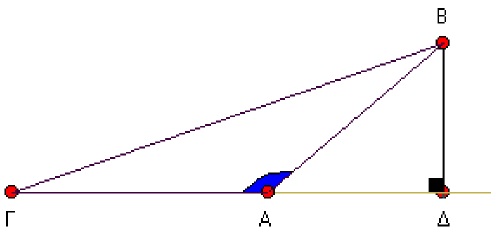
Υπόθεση	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\hat{A} = 90^0$ $υ_a = ΑΔ$ ύψος $ΑΔ \perp ΒΓ$	$β \cdot γ = υ_α \cdot α$ και $\frac{1}{γ^2} + \frac{1}{β^2} = \frac{1}{υ_α^2}$

Παράγραφος 9.4: Γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Θεώρημα Ι: Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.



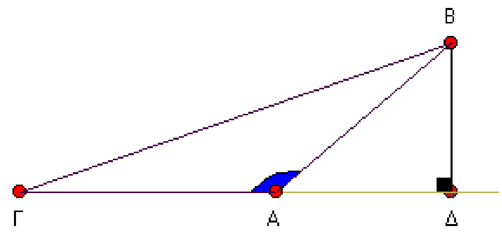
$\hat{A} < 90^0$



$\hat{A} > 90^0$

Υπόθεση	Συμπέρασμα
$\hat{A} < 90^0$ $ΒΔ \perp ΑΓ$	$α^2 = β^2 + γ^2 - 2β \cdot ΑΔ$

Θεώρημα ΙΙ: Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο άλλων πλευρών του ,αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.



Υπόθεση	Συμπέρασμα
$\hat{A} > 90^0$ $B\Delta \perp A\Gamma$	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta$

Πόρισμα: (Ορθό) Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μιας πλευράς του είναι μικρότερο από το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δυο πλευρών του τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά αυτή είναι οξεία.
(**Αντίστροφο)** Αν ένα τρίγωνο έχει μια οξεία γωνία τότε το τετράγωνο της πλευράς που βρίσκεται απέναντι από την οξεία γωνία είναι μικρότερο από το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δυο πλευρών του.

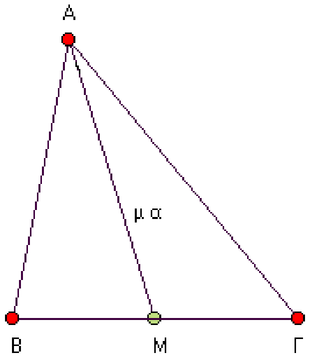
Υπόθεση	Συμπέρασμα
Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:	• $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 90^0$ • $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^0$ • $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 90^0$

Νόμος Συνημιτόνων: Σε κάθε τρίγωνο το τετράγωνο της μιας πλευράς του ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δυο πλευρών του ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο των πλευρών αυτών επί το συνημίτονο της περιεχόμενης γωνίας των πλευρών αυτών.

Υπόθεση	Συμπέρασμα
Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:	**Νόμος Συνημιτόνων** $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\hat{A}$ $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu\hat{B}$ $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}$

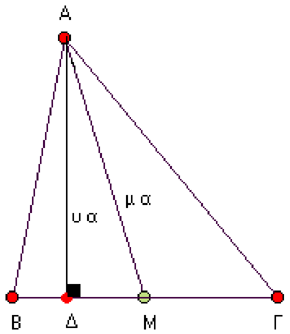
Παράγραφος 9.5: Θεωρήματα Διαμέσων

Θεώρημα Ι: Το άθροισμα των τετραγώνων δυο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.



Υπόθεση	Συμπέρασμα
$\upsilon_\alpha = A\Delta$ ύψος $A\Delta \perp B\Gamma$ και $\mu_\alpha = AM$ διάμεσος Μ μέσο της ΒΓ	$\beta^2+\gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow \mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}{4}$ $\alpha^2+\beta^2 = 2\mu_\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{2} \Leftrightarrow \mu_\gamma^2 = \frac{2\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2}{4}$ $\alpha^2+\gamma^2 = 2\mu_\beta^2 + \frac{\beta^2}{2} \Leftrightarrow \mu_\beta^2 = \frac{2\alpha^2+2\gamma^2-\beta^2}{4}$

Θεώρημα ΙΙ: Η διαφορά των τετραγώνων δυο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.

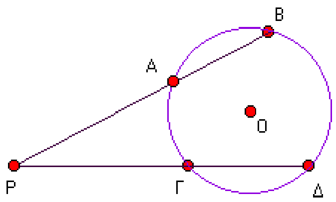


Υπόθεση	Συμπέρασμα
$\upsilon_\alpha = A\Delta$ ύψος: $A\Delta \perp B\Gamma$ και $\mu_\alpha = AM$ διάμεσος: Μ μέσο της ΒΓ	$\beta^2-\gamma^2 = 2\alpha\cdot M\Delta$ ή $A\Gamma^2 - AB^2 = 2B\Gamma\cdot M\Delta$

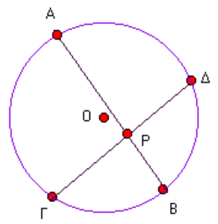
Παράγραφος 9.6: Μετρικές Σχέσεις Σε Κύκλο

Θεώρημα Ι: Αν δυο χορδές ΑΒ, ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Ρ, τότε ισχύει: $PA\cdot PB = P\Gamma\cdot P\Delta$

(σχ. 1)



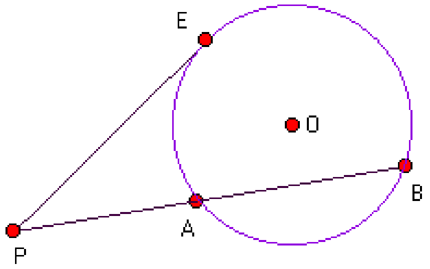
(σχ. 2)



Υπόθεση	Συμπέρασμα
ΑΒ , ΓΔ χορδές κύκλου και Ρ εξωτερικό σημείο (σχ.1) ή Ρ εσωτερικό σημείο κύκλου (σχ.2)	$PA\cdot PB = P\Gamma\cdot P\Delta$ ή $\frac{PA}{P\Delta} = \frac{P\Gamma}{PB}$

Θεώρημα ΙΙ: Αν από ένα εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (O, R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΡΕ και μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α, Β, τότε ισχύει ότι:

$$PE^2 = PA \cdot PB$$

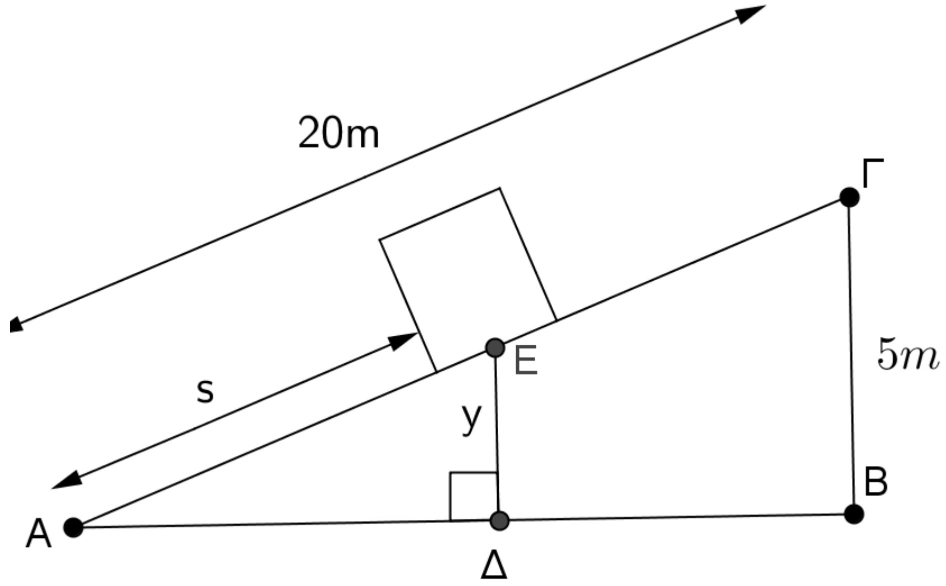


Υπόθεση	Συμπέρασμα
Ρ εξωτερικό σημείο κύκλου (O, R) ΡΕ εφαπτόμενο τμήμα ΡΑΒ τέμνουσα του κύκλου	$PE^2 = PA \cdot PB$ ή $\frac{PA}{PE} = \frac{PE}{PB}$

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (18997)

Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί προς τα πάνω στη ράμπα του παρακάτω σχήματος.



α) Να αποδείξετε ότι για το ύψος y, που απέχει το κουτί από το έδαφος κάθε χρονική στιγμή, ισχύει ότι $y=\frac{s}{4}$, όπου s το μήκος που έχει διανύσει το κουτί πάνω στη ράμπα.

(Μονάδες 15)

β) Όταν το κουτί απέχει από το έδαφος 2 m, να βρείτε:

i. Το μήκος s που έχει διανύσει το κουτί στη ράμπα.

(Μονάδες 3)

ii. Την απόσταση του σημείου Δ από την άκρη της ράμπας Α.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΒΓ είναι όμοια γιατί έχουν και την γωνία $\hat{A}$ κοινή, άρα:

$$\frac{A\Gamma}{AE}=\frac{B\Gamma}{\Delta E} \text{ ή } \frac{20}{s}=\frac{5}{y} \text{ ή } 20y=5s \text{ ή } y=\frac{s}{4}$$

β)

i. Για y=2 m έχουμε $s = 4y = 4\cdot 2 = 8$ m.

ii. Από Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε:

$$A\Delta^2=AE^2-\Delta E^2 \quad \text{ή} \quad A\Delta^2=8^2-2^2 = 64-4 = 60, \quad \text{άρα} \quad A\Delta=\sqrt{60} \text{ m}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (19001)

Τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ είναι α=8, β=6 και γ=5.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 11)

β) Να υπολογίσετε τις προβολές της πλευράς ΑΒ στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ.

(Μονάδες 14)

Παρόμοια με άσκηση 1 / αποδεικτικές / Παράγραφος 9.4 σχολικού βιβλίου

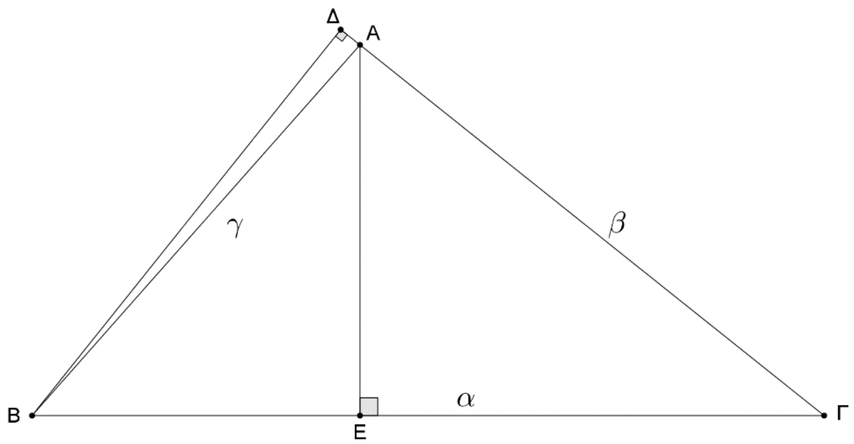
ΛΥΣΗ

α) Είναι,

$$\alpha^2 = 8^2 = 64 \quad \text{και} \quad \beta^2+\gamma^2 = 6^2+5^2 = 36+25 = 61,$$

δηλαδή $\alpha^2 > \beta^2+\gamma^2$, οπότε $\hat{A} > 90°$ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

β) Επειδή $\hat{A} > 90°$ από τη Γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:



$\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2+2\beta\cdot A\Delta$, όπου ΑΔ η προβολή της ΑΒ = γ στην πλευρά ΑΓ, άρα είναι:

$$2\beta\cdot A\Delta = \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 \quad \text{ή} \quad 2\cdot 6\cdot A\Delta = 8^2 - 6^2 - 5^2 = 64 - 61 = 3 \quad \text{ή} \quad A\Delta = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Όμοια αν ΒΕ η προβολή της πλευράς ΑΒ = γ στην ΒΓ τότε:

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\cdot BE, \text{ γιατί } \hat{B} < 90°,$$

άρα

$$2\alpha\cdot BE = \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 \quad \text{ή} \quad 2\cdot 8\cdot BE = 8^2 + 5^2 - 6^2 = 64 + 25 - 36 = 53 \quad \text{ή} \quad BE = \frac{53}{16}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (19005)

Σε τρίγωνο ΑΒΓ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει την πλευρά ΒΓ σε σημείο Δ, τέτοιο ώστε $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{3}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $AB = \frac{3}{4}A\Gamma$

(Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $B\Gamma = \frac{5}{4}A\Gamma$, να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

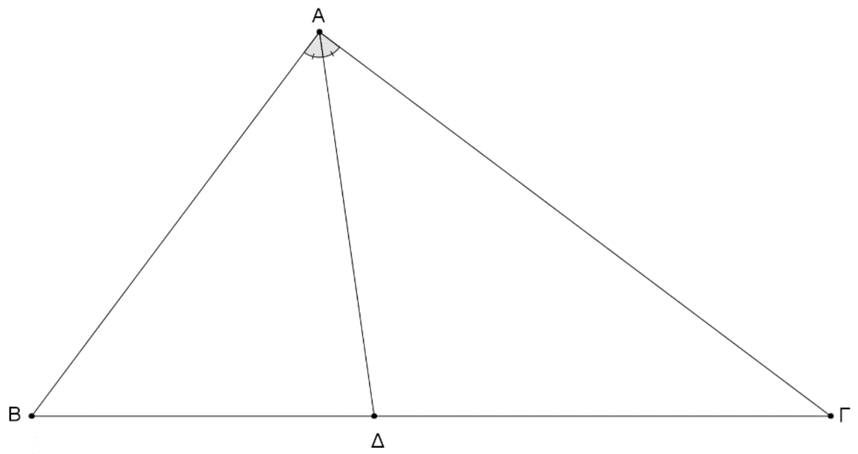
ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι εσωτερική διχοτόμος της γωνίας Α , άρα ισχύει η αναλογία:

$$\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}$$

Οπότε,

$$\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{3}{4} \text{ ή } AB=\frac{3}{4}A\Gamma$$



β) Επειδή $AB=\frac{3}{4}A\Gamma$ συμπεραίνουμε ότι ΑΒ < ΑΓ και αφού $B\Gamma=\frac{5}{4}A\Gamma$ προκύπτει ότι ΒΓ > ΑΓ.

Άρα ΑΒ < ΑΓ <ΒΓ, δηλαδή η ΒΓ είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ.

Επομένως:

$$B\Gamma^2=\left(\frac{5}{4}A\Gamma\right)^2=\frac{25}{16}A\Gamma^2 \text{ και } AB^2+A\Gamma^2=\left(\frac{3}{4}A\Gamma\right)^2+A\Gamma^2=\frac{9}{16}A\Gamma^2+A\Gamma^2=\frac{25}{16}A\Gamma^2$$

Οπότε $AB^2+A\Gamma^2=B\Gamma^2$ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο από το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (19008)

α) Ποιες από τις παρακάτω τριάδες θετικών αριθμών μπορούν να θεωρηθούν μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i) 3, 4, 5

ii) 3λ, 4λ, 5λ με $\lambda>0$

iii) 4, 5, 6

Μονάδες 18

β) Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο, να αποδείξετε ότι το x είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί, σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς, να ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών.

i) Επειδή $5^2 = 3^2 + 4^2$ το τρίγωνο με πλευρές 3, 4, 5 είναι ορθογώνιο

ii) Επειδή $(5\lambda)^2 = (3\lambda)^2 + (4\lambda)^2$ το τρίγωνο με πλευρές $3\lambda, 4\lambda, 5\lambda$ με $\lambda > 0$ είναι ορθογώνιο

iii) Επειδή $6^2 = 36$ ενώ $4^2 + 5^2 = 41$ είναι $6^2 \neq 4^2 + 5^2$ άρα το τρίγωνο με πλευρές 4, 5, 6 δεν είναι ορθογώνιο

β) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} 85^2 &= 51^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 85^2 - 51^2 \\ &\Rightarrow x^2 = (85-51)(85+51) \\ &\Rightarrow x^2 = 4624 \\ &\Rightarrow x = \sqrt{16 \cdot 289} \\ &\Rightarrow x = \sqrt{16} \cdot \sqrt{289} \\ &\Rightarrow x = 4 \cdot 17 \end{aligned}$$

Άρα το x είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4.

Σημείωση: Η άσκηση αναφέρει τριάδες **θετικών** αριθμών, άρα το **λ > 0** είναι περιττό δεδομένο, είναι πλεονασμός.

ΑΣΚΗΣΗ Β5 (19041)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ =90^o) με ύψος ΑΔ και ΑΓ = 8, ΔΓ = $\frac{32}{5}$.

Να υπολογίσετε τα μήκη των παρακάτω τμημάτων:

α) ΒΓ

Μονάδες 9

β) ΑΒ

Μονάδες 8

γ) ΑΔ

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot ΓΔ \Rightarrow 8^2 = ΒΓ \cdot \frac{32}{5} \Rightarrow ΒΓ = 10$$

β) Από το ίδιο ορθογώνιο τρίγωνο με εφαρμογή του πυθαγόρειου θεωρήματος έχουμε:

$$ΑΒ^2 = ΒΓ^2 – ΑΓ^2 = 10^2 – 8^2 = 36$$

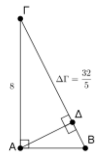
άρα ΑΒ = 6

γ) Αρχικά έχουμε

$$ΔΒ = ΒΓ – ΔΓ = 10 - \frac{32}{5} = \frac{18}{5}.$$

Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ \Rightarrow ΑΔ^2 = \frac{32}{5} \cdot \frac{18}{5} = \frac{576}{25},$$



άρα $ΑΔ = \sqrt{\frac{576}{25}} = \frac{24}{5}$

ΑΣΚΗΣΗ Β6 (19042)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α = 7, β = 4 και $μ_β = \sqrt{33}$

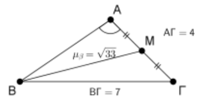
α) Να αποδείξετε ότι γ = 5

Μονάδες 13

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ



α) Είναι

$$μ_β{}^2 = \frac{2α^2 + 2γ^2 - β^2}{4} \Rightarrow 4μ_β{}^2 = 2α^2 + 2γ^2 - β^2$$

και αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση έχουμε:

$$4 \cdot \sqrt{33}^2 = 2 \cdot 7^2 + 2γ^2 - 4^2 \Rightarrow 132 = 98 + 2γ^2 - 16 \Rightarrow γ^2 = 25 \Rightarrow γ = 5$$

β) Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου είναι η α, άρα,

$$\alpha^2 = 7^2 = 49 \text{ και } \beta^2 + \gamma^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$$

οπότε έχουμε ότι $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, δηλαδή $\hat{A} > 90^o$ επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

ΑΣΚΗΣΗ Β7 (19045)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 6, ΒΓ = 9 και $\hat{B} = 60^o$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 3\sqrt{7}$

Μονάδες 8

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του

Μονάδες 8

γ) Να υπολογίσετε την προβολή της ΑΒ πάνω στη ΒΓ

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ από τον νόμο των συνημίτονων έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 – 2ΑΒ\cdot ΒΓ\cdot συν60^o = 6^2 + 9^2 - 2\cdot 6\cdot 9\cdot \frac{1}{2} = 63,$$

επομένως,

$$ΑΓ = \sqrt{63} = \sqrt{9\cdot 7} = 3\sqrt{7}$$

β) Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ είναι η ΒΓ, επομένως

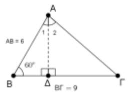
$$ΒΓ^2 = 9^2 = 81$$

και

$$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 6^2 + 63 = 36 + 63 = 99,$$

δηλαδή

$$ΒΓ^2 < ΑΒ^2 + ΑΓ^2$$



από όπου έχουμε ισοδύναμα $\hat{A} < 90^o$ και επειδή η γωνία αυτή είναι η μεγαλύτερη του τριγώνου, εφόσον βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά του, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο.

γ) Αφού $\hat{B} = 60^o < 90^o$, από το θεώρημα της οξείας γωνίας για το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 – 2\cdot ΒΓ\cdot ΒΔ \Rightarrow 63 = 6^2 + 9^2 – 2\cdot 9\cdot ΒΔ \Rightarrow ΒΔ = 3.$$

ΑΣΚΗΣΗ Β8 (2_22291)

Δίνεται κύκλος (K, R) και δύο διάμετροί του ΑΒ και ΓΔ. Έστω Μ εξωτερικό σημείο του κύκλου τέτοιο, ώστε ΑΜ=10, ΒΜ=12 και ΓΜ=14.

α) Να αποδείξετε ότι $ΜΑ^2 + ΜΒ^2 = 2(ΜΚ^2 + R^2)$

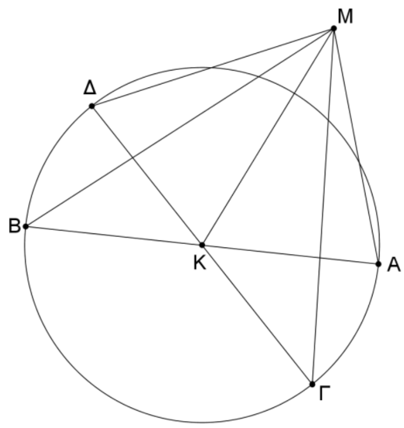
Μονάδες 9

β) Να αποδείξετε ότι $ΜΓ^2 + ΜΔ^2 = 2(ΜΚ^2 + R^2)$

Μονάδες 7

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του ΔΜ

Μονάδες 9



ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΜΑΒ η ΜΚ είναι διάμεσος, άρα σύμφωνα με το πρώτο θεώρημα διαμέσων παίρνουμε:

$$MA^2 + MB^2 = 2MK^2 + \frac{AB^2}{2} = 2MK^2 + \frac{(2R)^2}{2} = 2MK^2 + 2R^2 = 2(MK^2 + R^2)$$

β) Στο τρίγωνο ΜΓΔ η ΜΚ είναι διάμεσος, άρα σύμφωνα με το πρώτο θεώρημα διαμέσων παίρνουμε:

$$M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 2MK^2 + \frac{\Gamma\Delta^2}{2} = 2MK^2 + \frac{(2R)^2}{2} = 2MK^2 + 2R^2 = 2(MK^2 + R^2)$$

γ) Τα δεύτερα μέλη των σχέσεων που αποδείξαμε στα ερωτήματα α και β είναι ίσα, επομένως και τα πρώτα μέλη τους είναι ίσα. Επομένως είναι:

$$M\Gamma^2 + M\Delta^2 = MA^2 + MB^2 \Rightarrow 14^2 + M\Delta^2 = 10^2 + 12^2 \Rightarrow 196 + M\Delta^2 = 244 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M\Delta^2 = 48 \Rightarrow M\Delta = \sqrt{48} \Rightarrow M\Delta = 4\sqrt{3}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β9 (2_22289)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών $\alpha = 5, \beta = 7$ και $\gamma = 3$

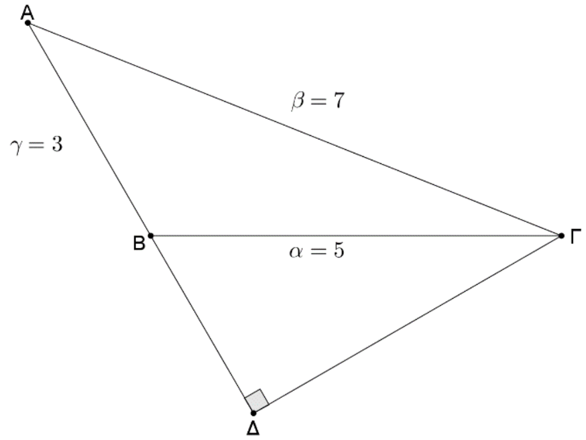
α) Να αποδείξετε ότι $B = 120^0$

Μονάδες 12

β) Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς α πάνω στην ευθεία ΑΒ

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ



α) Με εφαρμογή του νόμου συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε:

$$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha \cdot \text{συν}B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \text{συν}B$$
$$\Rightarrow 49 = 34 - 30 \cdot \text{συν}B$$
$$\Rightarrow 30 \cdot \text{συν}B = 34 - 49$$
$$\Rightarrow 30 \cdot \text{συν}B = -15$$
$$\Rightarrow \text{συν}B = -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow B = 120^0$$

β) Όπως φαίνεται στο σχήμα, η προβολή της πλευράς α στην ευθεία ΑΒ είναι το τμήμα ΒΔ. Με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγόρειου θεωρήματος, στο τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε:

$$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 + 2\gamma \cdot B\Delta \Rightarrow 7^2 = 3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot B\Delta \Rightarrow 6B\Delta = 15 \Rightarrow B\Delta = \frac{5}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β10 (22293)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=12, ΑΓ=6 και ΒΓ=8.

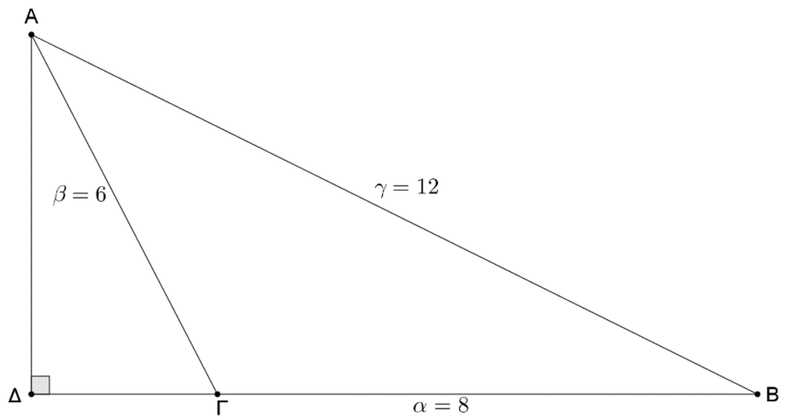
α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην ευθεία ΒΓ

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ



α) Είναι $\gamma > \alpha > \beta$ και $\gamma^2 = 12^2 = 144$ ενώ $\alpha^2 + \beta^2 = 8^2 + 6^2 = 100$

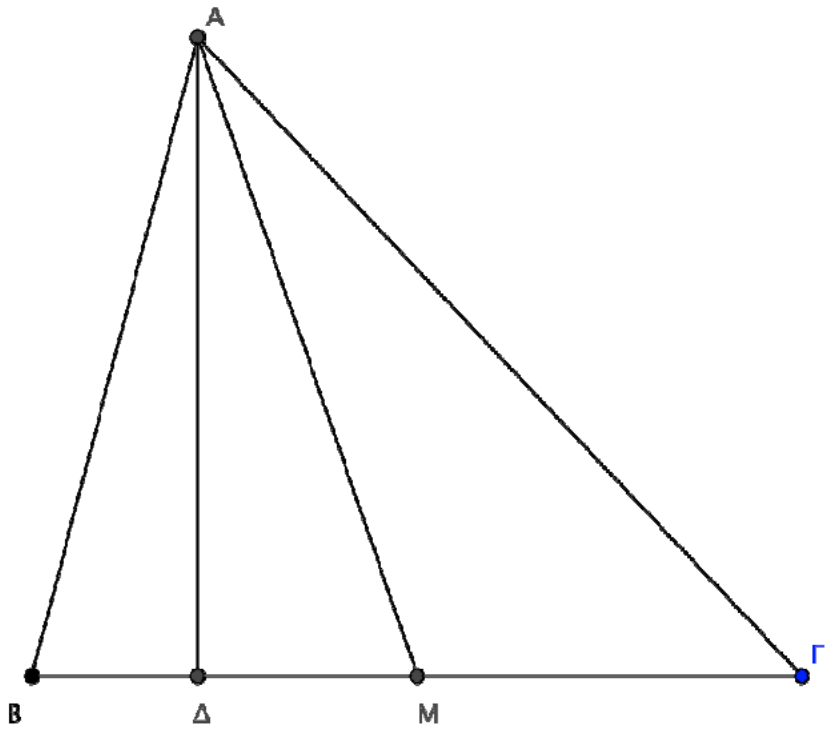
Επομένως είναι: $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow \Gamma > 90^0$

β) Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην ευθεία ΒΓ είναι το τμήμα ΓΔ.
Σύμφωνα με το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\cdot\alpha\cdot \Gamma\Delta \Rightarrow 12^2 = 8^2 + 6^2 + 2\cdot 8\cdot \Gamma\Delta \Rightarrow 16\Gamma\Delta = 44 \Rightarrow \Gamma\Delta = \frac{11}{4}$$

ΆΣΚΗΣΗ Β11 (22304)

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $AB = 6$, $A\Gamma = 8$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και τη διάμεσο ΑΜ και ισχύει ότι: $\Delta M = 2$.



α) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 7$.

Μονάδες 12

β) Να βρείτε το μήκος του ύψους ΑΔ.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε από το 2° θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ

$$A\Gamma^2 - AB^2 = 2B\Gamma\cdot M\Delta \Leftrightarrow 8^2 - 6^2 = 2\cdot B\Gamma\cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 64 - 36 = 4\cdot B\Gamma \Leftrightarrow 28 = 4\cdot B\Gamma \Leftrightarrow B\Gamma = \frac{28}{4} \Leftrightarrow B\Gamma = 7$$

άρα $B\Gamma = 7$

β) Έχουμε $M\Gamma = \frac{7}{2}$ άρα $\Delta\Gamma = 2 + \frac{7}{2} = \frac{11}{2}$, οπότε από Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ παίρνουμε:

$$ΑΔ^2 = ΑΓ^2 - ΔΓ^2 = 8^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2 = 64 - \frac{121}{4} = \frac{135}{4} \Rightarrow ΑΔ = \frac{3\sqrt{15}}{2}$$

ΆΣΚΗΣΗ Β12 (22306)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών $ΒΓ = α\sqrt{3}$, $ΑΓ = α\sqrt{2}$ και $ΑΒ = α$, όπου $α > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να βρείτε ποια είναι η ορθή γωνία.

Μονάδες 12

β) $μ_γ = \frac{3α}{2}$, όπου $μ_γ$ η διάμεσος του ΑΒΓ που αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΒ.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε

$$ΒΓ^2 = \left(α\sqrt{3}\right)^2 = 3α^2$$

$$ΑΓ^2 = \left(α\sqrt{2}\right)^2 = 2α^2$$

$$ΑΒ^2 = α^2$$

οπότε η μεγαλύτερη πλευρά είναι η ΒΓ συνεπώς:

$$ΒΓ^2 = ΑΓ^2 + ΑΒ^2 \Leftrightarrow 3α^2 = 2α^2 + α^2 \Leftrightarrow 3α^2 = 3α^2 \text{ που ισχύει}$$

Συνεπώς το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την $\hat{Α}$.

β) Από το 1ο θεώρημα διαμέσων έχουμε:

$$μ_γ^2 = \frac{2ΒΓ^2 + 2ΑΓ^2 - ΑΒ^2}{4}$$

οπότε

$$μ_γ^2 = \frac{2\cdot 3α^2 + 2\cdot 2α^2 - α^2}{4} \Leftrightarrow μ_γ^2 = \frac{6α^2 + 4α^2 - α^2}{4} \Leftrightarrow μ_γ^2 = \frac{9α^2}{4} \Leftrightarrow μ_γ^2 = \left(\frac{3α}{2}\right)^2$$

Συνεπώς

$$μ_γ = \frac{3α}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β13 (22309)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ για το οποίο έχουμε $β = 7$, $γ = 6$ και η διάμεσος του $μ_α = \frac{\sqrt{89}}{4}$

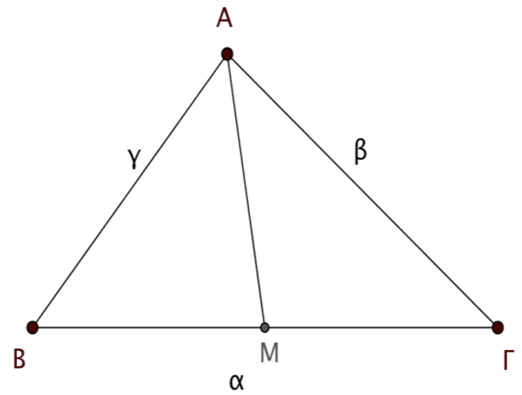
α) Να αποδείξετε ότι $α = 9$.

Μονάδες 13

β) Να υπολογίσετε την προβολή ΜΔ της διαμέσου ΑΜ πάνω στην πλευρά α

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ



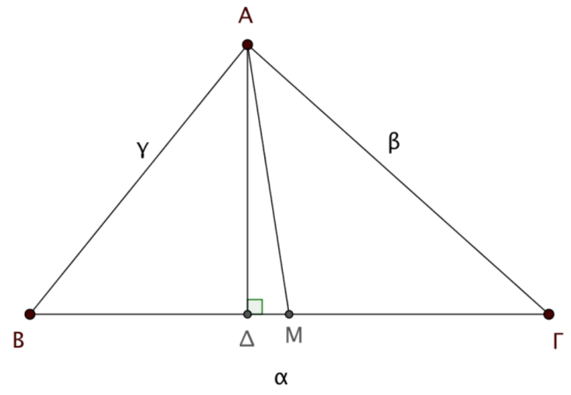
α) Από το πρώτο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ , έχουμε :

$$\beta^2+\gamma^2=2\mu_\alpha^{\ 2}+\frac{\alpha^2}{2}\Leftrightarrow 2\beta^2+2\gamma^2=4\mu_\alpha^{\ 2}+\alpha^2\Leftrightarrow \alpha^2=2\beta^2+2\gamma^2-4\mu_\alpha^{\ 2}\quad (1)$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (1) τις τιμές $\beta=7$, $\gamma=6$, $\mu_\alpha=\frac{\sqrt{89}}{2}$ και έχουμε :

$$\alpha^2=2\cdot 7^2+2\cdot 6^2-4\cdot\left(\frac{\sqrt{89}}{2}\right)^2\Leftrightarrow \alpha^2=98+72-89\Leftrightarrow \alpha^2=81\Leftrightarrow \boxed{\alpha=9}$$

β) Φέρνουμε το ύψος ΑΔ . Από το δεύτερο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ , έχουμε :



$$\beta^2-\gamma^2=2\alpha\cdot M\Delta\Leftrightarrow M\Delta=\frac{\beta^2-\gamma^2}{2\alpha}\Leftrightarrow M\Delta=\frac{7^2-6^2}{2\cdot 9}\Leftrightarrow \boxed{M\Delta=\frac{13}{18}}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β14 (22311)

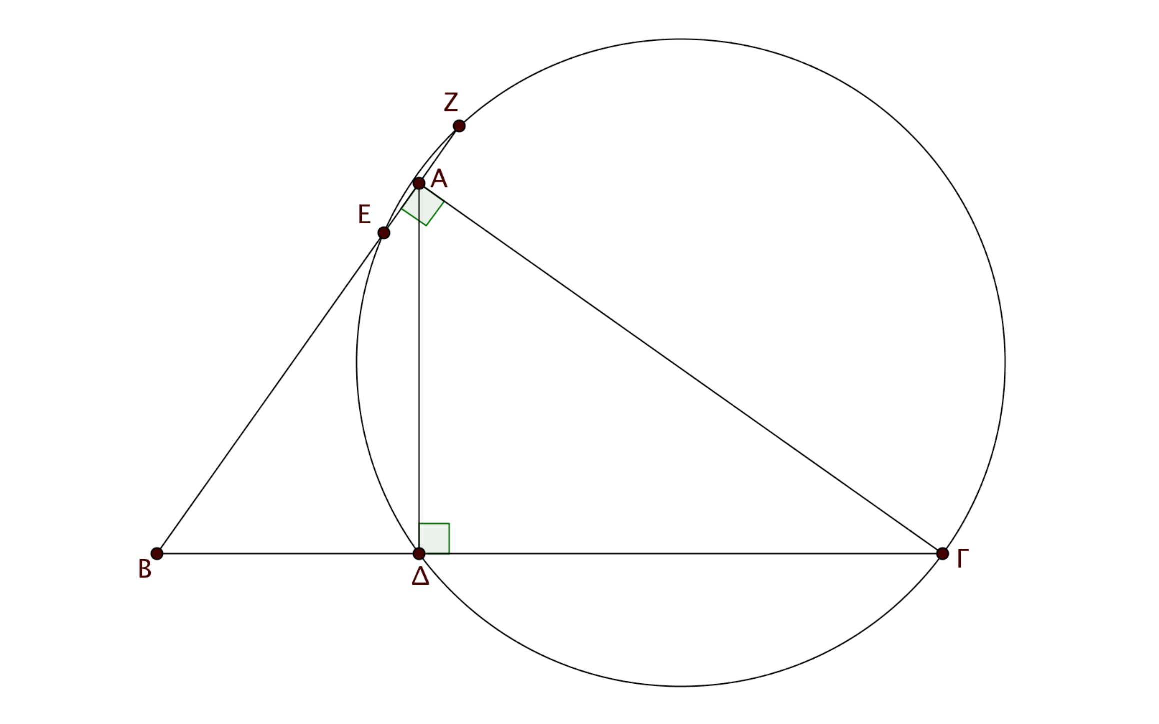
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και το ύψος του ΑΔ . Ένας κύκλος διέρχεται από τα σημεία Δ , Γ και τέμνει την ΒΑ στο Ε και την προέκτασή της στο Ζ έτσι ώστε : ΒΕ = 6 , ΒΖ = 8 και ΒΔ = 4 . Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων :

α) ΒΓ

Μονάδες 12

β) ΑΒ

Μονάδες 13



ΛΥΣΗ

α) Οι προεκτάσεις των χορδών ΔΓ και ΕΖ τέμνονται στο Α. Οπότε,

$$\mathrm{BE}\cdot\mathrm{BZ}=\mathrm{B\Delta}\cdot\mathrm{B\Gamma}\Leftrightarrow\mathrm{B\Gamma}=\frac{\mathrm{BE}\cdot\mathrm{BZ}}{\mathrm{B\Delta}}\Leftrightarrow\mathrm{B\Gamma}=\frac{6\cdot 8}{4}\Leftrightarrow\boxed{\mathrm{B\Gamma}=12}$$

β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α και η ΑΔ είναι κάθετη πλευρά . Από τις μετρικές σχέσεις σε ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε :

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{B\Delta}\cdot\mathrm{B\Gamma}\Leftrightarrow\mathrm{AB}^2=4\cdot 12\Leftrightarrow\mathrm{AB}^2=48\Leftrightarrow\mathrm{AB}=\sqrt{48}\Leftrightarrow\boxed{\mathrm{AB}=4\sqrt{3}}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β15 (22312)

Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\mathrm{A}>90^{\circ}$) φέρουμε τα ύψη του ΑΔ , ΒΕ και ΓΖ .

α) Ποια από τις παρακάτω ισότητες είναι λανθασμένη ; Στη συνέχεια να την γράψετε σωστά

Α. $\beta^2=\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\cdot\mathrm{B\Delta}$

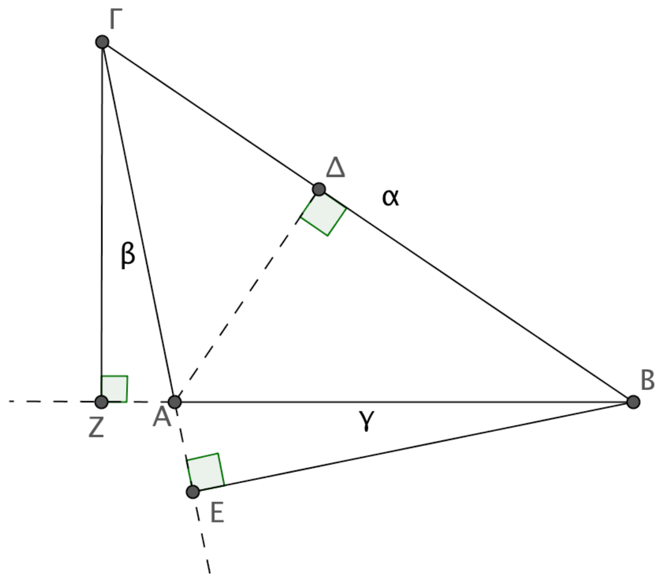
Β. $\gamma^2=\beta^2+\alpha^2-2\beta\cdot\mathrm{AE}$

Γ. $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2+2\beta\cdot\mathrm{AE}$

Μονάδες 12

β) Αν $\alpha=7$, $\beta=4$ και $\gamma=5$, να υπολογίσετε την προβολή της ΒΓ πάνω στην ΑΓ .

Μονάδες 13



ΛΥΣΗ

α) Από τις τρεις προτάσεις η λανθασμένη πρόταση είναι η Β , γιατί αν εφαρμόσουμε το γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ , έχουμε :

$$\gamma^2 = \beta^2 + \alpha^2 - 2\beta \cdot \Gamma E \quad (1)$$

β) Η προβολή της ΒΓ στην ΑΓ είναι η ΓΕ . Από τη σχέση (1) έχουμε :

$$5^2 = 4^2 + 7^2 - 2 \cdot 4 \cdot \Gamma E \Leftrightarrow 25 = 65 - 8 \cdot \Gamma E \Leftrightarrow \Gamma E = \frac{65-25}{8} \Leftrightarrow \boxed{\Gamma E = 5}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β16 (22313)

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε το ύψος του ΒΔ. Αν ΑΒ = 7 , ΑΓ =10 και

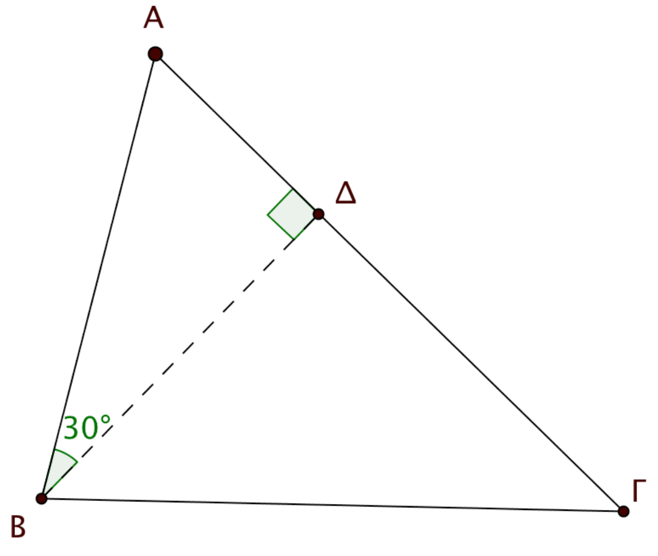
$A\hat{B}\Delta = 30^o$, να υπολογίσετε :

α) το τμήμα ΑΔ .

Μονάδες 8

β) την πλευρά ΒΓ

Μονάδες 17



ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η γωνία $\hat{ΑΒΔ}$ είναι 30^o. Οπότε η απέναντί της κάθετη πλευρά που είναι η ΑΔ θα είναι η μισή της υποτείνουσας. Άρα

$$ΑΔ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{7}{2}$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ $\left(\hat{Δ} = 90^o\right)$, γνωρίζουμε ότι $\hat{ΑΒΔ} = 30^o$, άρα

$\hat{Α} = 60^o$.

Εφαρμόζουμε το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ και έχουμε:

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2 \cdot ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot συν60^o \Leftrightarrow$$

$$ΒΓ^2 = 7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$ΒΓ^2 = 49 + 100 - 70 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{ΒΓ = \sqrt{79}}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β17 (2_22316)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 18 cm και ΒΓ = 30 cm. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ. Αν ΑΔ = 9 cm τότε:

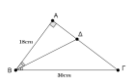
α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΓ.

Μονάδες 13

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ



α) Επειδή η ΒΔ αποτελεί διχοτόμο της γωνίας Β, τότε από θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου, έχουμε:

$$\frac{ΑΔ}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} \Leftrightarrow \frac{9}{ΔΓ} = \frac{18}{30} \Leftrightarrow ΔΓ = 15\,cm .$$

Άρα

$$ΑΓ = ΑΔ + ΔΓ = 9 + 15 = 24\,cm.$$

β) Για να δείξουμε ότι το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, αρκεί να συγκρίνουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{l} AB^2+A\Gamma^2=18^2+24^2=324+576=900 \\ B\Gamma^2=30^2=900 \end{array}\right\} \Leftrightarrow B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A}=90^0 .$$

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

Θέμα Δ

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (18985)

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε δύο χορδές ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται σε ένα σημείο Μ.

α) Αν το σημείο Α είναι μέσο του τόξου ΓΔ, να αποδείξετε ότι:

i) Όταν η χορδή ΑΒ είναι κάθετη στη χορδή ΓΔ, τότε $ΑΜ \cdot ΑΒ = ΑΓ^2$

(Μονάδες 8)

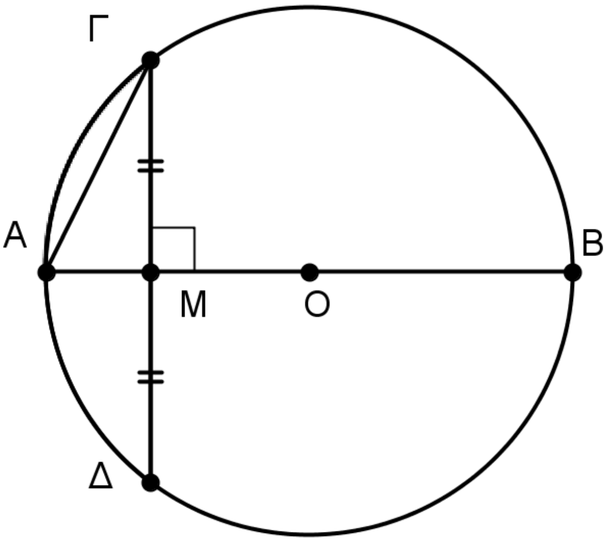
ii) Όταν η χορδή ΑΒ δεν είναι κάθετη στη χορδή ΓΔ, ισχύει η σχέση $ΑΜ \cdot ΑΒ = ΑΓ^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

β) Αν για τις χορδές ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται στο Μ ισχύει ότι $ΑΜ \cdot ΑΒ = ΑΓ^2$, να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι μέσο του τόξου ΓΔ.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ



α) i) Έχουμε, $ΟΓ = ΟΔ$ (1), ως ακτίνες του κύκλου.

Επειδή Α είναι το μέσο του ΓΔ έχουμε $ΓΑ = ΑΔ \Rightarrow ΓΑ = ΑΔ$ (2).

Άρα από (1),(2) έχουμε, η ΟΑ είναι μεσοκάθετος της ΓΔ άρα $ΟΑ \perp ΓΔ$ (3).

Όμως από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $ΑΒ \perp ΓΔ$ (4).

Από (3),(4) έχουμε, $ΟΑ // ΑΒ$ και επειδή έχουν κοινό σημείο τα σημεία Α,Ο,Β είναι συνευθειακά δηλαδή η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο $Α\hat{Β}Γ$ $\left(\hat{Γ} = 90^o\right)$, το τμήμα ΓΜ θα είναι το ύψος προς την υποτείνουσα ΑΒ άρα $ΑΓ^2 = ΑΜ \cdot ΑΒ$.

<u>Β΄ τρόπος:</u>

Οι χορδές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Μ άρα $ΑΜ \cdot ΜΒ = ΓΜ \cdot ΜΔ$ (1)

Επειδή Α είναι το μέσο του $ΓΔ \Rightarrow ΓΑ = ΑΔ \Rightarrow ΓΑ = ΑΔ$ και επειδή $ΑΒ \perp ΓΔ$ θα είναι και $ΑΜ \perp ΓΔ$ άρα στο ισοσκελές τρίγωνο $Γ\hat{Α}Δ$ το ύψος ΑΜ θα είναι και διάμεσος οπότε $ΓΜ = ΜΔ$ (2).

Συνεπώς:

$$AM\cdot AB = AM\cdot(AM+MB) \Rightarrow AM\cdot AB = AM^2 + AM\cdot MB \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow AM\cdot AB = AM^2 + \Gamma M\cdot M\Delta \overset{(2)}{\Rightarrow} AM\cdot AB = AM^2 + \Gamma M^2 \Rightarrow AM\cdot AB = A\Gamma^2$$

ii) Οι εγγεγραμμένες γωνίες $\hat{B}$ και $A\Gamma\Delta$ βαίνουν στα ίσα τόξα ΑΓ και ΑΔ οπότε $\hat{B} = A\Gamma\Delta \Rightarrow \hat{B} = A\hat{\Gamma}M$ (1).

Έτσι τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΑΒΓ είναι όμοια γιατί έχουν κοινή, την γωνία $\hat{A}$ και $\hat{B} = A\hat{\Gamma}M$ (1) άρα θα έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες δηλαδή:

$$\frac{AM}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{AB} \Rightarrow A\Gamma^2 = AM\cdot AB$$

Άρα η σχέση $A\Gamma^2 = AM\cdot AB$ ισχύει και όταν οι χορδές ΑΒ και ΓΔ δεν είναι κάθετες.

β) Αν $A\Gamma^2 = AM\cdot AB \Rightarrow \frac{AM}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{AB}$ (1). Η γωνία $\hat{A}$ είναι κοινή στα τρίγωνα ΑΓΜ και ΑΒΓ και περιεχόμενη στις ανάλογες πλευρές της σχέσης (1), άρα τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΑΒΓ είναι όμοια οπότε θα έχουν και τις άλλες γωνίες τους ίσες μία προς μία συνεπώς $\hat{B} = A\hat{\Gamma}M \Rightarrow \hat{B} = A\hat{\Gamma}\Delta$ και επειδή οι γωνίες Β και ΑΓΔ είναι εγγεγραμμένες τα αντίστοιχα τόξα ΑΓ και ΑΔ θα είναι ίσα δηλαδή το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου ΓΔ.

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (19006)

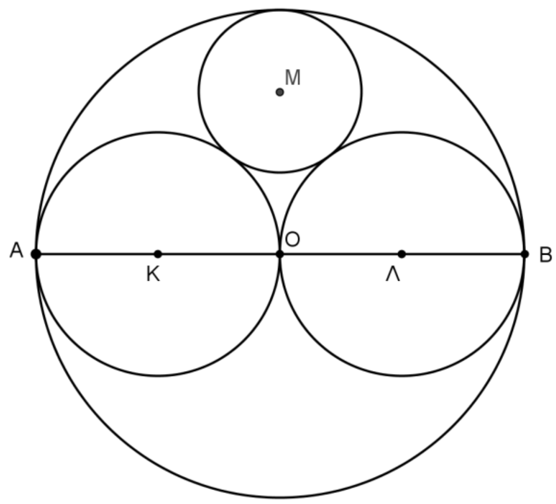
Δίνεται κύκλος (Ο,R) και μια διάμετρός του ΑΒ. Με διαμέτρους τα τμήματα ΟΑ και ΟΒ γράφουμε τους κύκλους κέντρων Κ και Λ αντίστοιχα. Ένας τέταρτος κύκλος κέντρου Μ και ακτίνας ρ εφάπτεται εξωτερικά των κύκλων κέντρων Κ και Λ και εσωτερικά του κύκλου με κέντρο Ο.

α) Να εκφράσετε τις διακέντρους ΚΜ, ΛΜ και ΟΜ των αντίστοιχων κύκλων ως συνάρτηση των ακτινών τους, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\rho = \frac{R}{3}$

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος κέντρου K, έχει ακτίνα $r_1 = OK = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$.

Οι κύκλοι $\left(K, \frac{R}{2}\right)$ και (Μ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά $KM = \frac{R}{2} + \rho$ (1)

Ο κύκλος κέντρου Λ, έχει ακτίνα $r_2 = O\Lambda = \frac{OB}{2} = \frac{R}{2}$.

Οι κύκλοι Λ και (Μ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά $\Leftrightarrow \Lambda M = \frac{R}{2} + \rho$ (2)

Οι κύκλοι (Ο,R) και (Μ,ρ) εφάπτονται εσωτερικά $\Leftrightarrow OM = R - \rho$ (3)

β) Είναι $KM = \Lambda M = \frac{R}{2} + \rho \Rightarrow$ το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ισοσκελές (4)

Επίσης $KO = \Lambda O = \frac{R}{2} \Rightarrow$ η ΟΜ είναι διάμεσος της ΚΛ (5)

Από τις σχέσεις (4) και (5) έχουμε ότι το ΟΜ είναι και ύψος προς την ΚΛ, οπότε το τρίγωνο ΜΟΚ είναι ορθογώνιο.
Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΟΚ θα έχουμε :

$$KM^2 = OM^2 + OK^2 \Rightarrow \left(\frac{R}{2} + \rho\right)^2 = (R-\rho)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{R^2}{4} + R\rho + \rho^2 = R^2 - 2R\rho + \rho^2 + \frac{R^2}{4} \Rightarrow 3R\rho = R^2 \Rightarrow \rho = \frac{R}{3}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (19009)

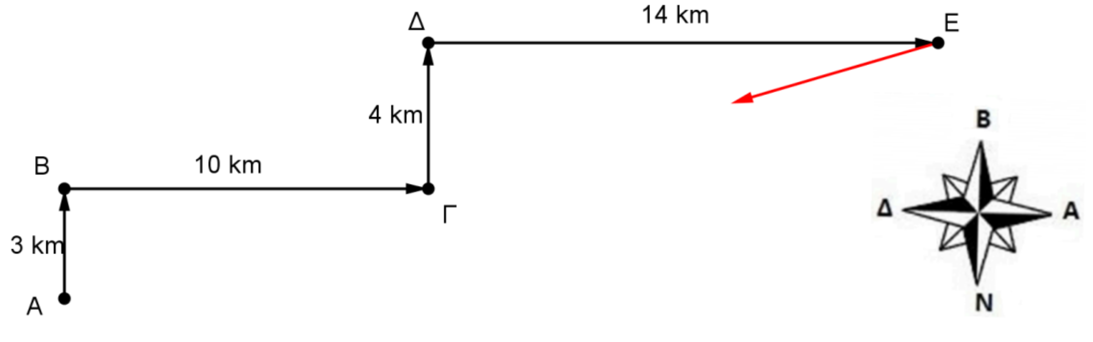
Ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια προχωράει 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε.

α) Αν από το σημείο Ε επιστρέψει στο σημείο Α από το οποίο ξεκίνησε, κινούμενο ευθύγραμμα, να βρείτε την απόσταση ΑΕ που θα διανύσει.

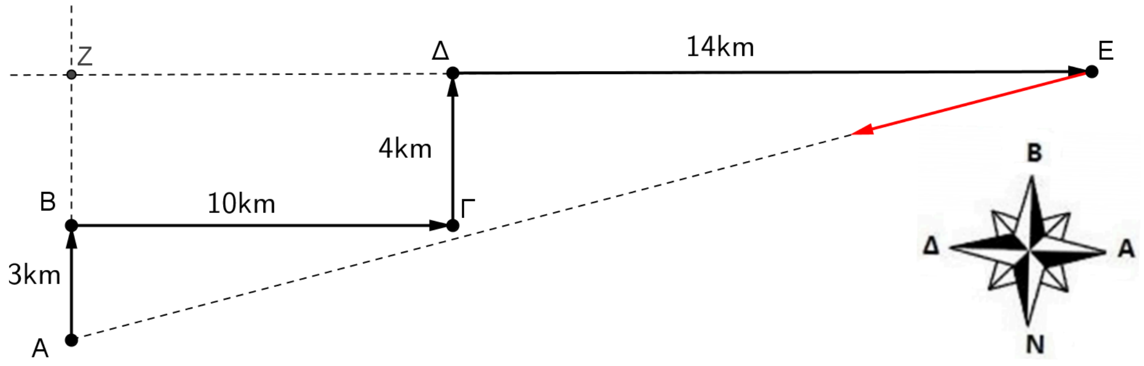
(Μονάδες 12)

β) Τα σημεία Α,Γ και Ε είναι συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΕ εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$\mathrm{AE}^2=\mathrm{AZ}^2+\mathrm{ZE}^2 \Rightarrow \mathrm{AE}^2=(3+4)^2+(10+14)^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{AE}^2=49+576$$

$$\Rightarrow \mathrm{AE}^2=625$$

$$\Rightarrow \mathrm{AE}=25\ \mathrm{km}$$

β) Έστω ότι τα σημεία Α , Γ , Ε είναι συνευθειακά.
Τότε

$$\mathrm{A}\Gamma+\Gamma\mathrm{E}=\mathrm{AE}\ \ (1)$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα :

$$\mathrm{A}\Gamma^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{B}\Gamma^2 \Rightarrow \mathrm{A}\Gamma^2=3^2+10^2 \Rightarrow \mathrm{A}\Gamma^2=109 \Rightarrow \mathrm{A}\Gamma=\sqrt{109}\ \mathrm{km}\ \ (2)$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΕ εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα :

$$\Gamma E^2=\Gamma\Delta^2+\Delta E^2 \Rightarrow \Gamma E^2=4^2+14^2 \Rightarrow \Gamma E^2=212 \Rightarrow \Gamma E=\sqrt{212}\ \mathrm{km}\ \ (3)$$

Επομένως, από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε,

$$\sqrt{109}+\sqrt{212}=25 \Rightarrow \left(\sqrt{109}+\sqrt{212}\right)^2=25^2 \Rightarrow 321+2\sqrt{23108}=625 \Rightarrow$$

$$\sqrt{23108}=152 \Rightarrow \sqrt{23108}^2=152^2 \Rightarrow 23108=23104 \text{ άτοπο}$$

Άρα τα σημεία Α, Γ, Ε δεν είναι συνευθειακά.

<u>Β΄ τρόπος:</u>

Έστω ότι τα σημεία Α, Γ, Ε είναι συνευθειακά.

Επειδή ΒΓ // ΔΕ και η ΑΕ είναι τέμνουσα τους θα είναι $\Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$ (1) ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

Έτσι τα τρίγωνα ΔΕΓ και ΒΓΑ είναι όμοια γιατί $\hat{\Delta}=\hat{\mathrm{B}}=90^o$ και $\Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$ (1) άρα οι αντίστοιχες πλευρές τους θα είναι ανάλογες δηλαδή

$$\frac{\Delta\mathrm{E}}{\Delta\Gamma}=\frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{BA}} \Rightarrow \frac{14}{4}=\frac{10}{3} \Rightarrow 42=40 \text{, που είναι αδύνατο}$$

Άρα τα σημεία Α, Γ, Ε δεν είναι συνευθειακά.

<u>lisari – team</u>

<u>Γ΄ τρόπος:</u>
Από την ομοιότητα των τριγώνων ΔΕΓ, ΒΓΑ έχουμε όλες τις γωνίες ίσες, οπότε βρίσκω γωνία ΑΓΕ=180°…

ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (19025)
Κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο . Οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ τέμνονται σε σημείο Μ , το οποίο είναι το μέσο της διαγωνίου ΒΔ .
Να αποδείξετε ότι :
α) $\Delta B^2 = 4MA \cdot M\Gamma$

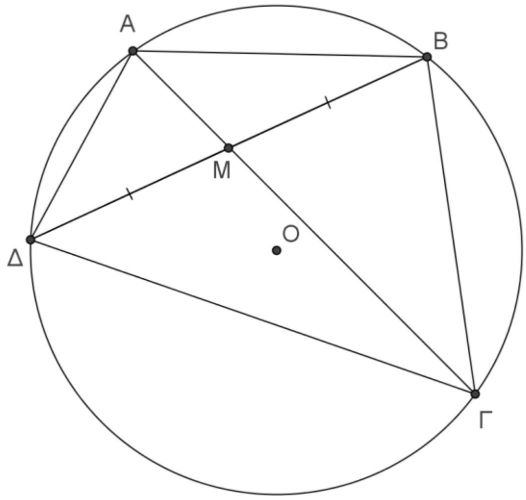
(Μονάδες 7)

β) $AB^2 + A\Delta^2 = 2AM \cdot A\Gamma$

(Μονάδες 9)

γ) $AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + A\Delta^2 = 2A\Gamma^2$

(Μονάδες 9)



<u>ΛΥΣΗ</u>
α) Από το θεώρημα των τεμνομένων χορδών έχουμε:

$$MB \cdot M\Delta = MA \cdot M\Gamma \Rightarrow \frac{B\Delta}{2} \cdot \frac{B\Delta}{2} = MA \cdot M\Gamma \Rightarrow \frac{B\Delta^2}{4} = MA \cdot M\Gamma \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B\Delta^2 = 4MA \cdot M\Gamma$$

β) Από το πρώτο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε :

$$AB^2 + A\Delta^2 = 2AM^2 + \frac{B\Delta^2}{2} \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} AB^2 + A\Delta^2 = 2AM^2 + \frac{4MA \cdot M\Gamma}{2}$$
$$\Rightarrow AB^2 + A\Delta^2 = 2AM^2 + 2MA \cdot M\Gamma$$
$$\Rightarrow AB^2 + A\Delta^2 = 2AM(AM + M\Gamma)$$
$$\Rightarrow AB^2 + A\Delta^2 = 2AM \cdot A\Gamma \quad (1)$$

γ) Από το πρώτο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΒΓΔ , έχουμε :

$$\begin{aligned} ΒΓ^2 + ΓΔ^2 = 2ΓΜ^2 + \frac{ΒΔ^2}{2} &\overset{(α)}{=} 2ΜΓ^2 + \frac{4ΜΑ \cdot ΜΓ}{2} \\ &= 2ΜΓ^2 + 2ΜΑ \cdot ΜΓ \\ &= 2ΜΓ(ΜΓ + ΜΑ) \\ &= 2ΜΓ \cdot ΑΓ \end{aligned}$$

Άρα ,

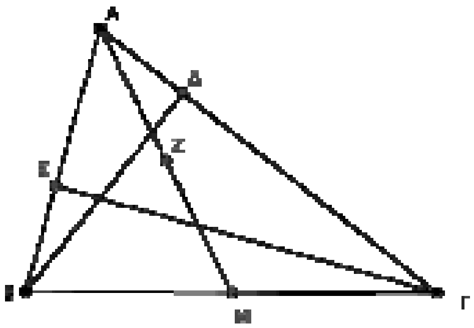
$$ΒΓ^2 + ΓΔ^2 = 2ΜΓ \cdot ΑΓ \quad (2)$$

Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε:

$$\begin{aligned} ΑΒ^2 + ΑΔ^2 + ΒΓ^2 + ΓΔ^2 &= 2ΑΜ \cdot ΑΓ + 2ΜΓ \cdot ΑΓ \\ &= 2ΑΓ \cdot (ΑΜ + ΜΓ) \\ &= 2ΑΓ \cdot ΑΓ \\ &= 2ΑΓ^2 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ5 (22323)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ για το οποίο ισχύει ότι: $β^2 + γ^2 = 2α^2$. Φέρουμε τα ύψη ΒΔ, ΓΕ και τη διάμεσο ΑΜ το μέσο της οποίας είναι το σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



α) $\hat{Α} < 90^{o}$

Μονάδες 6

β) $ΑΕ = \frac{α^2}{2γ}$

Μονάδες 10

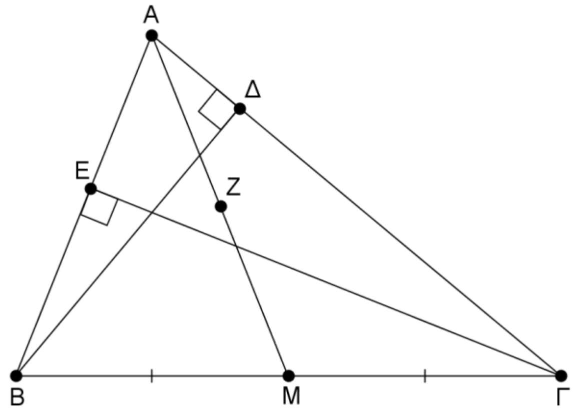
γ) $ΑΜ = \frac{α\sqrt{3}}{2}$

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι,

$$α^2 < 2α^2 \Leftrightarrow α^2 < β^2 + γ^2 \Leftrightarrow Α < 90^\circ$$



β) Εφαρμόζουμε το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα για την οξεία $\hat{A}$ και έχουμε,

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot AE \Leftrightarrow \alpha^2 = 2\alpha^2 - 2\gamma \cdot AE \Leftrightarrow 2\gamma \cdot AE = 2\alpha^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow 2\gamma \cdot AE = \alpha^2 \Leftrightarrow AE = \frac{\alpha^2}{2\gamma}$$

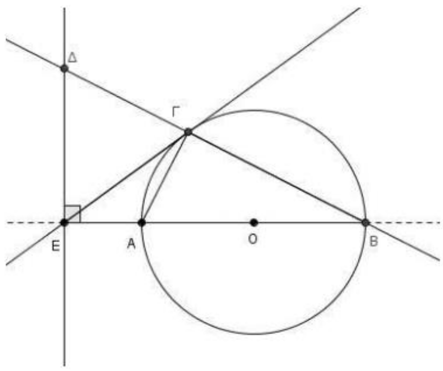
γ) Εφαρμόζουμε το πρώτο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο $AB\Gamma$. Επομένως,

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2AM^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2AM^2 = 2\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2AM^2 = \frac{4\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2AM^2 = \frac{3\alpha^2}{2} \Leftrightarrow AM^2 = \frac{3\alpha^2}{4} \Leftrightarrow AM = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ6 (22324)

Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και μία διάμετρός του ΑΒ. Από σημείο Ε στην προέκταση της διαμέτρου ΑΒ προς το Α, φέρουμε την εφαπτομένη ΕΓ του κύκλου. Η κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Ε, τέμνει την προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) σε σημείο Δ.



α) Να επιλέξετε τη σωστή ισότητα:

i. $E\Gamma^2 = EA \cdot AB$ **ii.** $E\Gamma^2 = EA \cdot EB$ **iii.** $E\Gamma^2 = EO \cdot EB$ **iv.** $E\Gamma^2 = EO \cdot OB$

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι:

i. $B\Gamma \cdot B\Delta = BA \cdot BE$

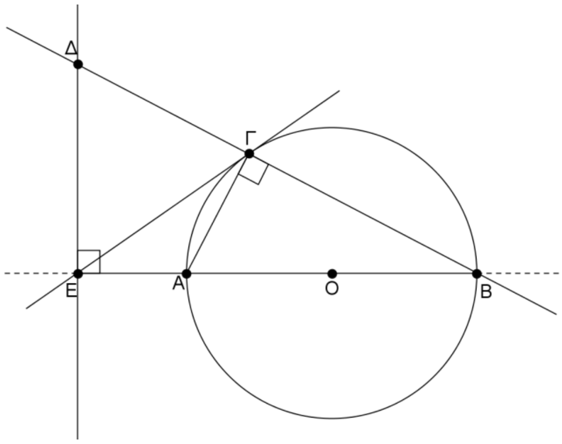
Μονάδες 9

ii. $EB^2 = E\Gamma^2 + B\Gamma \cdot B\Delta$

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

lisari – team



α) Η σωστή απάντηση είναι η ii) $ΕΓ^2 = ΕΑ \cdot ΕΒ$ (Βλέπε θεώρημα Ι και ΙΙ παραγράφου 9.7 από το σχολικό βιβλίο).

β) i) Είναι $ΑΓΒ = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΓ, ΒΔΕ$ είναι όμοια διότι έχουν την γωνία $Β$ κοινή. Επομένως οι πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή

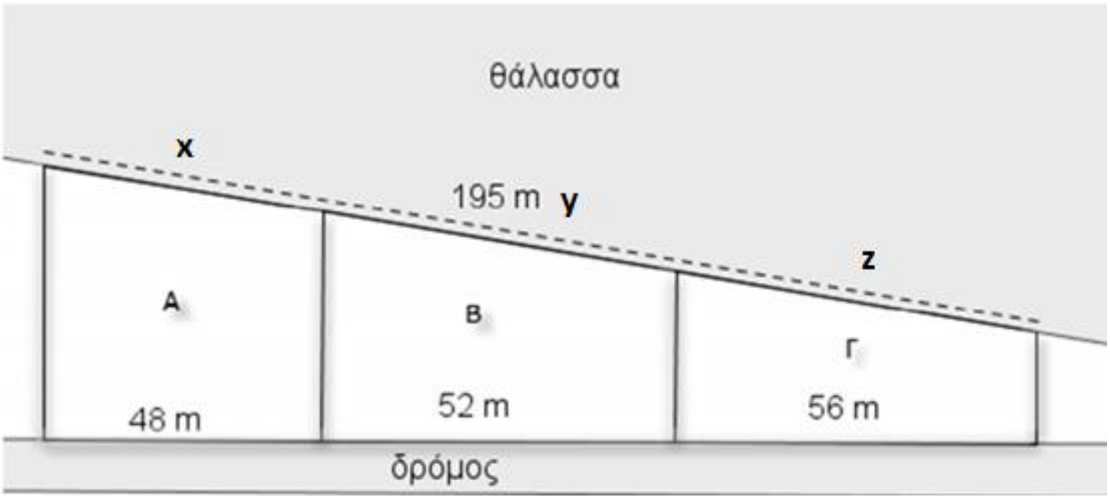
$$\frac{ΒΓ}{ΒΕ} = \frac{ΒΑ}{ΒΔ} \Leftrightarrow ΒΓ \cdot ΒΔ = ΒΑ \cdot ΒΕ \quad (1)$$

ii) Είναι,

$$ΕΓ^2 + ΒΓ \cdot ΒΔ \overset{(1)}{=} ΕΑ \cdot ΕΒ + ΒΑ \cdot ΕΒ = ΕΒ(ΕΑ + ΒΑ) = ΕΒ \cdot ΕΒ = ΕΒ^2$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ7 (22335)

Ιδιοκτήτης μεγάλης ακίνητης περιουσίας διαθέτει προς πώληση μια ιδιοκτησία του, η οποία περιλαμβάνει τρία διαδοχικά οικόπεδα με συνολική πρόσοψη 195 m σε ακτή θάλασσας, τα οποία αποτυπώνονται στο σχέδιο που ακολουθεί. Οι επιφάνειες της ιδιοκτησίας και των οικοπέδων είναι σχήματος ορθογωνίου τραπεζίου. Σημειώνεται ότι, ως πρόσοψη οικοπέδου θεωρείται το μήκος της πλευράς του οικοπέδου που συνορεύει με την ακτή της θάλασσας.



(σημειώνεται ότι το σχέδιο δεν έχει γίνει υπό κλίμακα)

α) Να υπολογίσετε το μήκος της πρόσοψης του κάθε οικοπέδου.

(Μονάδες 12)

β) Αν τα μήκη των δυο άλλων πλευρών της ιδιοκτησίας είναι ανάλογα των αριθμών 2 και 1, να υπολογίσετε την περίμετρο της ιδιοκτησίας. (Δίνεται ότι $\sqrt{13689}=117$)
(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έστω x, y, z τα μήκη των προσόψεων του κάθε οικοπέδου, τότε από Θεώρημα Θαλή έχουμε,

$$\frac{x}{48}=\frac{y}{52}=\frac{z}{56}=\frac{x+y+z}{48+52+56}=\frac{195}{156}$$

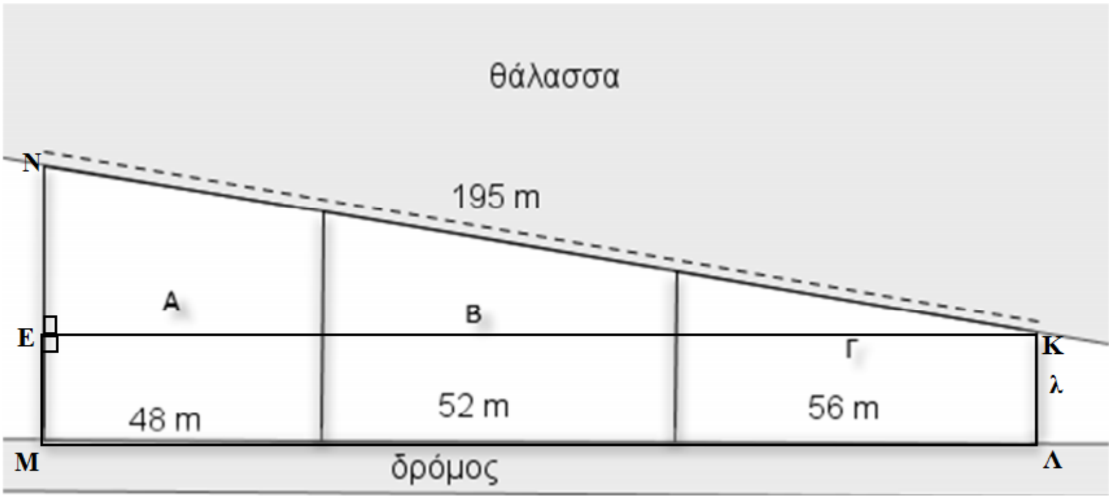
άρα,

$$\frac{x}{48}=\frac{195}{156}\Leftrightarrow x=\frac{195}{156}\cdot 48\Leftrightarrow x=60m$$

$$\frac{y}{52}=\frac{195}{156}\Leftrightarrow y=\frac{195}{156}\cdot 52\Leftrightarrow y=65m$$

$$\frac{z}{56}=\frac{195}{156}\Leftrightarrow z=\frac{195}{156}\cdot 56\Leftrightarrow z=70m$$

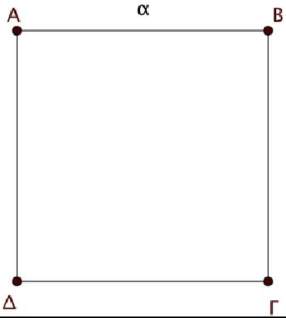
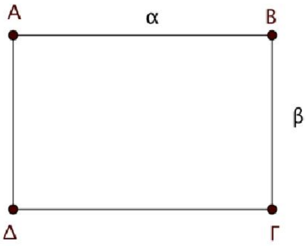
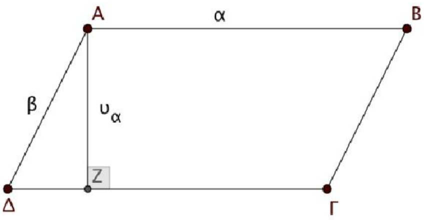
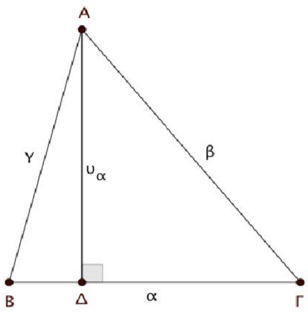
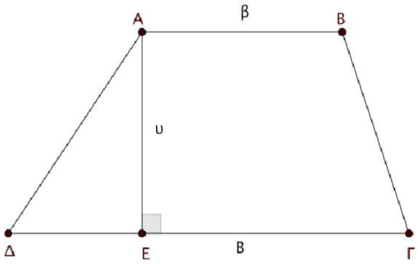
β) Έστω η μία πλευρά του τραπεζίου (η μικρή βάση) είναι λ, τότε η άλλη πλευρά (η μεγάλη βάση) είναι 2λ. Για να βρούμε το λ, φέρνουμε το ύψος από την μικρή βάση στη μεγάλη βάση όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Το τετράπλευρο ΚΛΜΕ είναι ορθογώνιο, άρα ΚΛ = ΜΕ = $\lambda>0$, όμως το ΜΝ = 2λ, άρα ΝΕ = 2λ – λ = λ.
Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΝΕΚ,
$NK^2=NE^2+EK^2\Leftrightarrow 195^2=\lambda^2+156^2\Leftrightarrow\lambda^2=13689$ και επειδή $\lambda>0$ είναι $\lambda=\sqrt{13689}=117$. Άρα ΚΛ=117 και ΜΝ=234
Επομένως η περίμετρος της ιδιοκτησίας είναι,

ΜΛ+ΚΛ+ΚΝ+ΝΜ=156+117 + 195 + 234 = 702 m

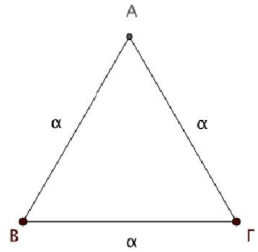
Συνοπτική θεωρία του 10ου Κεφαλαίου

1. Τετράγωνο 	Το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς α είναι α^2, δηλαδή $E=\alpha^2$
2. Ορθογώνιο 	Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του , δηλαδή $E=\alpha\beta$
3. Παραλληλόγραμμο 	Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σ΄ αυτήν $E=\alpha\cdot\upsilon_\alpha=\beta\cdot\upsilon_\beta$
4. Τρίγωνο 	Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς, επί το αντίστοιχο ύψος $E=\frac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon_\alpha=\frac{1}{2}\beta\cdot\upsilon_\beta=\frac{1}{2}\gamma\cdot\upsilon_\gamma$
5. Τραπέζιο 	Το εμβαδόν ενός τραπεζίου ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων του επί το ύψος του $E=\frac{\beta+B}{2}\cdot\upsilon$

Βασικές εφαρμογές

1. Το εμβαδόν ενός ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α

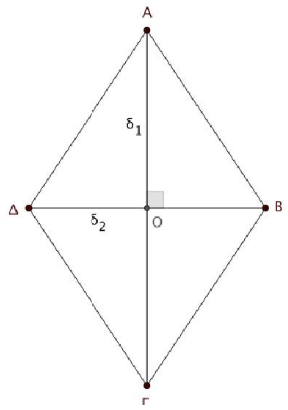
δίνεται από τον τύπο $E = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$



2. Το εμβαδόν ενός ρόμβου είναι ίσο με το ημιγινόμενο

των διαγωνίων του , δηλαδή , είναι $E = \dfrac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$

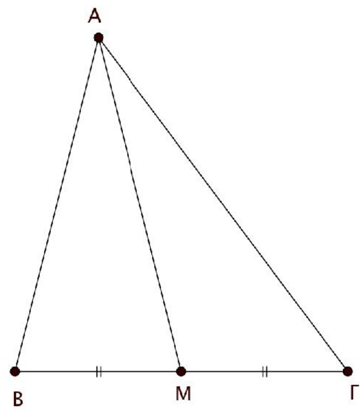
Ο ίδιος τύπος ισχύει και για το εμβαδόν οποιουδήποτε τετραπλεύρου του οποίου οι διαγώνιοι του τέμνονται κάθετα



3. Η διάμεσος κάθε τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο

σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα , δηλαδή είναι :

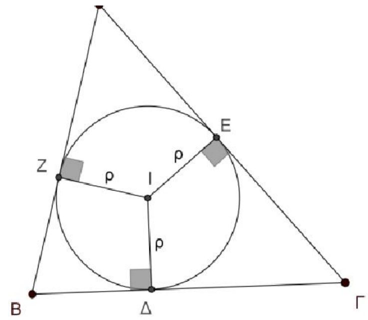
$$(\text{ΑΜΒ}) = (\text{ΑΜΓ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΒΓ})$$



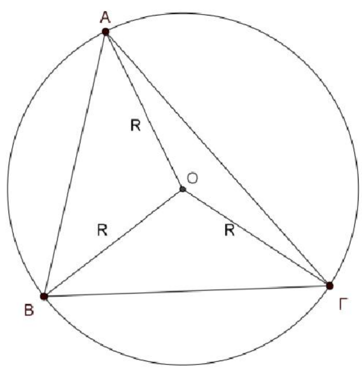
Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

1. $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$,όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου (τύπος του Ήρωνα)

2. $E = \tau \cdot \rho$, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου του τριγώνου



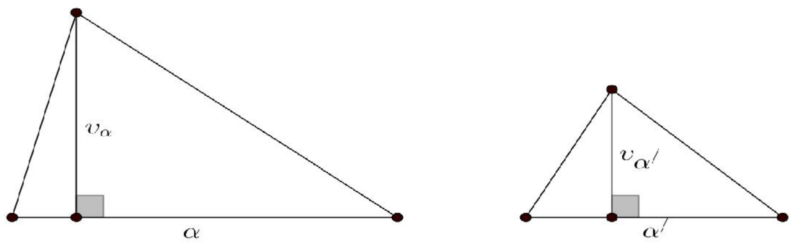
3. $E = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου



4. $E = \dfrac{1}{2}\beta\gamma \cdot \eta\mu A = \dfrac{1}{2}\alpha\gamma \cdot \eta\mu B = \dfrac{1}{2}\alpha\beta \cdot \eta\mu \Gamma$

Λόγοι εμβαδών

1 Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις , τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίσ00τοιχων υψών ,

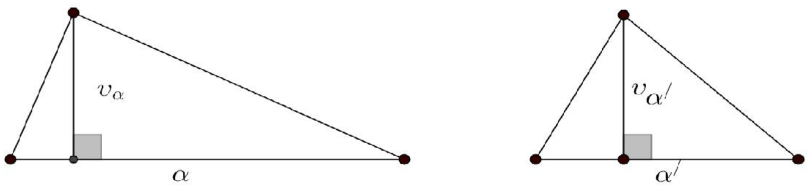


$$\alpha = \alpha'$$

$$\frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\mathrm{A'B'\Gamma'})} = \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}}$$

ενώ αν έχουν ίσα ύψη , τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των

αντίστοιχων βάσεων

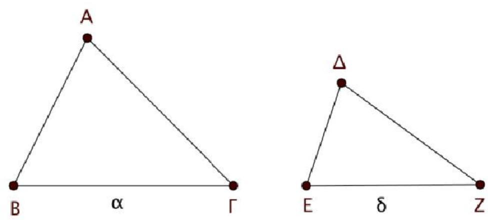


$$\upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'}$$

$$\frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\mathrm{A'B'\Gamma'})} = \frac{\alpha}{\alpha'}$$

2.Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια , τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας

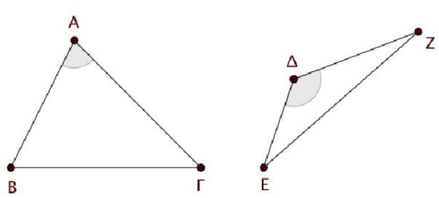
Δηλαδή αν τα τρίγωνα ΑΒΓ , ΔΕΖ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ , τότε : $\frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\Delta\mathrm{EZ})} = \lambda^2$



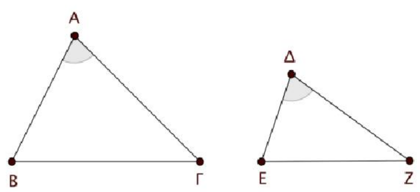
$$\frac{\alpha}{\delta} = \lambda$$

3. Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μία γωνία ενός άλλου τριγώνου , τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν γωνίες αυτές

$$\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\Delta} = 180^0$$



$$\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\Delta}$$



$$\frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\Delta\mathrm{EZ})} = \frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}}{\Delta\mathrm{E}\cdot\Delta\mathrm{Z}}$$

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (19028)

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ ($ΑΒ \parallel ΓΔ$) και ΒΕ το ύψος του. Αν είναι ΑΒ = 3, ΓΔ = 7 και ΒΓ = 4 τότε ,

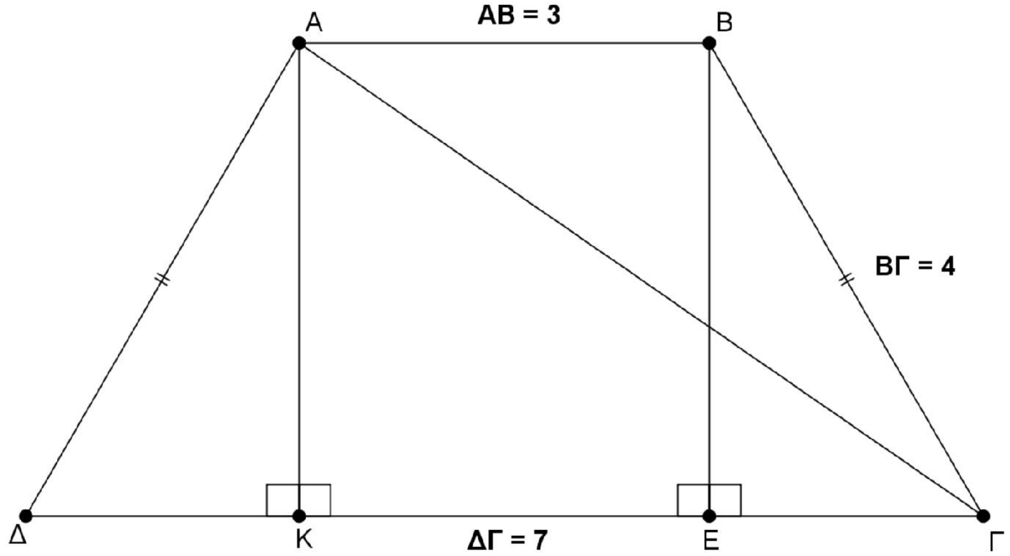
α) Να αποδείξετε ότι $ΒΕ = 2\sqrt{3}$

Μονάδες 12

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 13

Λύση



α) Στο ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ φέρω τα ύψη του ΑΚ και ΒΕ ($ΑΚ \perp ΓΔ$ και $ΒΕ \perp ΓΔ$)

Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΚ και ΒΕΓ, ($\widehat{Κ} = \widehat{Ε} = 90^0$)

($1^ο$ στοιχείο) ΑΔ = ΒΓ (αφού από υπόθεση το τραπέζιο είναι ισοσκελές)

($2^ο$ στοιχείο) $\widehat{Δ} = \widehat{Γ}$ (προσκείμενες γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τραπεζίου)

Άρα από κριτήριο ισότητας ορθογώνιων τριγώνων τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μια προς μία άρα είναι ίσα ,επομένως θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα δηλαδή ΔΚ = ΕΓ (1).

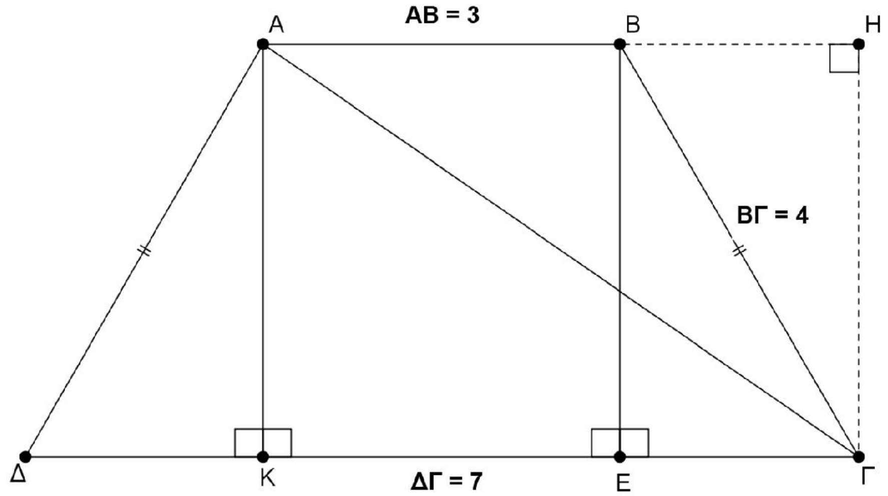
Τα κάθετα τμήματα $ΑΚ \perp ΓΔ$ και $ΒΕ \perp ΓΔ$ μεταξύ των δύο παραλλήλων $ΑΒ \parallel ΓΔ$ είναι ίσα άρα ΑΚ=ΒΕ και παράλληλα εφόσον είναι κάθετα στην ίδια ευθεία (ΓΔ) επομένως το ΑΒΕΚ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή έχει μία γωνία ορθή $\widehat{Κ} = 90^0$ είναι ορθογώνιο άρα ΑΒ = ΚΕ άρα ΚΕ = 3

Όμως : $ΓΔ = ΔΚ + ΚΕ + ΕΓ \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 7 = ΕΓ + 3 + ΕΓ \Leftrightarrow 4 = 2 \cdot ΕΓ \Leftrightarrow ΕΓ = 2$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ με $\hat{E} = 90^0$ από Πυθαγόρειο θεώρημα έχω ότι:

$$BE^2 + \Gamma E^2 = B\Gamma^2 \Leftrightarrow BE^2 + 4 = 16 \Leftrightarrow BE^2 = 12 \Leftrightarrow BE\sqrt{12} \Leftrightarrow BE = 2\sqrt{3}$$

β) Φέρω $\Gamma H \perp AB$



Το ΑΒΓ έχει ύψος ΗΓ , αφού $\Gamma H \perp AB$, $BE \perp \Gamma\Delta$ και $AB \parallel \Gamma\Delta$ τότε ΒΗΓΕ είναι ορθογώνιο άρα, $H\Gamma = BE$ οπότε : $H\Gamma = 2 \cdot \sqrt{3}$ (λόγω του α)

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι :

$$\left(AB\Gamma\right) = \frac{AB \cdot \Gamma H}{2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 3 \cdot \sqrt{3}$$

Β-Τρόπος

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με τη διαφορά των εμβαδών του τραπεζίου ΑΒΓΔ και του τριγώνου ΑΔΓ δηλαδή :

$$(AB\Gamma) = (AB\Gamma\Delta) - (A\Gamma\Delta) \quad (1)$$

Επίσης

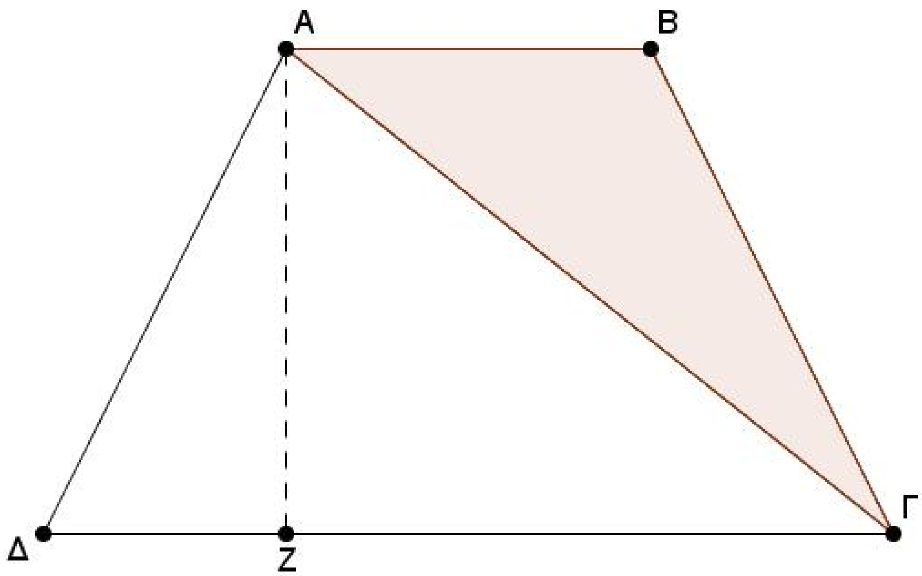
$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{\left(AB + \Gamma\Delta\right)}{2} \cdot BE \Leftrightarrow (AB\Gamma\Delta) = \frac{(3+7)}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

Και

$$(A\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}\Gamma\Delta \cdot AK \Leftrightarrow (A\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει :

$$(AB\Gamma) = 10\sqrt{3} - 7\sqrt{3} \Leftrightarrow (AB\Gamma) = 3\sqrt{3}$$



***Παρόμοιες ασκήσεις σχολικού βιβλίου** : Εμπέδωσης 2 , παράγραφος 10.4*

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (19038)

Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ κέντρου Ο θεωρούμε σημείο του Δ. Η χορδή ΔΒ τέμνει το ημικύκλιο διαμέτρου ΟΒ στο Γ.

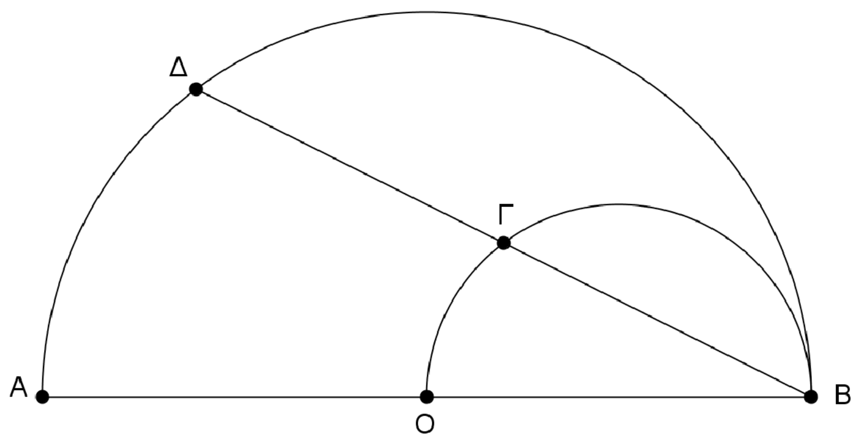
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΟΓΒ είναι όμοια.

Μονάδες 12

β) $(\mathrm{A\Delta B}) = 4(\mathrm{O\Gamma B})$

Μονάδες 13



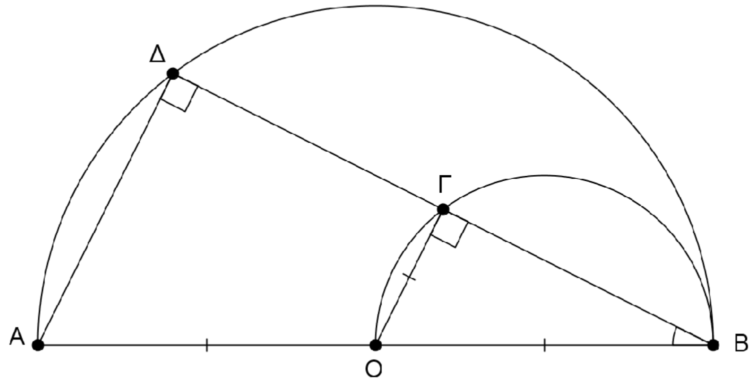
<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΟΓΒ έχουν:

(1^{o} στοιχείο) $\hat{\mathrm{B}}$ κοινή γωνία των δύο τριγώνων

(2^{o} στοιχείο) $\mathrm{A\hat{\Delta}B} = \mathrm{O\hat{\Gamma}B} = 90^{\circ}$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ημικύκλια, καθώς

ΑΒ και ΟΒ είναι διάμετροι από δεδομένα).



Άρα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία επομένως είναι όμοια.

β) Από το ερώτημα α) τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΟΓΒ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας

$$\lambda = \frac{AB}{OB} = \frac{2 \cdot OB}{OB} = 2$$

Τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, δηλαδή

$$\frac{(A\Delta B)}{(O\Gamma B)} = 2^2 \Rightarrow (A\Delta B) = 4(O\Gamma B)$$

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (19043)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) με ΑΓ = 4 και ύψος $A\Delta = \frac{12}{5}$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΓ.

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta B = \frac{9}{5}$

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

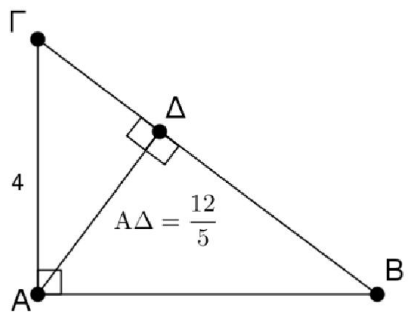
Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ εφαρμόζουμε πυθαγόρειο θεώρημα :

$$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 \Leftrightarrow \Gamma\Delta^2 = A\Gamma^2 - A\Delta^2 \Leftrightarrow$$

$$\Gamma\Delta^2 = 4^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \Gamma\Delta^2 = \frac{256}{25} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{16}{5}$$



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$A\Delta^2 = \Delta\Gamma \cdot \Delta B \Rightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{16}{5} \cdot \Delta B$$

$$\Rightarrow \frac{144}{25} = \frac{16}{5} \cdot \Delta B \Rightarrow \Delta B = \frac{9}{5}$$

γ) Αρχικά είναι $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma = \frac{9}{5} + \frac{16}{5} = \frac{25}{5} = 5$ και το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ

είναι: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{12}{5} = 6$ τετραγωνικές μονάδες.

Παρόμοιες ασκήσεις σχολικού βιβλίου : *Εμπέδωσης 1, 3 παράγραφος 9.2 , εμπέδωσης 3 παράγραφος 10.3*

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (22289)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ εσωτερικό σημείο του ΒΓ. Φέρνουμε από το Δ παράλληλες στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Η παράλληλη στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ και η παράλληλη στην ΑΓ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε. Θεωρούμε Κ και Λ τα μέσα των ΒΔ και ΔΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(EK\Delta) = \frac{1}{2}(BE\Delta)$

Μονάδες 7

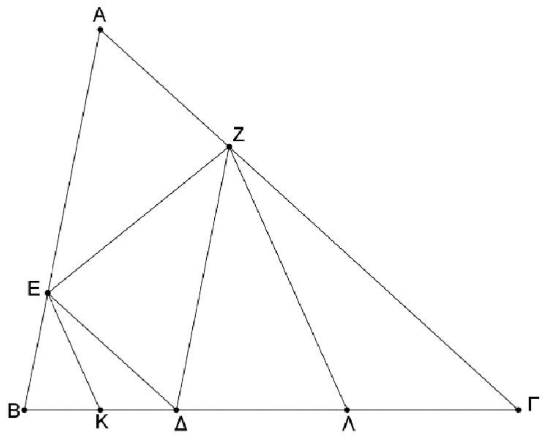
β) $(E\Delta Z) = \frac{1}{2}(AE\Delta Z)$

Μονάδες 7

γ) $2(KEZ\Lambda) = (AB\Gamma)$

Μονάδες 11

ΛΥΣΗ



α) Στο τρίγωνο ΕΒΔ η ΕΚ είναι διάμεσος, άρα χωρίζει το τρίγωνο αυτό σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα.

Επομένως

$$(EK\Delta) = \frac{1}{2}(BE\Delta)$$

β) Επειδή ΔΖ//ΑΕ και ΔΕ//ΑΖ το τετράπλευρο ΑΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο άρα η διαγώνιος ΕΖ το χωρίζει σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα. Επομένως

$$(\text{ΕΔΖ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΕΔΖ})$$

γ) Στο τρίγωνο ΔΖΓ η ΖΛ είναι διάμεσος, άρα χωρίζει το τρίγωνο αυτό σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα. Επομένως

$$(\text{ΔΖΛ}) = \frac{1}{2}(\text{ΔΖΓ}).$$

Σύμφωνα με τη σχέση αυτή και τα προηγούμενα ερωτήματα παίρνουμε:

$$2(\text{ΚΕΖΛ}) = 2[(\text{ΕΚΔ}) + (\text{ΕΔΖ}) + (\text{ΔΖΛ})] = 2\left[\frac{1}{2}(\text{ΒΕΔ}) + \frac{1}{2}(\text{ΑΕΔΖ}) + \frac{1}{2}(\text{ΔΖΓ})\right] =$$
$$= (\text{ΒΕΔ}) + (\text{ΑΕΔΖ}) + (\text{ΔΖΓ}) = (\text{ΑΒΓ})$$

ΑΣΚΗΣΗ Β5 (22294)

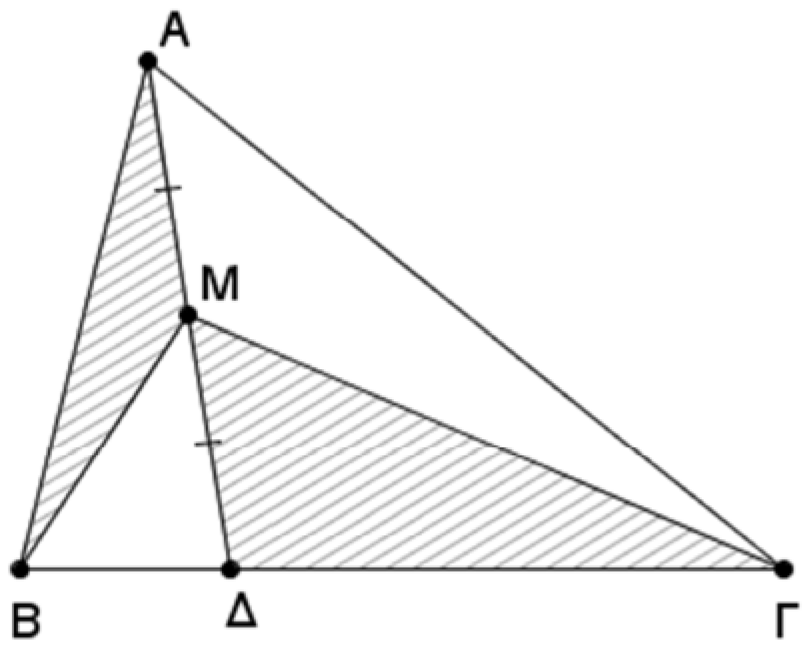
Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε Δ εσωτερικό σημείο της ΒΓ και έστω Μ στο μέσον της ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\text{ΑΜΒ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΔΒ})$

Μονάδες 12

β) $(\text{ΑΜΒ}) + (\text{ΜΔΓ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΒΓ})$

Μονάδες 13



ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με την εφαρμογή 3 της σελίδας 215 του σχολικού βιβλίου η διάμεσος κάθε τριγώνου το χωρίζει σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Delta}}$ η ΒΜ είναι διάμεσος, άρα

$$(\mathrm{BAM}) = (\mathrm{BM\Delta})$$

και επειδή $(\mathrm{BA\Delta}) = (\mathrm{BAM}) + (\mathrm{BM\Delta})$ είναι

$$(\mathrm{BA\Delta}) = (\mathrm{BAM}) + (\mathrm{BAM}) \Leftrightarrow$$

$$(\mathrm{BA\Delta}) = 2(\mathrm{BAM}) \Leftrightarrow$$

$$(\mathrm{BAM}) = \frac{1}{2}(\mathrm{BA\Delta}) \quad (1)$$

β) Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{\Gamma A\Delta}}$ η ΓΜ είναι διάμεσος, συνεπώς ομοίως με το α) ερώτημα αποδεικνύεται ότι

$$(\mathrm{\Gamma\Delta M}) = \frac{1}{2}(\mathrm{\Gamma A\Delta}) \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$(\mathrm{BAM}) + (\mathrm{\Gamma\Delta M}) = \frac{1}{2}(\mathrm{BA\Delta}) + \frac{1}{2}(\mathrm{\Gamma A\Delta}) = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{BA\Delta}) + (\mathrm{\Gamma A\Delta})\right] = \frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma})$$

ΑΣΚΗΣΗ Β6 (22297)

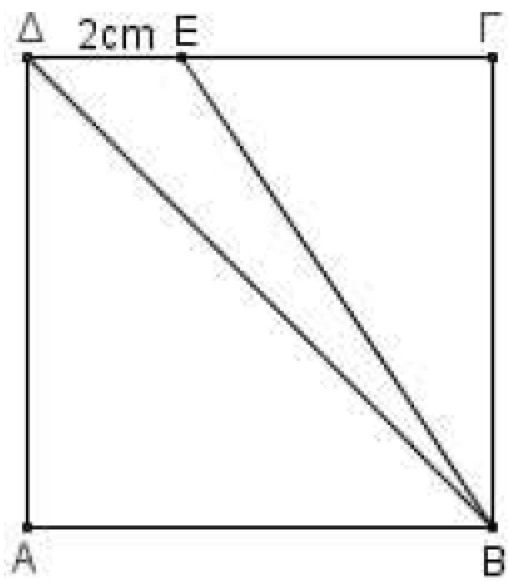
Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α θεωρούμε σημείο Ε της πλευράς ΔΓ έτσι, ώστε $\mathrm{\Delta E} = 2$. Αν ισχύει ότι $(\mathrm{BE\Delta}) = \frac{1}{8}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου α είναι ίση με 8 cm.

Μονάδες 13

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ.

Μονάδες 12



<u>ΛΥΣΗ</u>

<u>lisari – team</u>

α) Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{BE\Delta}}$ αν θεωρήσουμε ως βάση το ευθύγραμμο τμήμα $\Delta\mathrm{E} = 2$ cm, το ύψος του είναι το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\mathrm{B} = \alpha$, συνεπώς το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$(\mathrm{B}\Delta\mathrm{E}) = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \alpha = \alpha$$

Επίσης το εμβαδόν του τετραγώνου $\mathrm{AB}\Gamma\Delta$ ισούται με

$$(\mathrm{AB}\Gamma\Delta) = \alpha^2$$

Συνεπώς από τη σχέση $(\mathrm{BE}\Delta) = \frac{1}{8}(\mathrm{AB}\Gamma\Delta)$ ισοδύναμα έχουμε:

$$\alpha = \frac{1}{8}\alpha^2 \Leftrightarrow 8\alpha = \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - 8\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha - 8) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 8 \text{ ή } \alpha = 0$$

Η ΛΥΣΗ $\alpha = 0$ απορρίπτεται, άρα $\alpha = 8$ cm.

β) Είναι $\mathrm{B}\Gamma = 8$ cm και $\mathrm{E}\Gamma = \Delta\Gamma - \Delta\mathrm{E} = 8 - 2 = 6$ cm

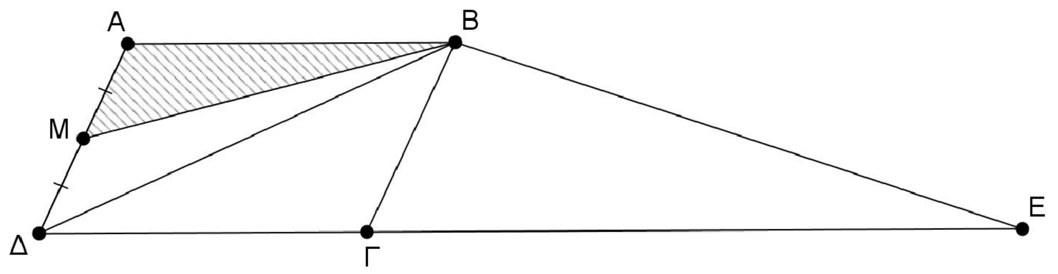
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα για το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{B\Gamma E}}$ $\left(\hat{\Gamma} = 90^\circ\right)$ έχουμε

$$\mathrm{BE}^2 = \mathrm{E}\Gamma^2 + \Gamma\mathrm{B}^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

Άρα $\mathrm{BE} = \sqrt{100} = 10$ cm

ΑΣΚΗΣΗ Β7 (22298)

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θεωρούμε Μ το μέσο της ΑΔ. Προεκτείνουμε τη ΔΓ προς το Γ κατά $\Gamma\mathrm{E} = 2\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



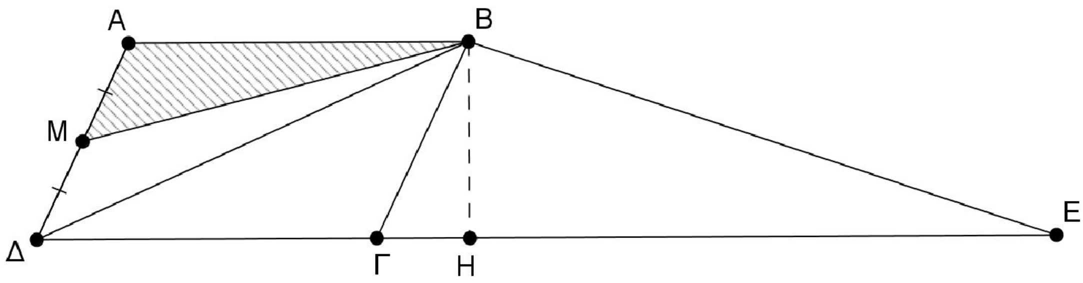
α) $(\mathrm{AMB}) = \dfrac{(\mathrm{B}\Gamma\Delta)}{2}$

Μονάδες 12

β) $(\mathrm{AB}\Gamma\Delta) = (\mathrm{B}\Gamma\mathrm{E})$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ



α) Η διαγώνιος ΒΔ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε δυο ίσα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΒ. Άρα θα είναι:

$$(\text{ΑΒΔ}) = (\text{ΒΓΔ})$$

Το ΒΜ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΔ άρα θα χωρίζει το τρίγωνο σε δυο ισεμβαδικά τρίγωνα δηλαδή είναι:

$$(\text{ΑΜΒ}) = (\text{ΜΒΔ})$$

(Εφαρμογή 3 σχολικού βιβλίου παράγραφος 10.3). Οπότε έχουμε:

$$(\text{ΑΜΒ}) + (\text{ΔΜΒ}) = (\text{ΑΒΔ}) \Leftrightarrow 2(\text{ΑΜΒ}) = (\text{ΑΒΔ}) \Leftrightarrow (\text{ΑΜΒ}) = \frac{(\text{ΑΒΔ})}{2} = \frac{(\text{ΒΓΔ})}{2}$$

β) Το εμβαδό του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι:

$(\text{ΑΒΓΔ}) = \text{ΓΔ} \cdot \text{ΒΗ} \quad (1)$,όπου ΒΗ το ύψος του παραλληλογράμμου.

Το εμβαδό του τριγώνου ΒΓΕ είναι:

$$(\text{ΒΓΕ}) = \frac{1}{2}\text{ΓΕ} \cdot \text{ΒΗ} = \frac{1}{2} \cdot 2\text{ΓΔ} \cdot \text{ΒΗ} = \text{ΓΔ} \cdot \text{ΒΗ} \quad (2)$$

Άρα από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΒΓΕ})$$

ΑΣΚΗΣΗ Β8 (22302)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΓ}=2\text{cm}$ $\text{ΒΓ}=\sqrt{3}\,\text{cm}$ και γωνία $\hat{\Gamma}=30^{\circ}$.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΒ=1cm.

Μονάδες 10

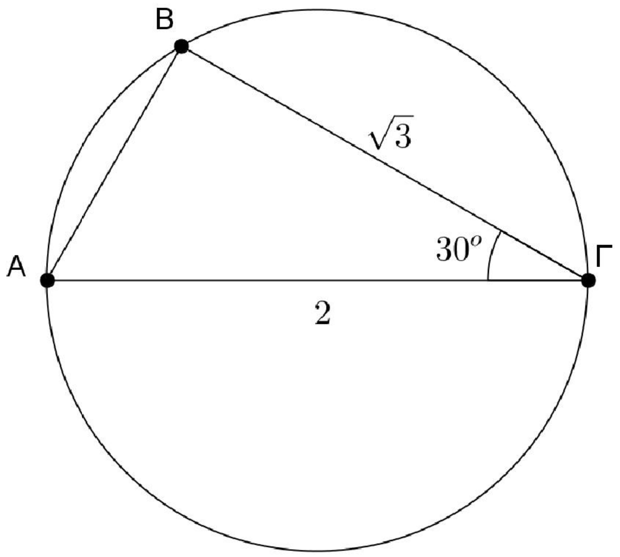
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 8

γ) Να υπολογίσετε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ



α) Εφαρμόζουμε το νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ

$$AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2 - 2A\Gamma \cdot B\Gamma συν30^0 \Leftrightarrow AB^2 = 4+3-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AB^2 = 1 \Leftrightarrow AB = 1$$

β) Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}A\Gamma \cdot B\Gamma ημ30 \Leftrightarrow (AB\Gamma) = \frac{1}{2}2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow (AB\Gamma) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

γ) Αν R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ , τότε το εμβαδό του δίνεται από τον τύπο:

$$(AB\Gamma) = \frac{αβγ}{4R} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1\cdot 2\cdot\sqrt{3}}{4R} \Leftrightarrow 4\sqrt{3}R = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow R = 1$$

ΑΣΚΗΣΗ Β9 (22317)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε ένα τμήμα $AE = \frac{3}{5}AB$ και στην ΑΔ ένα τμήμα $AZ = \frac{4}{5}A\Delta$. Αν το εμβαδόν του πενταγώνου ΕΒΓΔΖ είναι 76, να υπολογίσετε:

α) το μήκος α της πλευράς του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

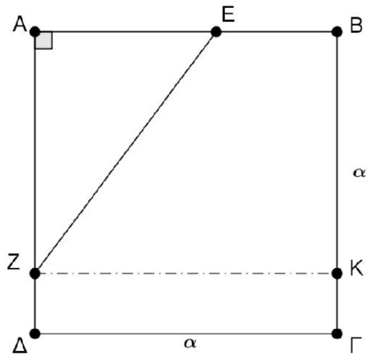
(Μονάδες 13

β) Την περίμετρο του πενταγώνου ΕΒΓΔΖ.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ότι:



$$\left(\text{EBKZ}\right)=\frac{\left(\text{EB}+\text{ZK}\right)\text{BK}}{2}=\frac{\left(\frac{2}{5}\alpha+\alpha\right)\frac{4}{5}\alpha}{2}=\frac{\frac{7}{5}\alpha\cdot\frac{4}{5}\alpha}{2}=\frac{14}{25}\alpha^2\ (1)$$

$$\left(\text{ZK}\Gamma\Delta\right)=\text{ZK}\cdot\text{K}\Gamma=\alpha\cdot\frac{1}{5}\alpha=\frac{1}{5}\alpha^2$$

Οπότε

$$\left(\text{EB}\Gamma\Delta\text{Z}\right)=\left(\text{EBKZ}\right)+\left(\text{ZK}\Gamma\Delta\right)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}76=\frac{14}{25}\alpha^2+\frac{1}{5}\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow 76=\frac{14}{25}\alpha^2+\frac{5}{25}\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow 76=\frac{19}{25}\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2=100$$

$$\Leftrightarrow \alpha=10\text{cm}$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΕ ισχύει:

$$\text{ZE}^2=\text{AZ}^2+\text{AE}^2=\left(\frac{4}{5}\cdot 10\right)^2+\left(\frac{3}{5}\cdot 10\right)^2=64+36=100\Leftrightarrow \text{ZE}=10\,\text{cm}\,(2)$$

και επίσης έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}\text{EB}&=\frac{2}{5}\alpha=\frac{2}{5}\cdot 10=4\,\text{cm}\\ \text{B}\Gamma&=\alpha=10\,\text{cm}\\ \Gamma\Delta&=\alpha=10\,\text{cm}\\ \Delta\text{Z}&=\frac{1}{5}\alpha=\frac{1}{5}\cdot 10=2\,\text{cm}\end{aligned}\right\}(3).$$

Άρα τελικά θα έχουμε:

$$\Pi_{\text{EB}\Gamma\Delta\text{Z}}=\text{EB}+\text{B}\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta\text{Z}+\text{ZE}\overset{(2),(3)}{=}4+10+10+2+10=36\,\text{cm}.$$

«Θέμα Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (19022)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) τέτοιο ώστε να ισχύει $2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Αν η προέκταση της διαμέσου του ΑΜ τέμνει τον περιεγραμμένο κύκλο στο σημείο Ρ , να αποδείξετε ότι :

α) $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

(Μονάδες 8)

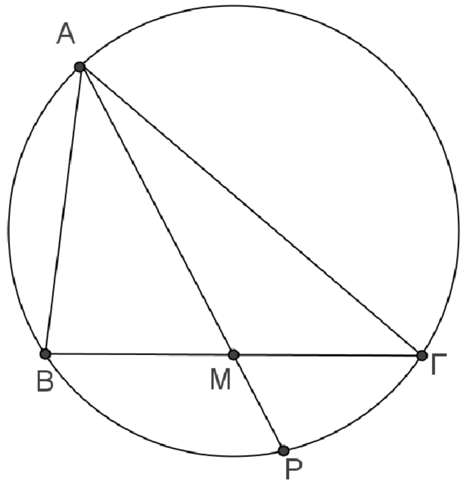
β) $MP = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{6}$

(Μονάδες 8)

γ) (ΑΒΓ)=6(ΜΡΓ)

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ



α) Από το πρώτο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε :

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha{}^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2\alpha^2 = 2\mu_\alpha{}^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$2\mu_\alpha{}^2 = \frac{3\alpha^2}{2} \Leftrightarrow \mu_\alpha{}^2 = \frac{3\alpha^2}{4} \Leftrightarrow \mu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$$

β) Οι χορδές ΑΡ και ΒΓ του κύκλου τέμνονται στο Μ άρα το θεώρημα τεμνομένων χορδών έχουμε :

$$MA \cdot MP = MB \cdot M\Gamma \Leftrightarrow \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \cdot MP = \frac{\alpha}{2}\frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \cdot MP = \frac{\alpha^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MP = \frac{\frac{\alpha^2}{4}}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow MP = \frac{2\alpha^2}{4\alpha\sqrt{3}} \Leftrightarrow MP = \frac{\alpha}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow MP = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$$

γ) Η ΑΜ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΑΒΓ , οπότε (ΑΒΓ)=2(ΑΒΜ) (1)

Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΜΓΡ έχουν τις γωνίες $\widehat{AMB}, \widehat{\Gamma MP}$ ίσες ως κατακορυφήν .

Οπότε $\dfrac{(AMB)}{(\Gamma MP)} = \dfrac{MA \cdot MB}{MP \cdot M\Gamma} \Leftrightarrow \dfrac{(AMB)}{(\Gamma MP)} = \dfrac{\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\alpha}{2}}{\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{6} \cdot \dfrac{\alpha}{2}} = 3$

Άρα $(AMB) = 3\,(MP\Gamma)$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $(AB\Gamma) = 6(MP\Gamma)$

***Παρόμοιες ασκήσεις σχολικού βιβλίου** : Σύνθετα θέματα 2 παράγραφος 9.7*

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (19032)

Δίνονται δυο κύκλοι (O,α) και (K,β) με $\alpha > \beta$, οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο Μ. Φέρνουμε το κοινό εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ με Α , Β σημεία των κύκλων (O,α) και (K,β) αντίστοιχα . Από το Μ θεωρούμε την κάθετη στο ΑΒ , η οποία τέμνει τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΚ και ΑΒ στα σημεία Λ και Ν αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

α) $M\Lambda = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

Μονάδες 8

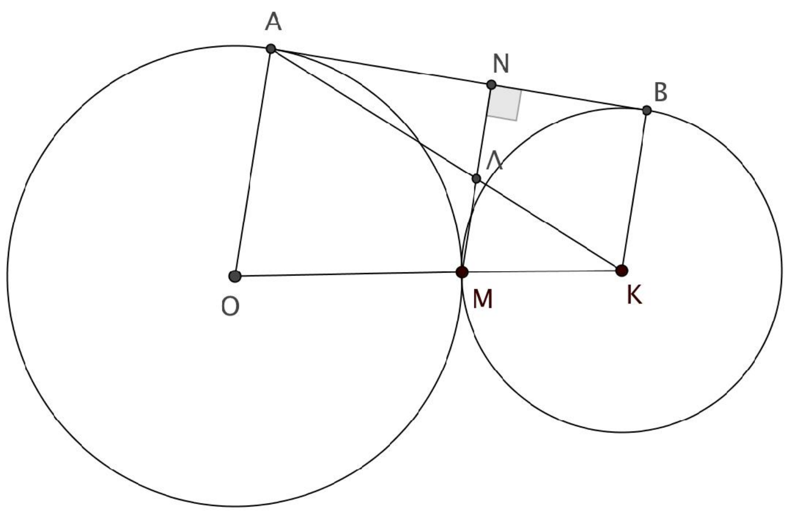
β) $\Lambda N = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

Μονάδες 8

γ) Αν E_1 και E_2 είναι τα εμβαδά των κύκλων (O,α) και (K,β) αντίστοιχα , τότε

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{(A\Lambda N)}{(KM\Lambda)}\right)^2$$

Μονάδες 9



ΛΥΣΗ

α) Οι ΟΑ , ΚΒ είναι ακτίνες στα σημεία επαφής της εφαπτομένης ΑΒ , άρα $ΟΑ \perp ΑΒ$ και $ΚΒ \perp ΑΒ$, οπότε $ΟΑ//ΜΝ//ΚΒ$.

Στο τρίγωνο ΑΚΟ είναι $ΛΜ//ΟΑ$, οπότε τα τρίγωνα ΑΚΟ και ΛΚΜ έχουν πλευρές ανάλογες , άρα

$$\frac{ΚΛ}{ΚΑ}=\frac{ΚΜ}{ΚΟ}=\frac{ΛΜ}{ΟΑ}\Leftrightarrow\frac{ΚΜ}{ΚΟ}=\frac{ΛΜ}{ΟΑ}\Leftrightarrow\frac{\beta}{\alpha+\beta}=\frac{ΛΜ}{\alpha}\Leftrightarrow ΜΛ=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

β) Είναι

$$\frac{ΚΛ}{ΚΑ}=\frac{ΛΜ}{ΟΑ}\Leftrightarrow\frac{ΚΛ}{ΚΑ}=\frac{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}}{\alpha}\Leftrightarrow\frac{ΚΑ-ΑΛ}{ΚΑ}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\Leftrightarrow\frac{ΚΑ}{ΚΑ}-\frac{ΑΛ}{ΚΑ}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\Leftrightarrow$$

$$1-\frac{ΑΛ}{ΚΑ}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\Leftrightarrow\frac{ΑΛ}{ΚΑ}=1-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\Leftrightarrow\frac{ΑΛ}{ΚΑ}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Στο τρίγωνο ΑΚΒ είναι $ΛΝ//ΚΒ$, οπότε τα τρίγωνα ΑΝΛ και ΑΒΚ έχουν πλευρές ανάλογες , άρα

$$\frac{ΑΝ}{ΑΒ}=\frac{ΑΛ}{ΑΚ}=\frac{ΛΝ}{ΚΒ}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{ΛΝ}{\beta}\Leftrightarrow ΛΝ=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

γ) Τα τρίγωνα ΑΛΝ , ΚΜΛ είναι έχουν $Α\hat{Λ}Ν=Κ\hat{Λ}Μ$ (ως κατακορυφήν) , οπότε για το λόγο των εμβαδών τους θα έχω

$$\frac{(ΑΛΝ)}{(ΚΜΛ)}=\frac{ΑΛ\cdot ΛΝ}{ΜΛ\cdot ΚΛ}=\frac{ΑΛ\cdot\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}}{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\cdot ΚΛ}=\frac{ΑΛ}{ΚΛ}=\frac{\alpha}{\beta}$$

Επομένως

$$\frac{(ΑΛΝ)}{(ΚΜΛ)}=\frac{\alpha}{\beta}\Leftrightarrow\left(\frac{(ΑΛΝ)}{(ΚΜΛ)}\right)^2=\frac{\alpha^2}{\beta^2}\Leftrightarrow\left(\frac{(ΑΛΝ)}{(ΚΜΛ)}\right)^2=\frac{\pi\alpha^2}{\pi\beta^2}\Leftrightarrow\left(\frac{(ΑΛΝ)}{(ΚΜΛ)}\right)^2=\frac{Ε_1}{Ε_2}$$

ΆΣΚΗΣΗ Δ3 (19034)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Μ , Λ και Ζ πάνω στις πλευρές ΑΒ , ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα τέτοια , ώστε $ΑΜ=\frac{1}{2}ΑΒ$, $ΑΛ=\frac{2}{3}ΑΓ$ και $ΒΖ=\frac{1}{3}ΒΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι $(ΑΜΛ)=\frac{1}{3}(ΑΒΓ)$

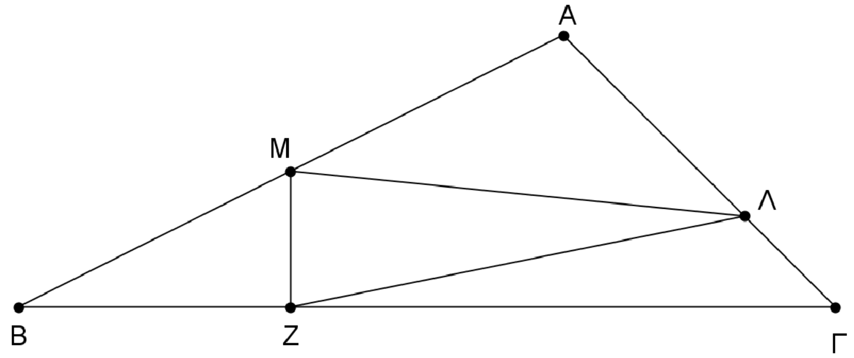
Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{(\text{ΜΖΛ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{5}{18}$

Μονάδες 12

γ) Να υπολογίσετε το λόγω των εμβαδών $\frac{(\text{ΑΜΖΛ})}{(\text{ΑΒΓ})}$

Μονάδες 6



ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΜΛ και ΑΒΓ έχουν την γωνία Α κοινή , οπότε

$$\frac{(\text{ΑΜΛ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\text{ΑΜ}\cdot\text{ΑΛ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}}\Leftrightarrow\frac{(\text{ΑΜΛ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\frac{1}{2}\cancel{\text{ΑΒ}}\cdot\frac{2}{3}\cancel{\text{ΑΓ}}}{\cancel{\text{ΑΒ}}\cdot\cancel{\text{ΑΓ}}}\Leftrightarrow\frac{(\text{ΑΜΛ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow(\text{ΑΜΛ})=\frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})$$

β) Τα τρίγωνα ΜΒΖ και ΑΒΓ έχουν την γωνία Β κοινή , οπότε :

$$\frac{(\text{ΒΜΖ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\text{ΒΜ}\cdot\text{ΒΖ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}}\Leftrightarrow\frac{(\text{ΒΜΖ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\frac{1}{2}\cancel{\text{ΑΒ}}\cdot\frac{1}{3}\cancel{\text{ΒΓ}}}{\cancel{\text{ΑΒ}}\cdot\cancel{\text{ΒΓ}}}\Leftrightarrow\frac{(\text{ΒΜΖ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow(\text{ΒΜΖ})=\frac{1}{6}(\text{ΑΒΓ})$$

Τα τρίγωνα ΓΖΛ και ΑΒΓ έχουν την γωνία Γ κοινή , οπότε

$$\frac{(\text{ΓΛΖ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\text{ΓΛ}\cdot\text{ΓΖ}}{\text{ΑΓ}\cdot\text{ΒΓ}}\Leftrightarrow\frac{(\text{ΓΛΖ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\frac{1}{3}\cancel{\text{ΑΓ}}\cdot\frac{2}{3}\cancel{\text{ΒΓ}}}{\cancel{\text{ΑΓ}}\cdot\cancel{\text{ΒΓ}}}\Leftrightarrow\frac{(\text{ΓΛΖ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{2}{9}\Leftrightarrow(\text{ΓΛΖ})=\frac{2}{9}(\text{ΑΒΓ})$$

Επομένως θα έχω

$$\begin{aligned}(\text{ΜΖΛ})&=(\text{ΑΒΓ})-(\text{ΑΜΛ})-(\text{ΒΜΖ})-(\text{ΓΛΖ})\\&=(\text{ΑΒΓ})-\frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})-\frac{1}{6}(\text{ΑΒΓ})-\frac{2}{9}(\text{ΑΒΓ})\\&=\frac{5}{18}(\text{ΑΒΓ})\end{aligned}$$

άρα,

$$(\text{ΜΖΛ})=\frac{5}{18}(\text{ΑΒΓ})\Leftrightarrow\frac{(\text{ΜΖΛ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{5}{18}$$

lisari – team

γ) Είναι,

$$\frac{(\text{ΑΜΖΛ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{(\text{ΑΜΛ})+(\text{ΜΖΛ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})+\frac{5}{18}(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\frac{11}{18}(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{11}{18}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (22310)

Ένα οικόπεδο ΑΒΓΔ σχήματος ορθογωνίου τραπεζίου ($\hat{\text{Α}}=\hat{\Delta}=90^\circ$) έχει πλευρές $\Gamma\Delta=40\text{m}$, $\text{ΑΒ}=60\text{m}$ και $\text{Α}\Delta=30\text{m}$. Ένας δρόμος αποκόπτει από το οικόπεδο το κομμάτι ΖΕΚΓ σχήματος παραλληλογράμμου. Αν $\Delta\text{Ζ}=20\text{m}$ και $\text{ΑΕ}=10\text{m}$ τότε:

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν (ΚΓΒ).

(Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του οικοπέδου που αποκόπτει ο δρόμος.

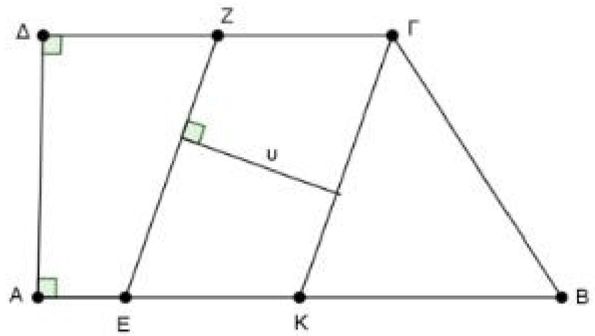
(Μονάδες 5)

γ) Να υπολογίσετε το πλάτος (υ) του δρόμου.

(Μονάδες 9)

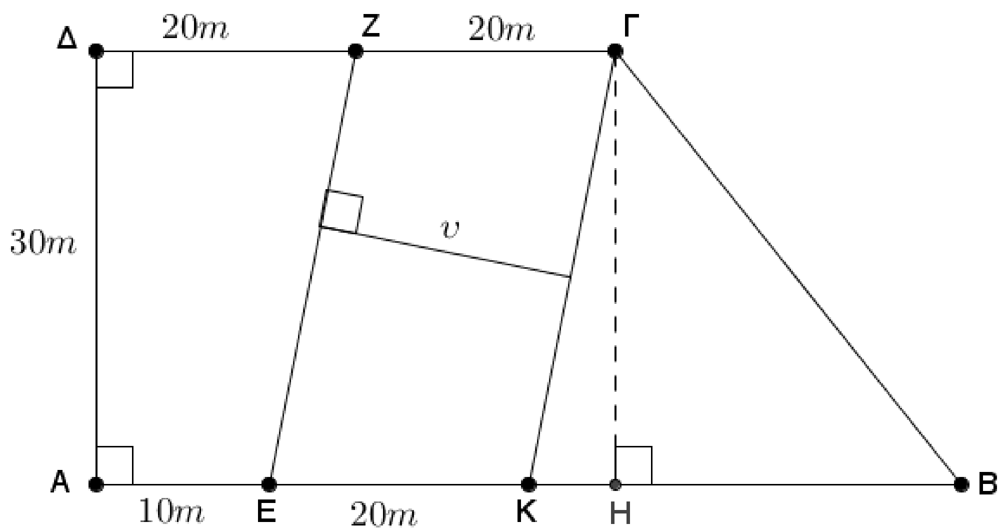
δ) Να υπολογίσετε την ΒΓ.

(Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

α) Από το σχήμα και τα δεδομένα, προκύπτουν τα παρακάτω:



$\Gamma\text{Ζ}=\Gamma\Delta-\Delta\text{Ζ}=40\text{m}-20\text{m}$, άρα $\Gamma\text{Ζ}=20\text{m}$ (1)

Το τετράπλευρο ΖΓΚΕ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι απέναντι πλευρές του θα είναι ίσες (§5.2), άρα και $\text{ΕΚ} = \text{ΓΖ} = 20\text{m}$ (2)

$\text{ΚΒ} = \text{ΑΒ} - \text{ΑΕ} - \text{ΕΚ} = 60\text{m} - 10\text{m} - 20\text{m}$, άρα $\text{ΚΒ} = 30\text{m}$ (3). Φέρνουμε $\text{ΓΗ} \perp \text{ΑΒ}$, είναι και $\text{ΔΑ} \perp \text{ΑΒ}$, άρα από κριτήρια παραλληλίας (§4.2) είναι $\text{ΓΗ} \parallel \text{ΔΑ}$ (4).

Λόγω τραπεζίου, είναι $\text{ΓΔ} \parallel \text{ΑΒ} \Rightarrow \text{ΓΔ} \parallel \text{ΑΗ}$ (5)

Οι σχέσεις (4) και (5) οδηγούν στο συμπέρασμα ότι το ΓΔΑΗ είναι παραλληλόγραμμο (6), άρα και $\text{ΓΗ} = \text{ΑΔ} = 30\text{m}$ (7).

Τότε,

$$(\text{ΚΓΒ}) = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \upsilon$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \text{ΚΒ} \cdot \text{ΓΗ}$$
$$\overset{(3),(7)}{=} \frac{1}{2} \cdot 30\text{m} \cdot 30\text{m}$$

άρα

$$\boxed{(\text{ΚΓΒ}) = 450\text{m}^2}$$

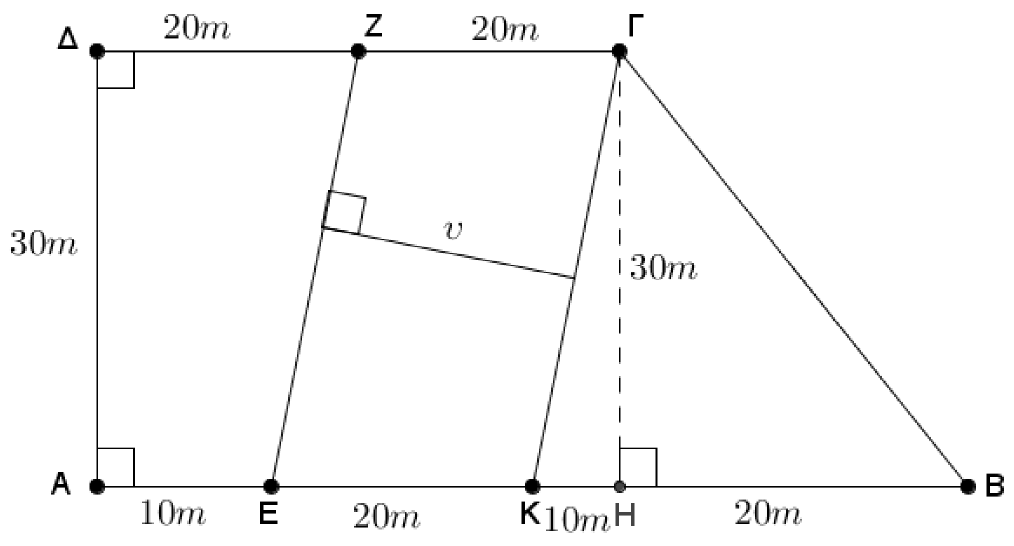
β) Το οικόπεδο που αποκόπτει ο δρόμος, δηλαδή το τετράπλευρο ΖΓΚΕ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε (§10.3) θα έχει εμβαδόν:

$$(\text{ΖΕΚΓ}) = \beta \cdot \upsilon$$
$$= \text{ΕΚ} \cdot \text{ΓΗ}$$
$$\overset{(2),(7)}{=} 20\text{m} \cdot 30\text{m}$$

άρα

$$\boxed{(\text{ΖΕΚΓ}) = 600\text{m}^2}$$

γ) Από τη σχέση (6), έχουμε ότι το ΓΔΑΗ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε θα ισχύει ότι $\text{ΑΗ} = \text{ΓΔ} = 40\text{m}$ (8)



Επομένως,

$\text{ΚΗ} = \text{ΑΗ} - \text{ΑΕ} - \text{ΕΚ} = 40\text{m} - 10\text{m} - 20\text{m}$, άρα $\text{ΚΗ} = 10\text{m}$ (9)

Με την εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΗΓ, έχουμε:

$$\Gamma K^2 = \Gamma H^2 + KH^2 \overset{(7),(9)}{\Rightarrow} \Gamma K = \sqrt{30^2+10^2} \Rightarrow \Gamma K = \sqrt{1000} \Rightarrow \Gamma K = 10\sqrt{10}$$

Το τετράπλευρο ΖΓΚΕ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε (§10.3) θα έχει εμβαδόν:

$$(ZEK\Gamma) = \beta \cdot \upsilon \Rightarrow$$
$$(ZEK\Gamma) = \Gamma K \cdot \upsilon \Rightarrow$$
$$\upsilon = \frac{(ZEK\Gamma)}{\Gamma K} \Rightarrow$$
$$\upsilon = \frac{600}{10\sqrt{10}} \Rightarrow$$
$$\upsilon = \frac{60}{\sqrt{10}} \Rightarrow$$

άρα

$$\boxed{\upsilon = 6\sqrt{10}}$$

δ) Είναι $HB = AB - AH \overset{(8)}{=} 60m - 40m = 20m$ (10)
Με την εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΗ, έχουμε:

$$\Gamma B^2 = \Gamma H^2 + HB^2 \overset{(7),(10)}{\Rightarrow} \Gamma B = \sqrt{30^2+20^2} \Rightarrow \Gamma B = \sqrt{1300}$$

άρα

$$\boxed{B\Gamma = 10\sqrt{13}}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ5 (22319)

Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ=2R. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, θεωρούμε ένα σημείο Μ, τέτοιο ώστε ΒΜ=2R. Από το Μ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ στο ημικύκλιο. Φέρουμε εφαπτόμενη στο ημικύκλιο στο σημείο Α η οποία τέμνει την προέκταση του τμήματος ΜΓ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι:

α) $M\Gamma = 2\sqrt{2}R$

Μονάδες 8

β) $MO \cdot MA = M\Gamma \cdot M\Delta$

Μονάδες 8

γ) (ΑΟΓΔ)=(ΜΟΓ)

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Επειδή ΜΓ εφαπτομένη του κύκλου και ΜΒΑ τέμνουσα έχουμε:

$$M\Gamma^2 = MB \cdot MA = 2R \cdot 4R = 8R^2$$

άρα

$$M\Gamma = \sqrt{8R^2} = \sqrt{8}\sqrt{R} = \sqrt{2\cdot 4}\sqrt{R} = 2R\sqrt{2}$$

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AO\Gamma$, $MA\Delta$ είναι όμοια διότι έχουν τη γωνία $\hat{M}$ κοινή. Επομένως οι πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή

$$\frac{\text{ΜΓ}}{\text{ΜΑ}} = \frac{\text{ΜΟ}}{\text{ΜΔ}} \Leftrightarrow \text{ΜΟ} \cdot \text{ΜΑ} = \text{ΜΓ} \cdot \text{ΜΔ}$$

Β τρόπος

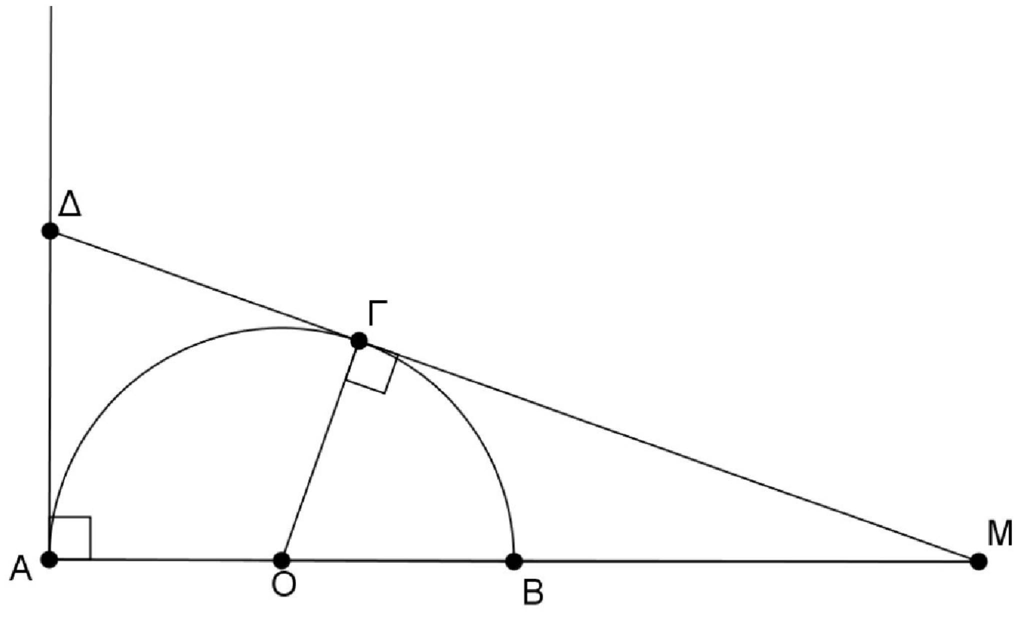
Επειδή οι εφαπτόμενες του κύκλου είναι κάθετες στις αντίστοιχες ακτίνες, οι γωνίες $\text{Δ}\hat{\text{Α}}\text{Ο}$, $\text{Ο}\hat{\text{Γ}}\text{Δ}$ είναι ορθές, άρα το τετράπλευρο ΑΟΔΓ είναι εγγράψιμο. Τότε $\text{ΜΟ} \cdot \text{ΜΑ} = \text{ΜΓ} \cdot \text{ΜΔ}$ αφού οι απέναντι πλευρές του ΑΟ, ΔΓ τέμνονται στο Μ.

γ) Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων τριγώνων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους, δηλαδή

$$\frac{(\text{ΜΟΓ})}{(\text{ΜΔΑ})} = \left(\frac{\text{ΜΓ}}{\text{ΜΑ}}\right)^2 = \left(\frac{2R\sqrt{2}}{4R}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

τότε

$$(\text{ΑΟΓΔ}) = (\text{ΜΔΑ}) - (\text{ΜΟΓ}) = 2(\text{ΜΟΓ}) - (\text{ΜΟΓ}) = (\text{ΜΟΓ})$$



ΑΣΚΗΣΗ Δ6 (22321)

Δίνονται δύο κύκλοι (Ο,8), (Κ,2) με διάκεντρο ΟΚ = 12 η οποία τους τέμνει στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Αν ΑΒ είναι κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δυο κύκλων και ΚΜ κάθετο τμήμα στην ΟΑ τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\text{ΜΚ} = 6\sqrt{3}$

Μονάδες 6

β) $(\text{ΑΟΚΒ}) = 30\sqrt{3}$

Μονάδες 5

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΜΟΚ

Μονάδες 7

δ) (ΟΑΓ) = 16(ΔΒΚ)

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Το ΑΒΚΜ είναι ορθογώνιο, άρα ΑΜ = ΒΚ = 2 και ΑΒ = ΜΚ, τότε

$$ΟΜ = ΟΑ – ΑΜ = 8 – 2 = 6$$

Από Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΟΜ έχουμε:

$$ΟΜ^2 + ΜΚ^2 = ΟΚ^2 \Leftrightarrow 6^2 + ΜΚ^2 = 12^2 \Leftrightarrow ΜΚ^2 = 144 - 36 = 108$$

άρα

$$ΜΚ = \sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$$

β) Το ΑΟΚΒ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με βάσεις ΟΑ = 8, ΚΒ = 2 και ύψος $ΜΚ = 6\sqrt{3}$ άρα

$$(ΑΟΚΒ) = \frac{(ΟΑ + ΚΒ) \cdot ΜΚ}{2} = \frac{(8+2)6\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$$

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΚΟ είναι $ΟΜ = 6 = \frac{ΟΚ}{2}$, οπότε $Ο\hat{Κ}Μ = 30°$, επομένως

$Μ\hat{Ο}Κ = 60°$

δ) Είναι $ΟΑ // ΚΒ$ ως κάθετες στην ΑΒ , άρα οι γωνίες $Μ\hat{Ο}Κ$, $Ο\hat{Κ}Β$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά, οπότε

$$\frac{(ΟΑΓ)}{(ΔΒΚ)} = \frac{ΟΑ \cdot ΟΓ}{ΚΔ \cdot ΚΒ} = \frac{8 \cdot 8}{2 \cdot 2} = 16 \text{ ή } (ΟΑΓ) = 16(ΔΒΚ)$$

<u>Β΄ τρόπος</u>

Είναι $ΟΑ // ΚΒ$ ως κάθετες στην ΑΒ , άρα οι γωνίες $Μ\hat{Ο}Κ$, $Ο\hat{Κ}Β$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά άρα $Ο\hat{Κ}Β = 120^0$.

Επομένως,

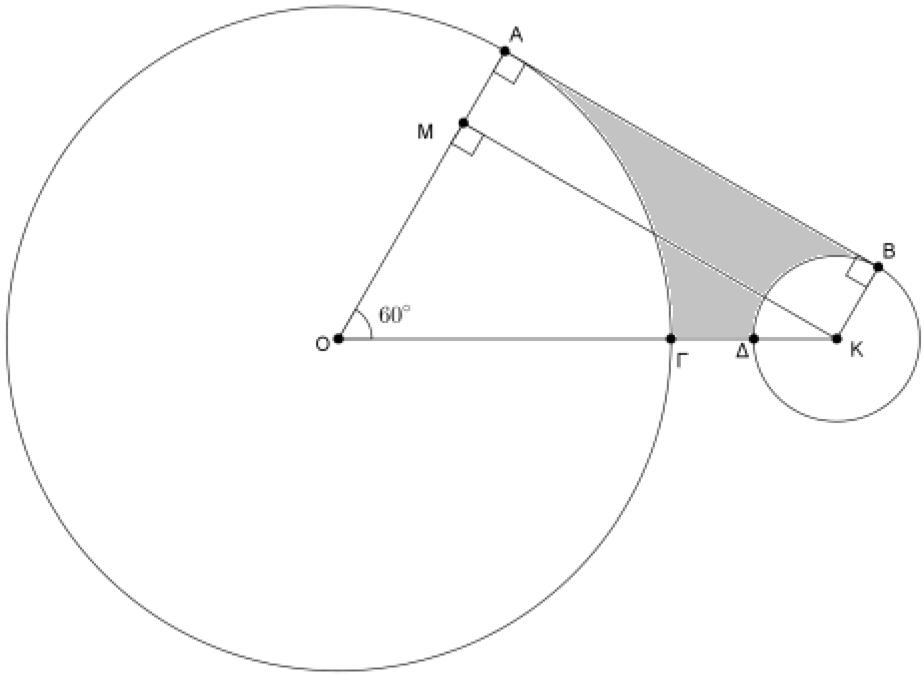
$$(ΟΑΓ) = \frac{1}{2}ΟΑ \cdot ΟΓημ60^0 = 32\frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$$

και

$$(ΔΒΚ) = \frac{1}{2}ΚΒ \cdot ΚΔημ120^0 = \frac{1}{2}ΚΒ \cdot ΚΔημ(180^0 - 60^0) = \frac{1}{2}ΚΒ \cdot ΚΔημ60^0 = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

άρα

$$(ΟΑΓ) = 16(ΔΒΚ)$$



ΑΣΚΗΣΗ Δ7 (22327)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Μ , Λ , Ζ πάνω στις πλευρές ΑΒ , ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\text{AM} = \frac{1}{2}\text{AB}$, $\text{A}\Lambda = \frac{2}{3}\text{A}\Gamma$ και $\text{BZ} = \frac{1}{3}\text{B}\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $(\text{AM}\Lambda) = \frac{1}{3}(\text{AB}\Gamma)$

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{(\text{MZ}\Lambda)}{(\text{AB}\Gamma)} = \frac{5}{18}$

(Μονάδες 12)

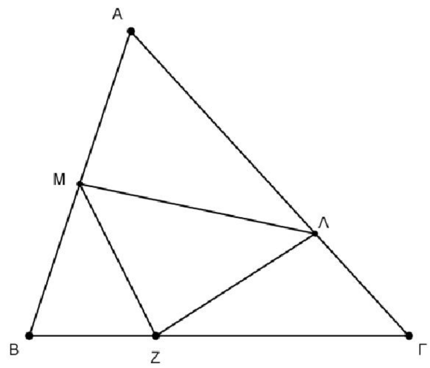
γ) Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(\text{AMZ}\Lambda)}{(\text{AB}\Gamma)}$.

(Μονάδες 6)

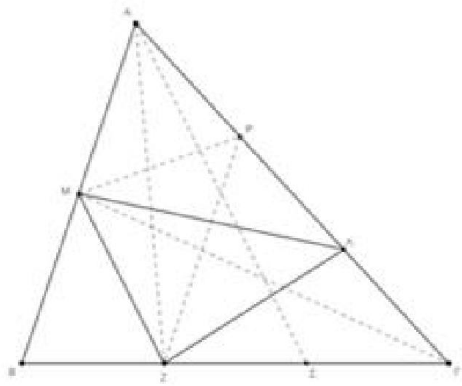
ΛΥΣΗ

Τα τρίγωνα $(\text{AM}\Lambda), (\text{AB}\Gamma)$ έχουν κοινή γωνία την $\hat{\text{A}}$, επομένως

$$\frac{(\text{AM}\Lambda)}{(\text{AB}\Gamma)} = \frac{\text{AM}\cdot\text{A}\Lambda}{\text{AB}\cdot\text{A}\Gamma} = \frac{\frac{\text{AB}}{2}\cdot\frac{2\text{A}\Gamma}{3}}{\text{AB}\cdot\text{A}\Gamma} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow (\text{AB}\Gamma) = 3(\text{AM}\Lambda)$$



<u>Β΄ τρόπος</u>



α) Αφού $AM=\frac{1}{2}AB$, το Μ είναι το μέσο του ΑΒ , οπότε (εφαρμογή 3 σελ 216 σχολικού) $(AM\Gamma)=\frac{1}{2}(AB\Gamma)$ (1). Έστω Ρ το μέσο του τμήματος ΑΛ , αφού $A\Lambda=\frac{2}{3}A\Gamma$ το Λ θα είναι το μέσο του ΡΓ, τότε (εφαρμογή 3 σελ 216 σχολικού)

$$(AMP)=(PM\Lambda)=(\Lambda M\Gamma)=\frac{1}{3}(AM\Gamma)\ (2)$$

άρα

$$(AM\Lambda)=(AMP)+(PM\Lambda)\overset{(2)}{=}\frac{1}{3}(AM\Gamma)+\frac{1}{3}(AM\Gamma)\Rightarrow(AM\Lambda)=\frac{2}{3}(AM\Gamma)\ (3)$$

Από (1),(3) έχουμε

$$(AM\Lambda)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(AB\Gamma)\Leftrightarrow(AM\Lambda)=\frac{1}{3}(AB\Gamma)\ (4)$$

β) Ομοίως βρίσκουμε

$$(MBZ)=\frac{1}{6}(AB\Gamma)\ (6)\text{ και }(\Lambda Z\Gamma)=\frac{2}{9}(AB\Gamma)\ (7)$$

Από το σχήμα έχουμε

$$(MZ\Lambda)=(AB\Gamma)-(AM\Lambda)-(MBZ)-(\Lambda Z\Gamma)\ (5).$$

Η σχέση

$$(5)\overset{(4),(6),(7)}{\Rightarrow}(MZ\Lambda)=(AB\Gamma)-\frac{1}{3}(AB\Gamma)-\frac{1}{6}(AB\Gamma)-\frac{2}{9}(AB\Gamma)\Leftrightarrow(MZ\Lambda)=\frac{5}{18}(AB\Gamma)$$

$$\Leftrightarrow\frac{(MZ\Lambda)}{(AB\Gamma)}=\frac{5}{18}\ (8)$$

<u>lisari – team</u>

γ) Από το σχήμα έχουμε :

$$\frac{(\mathrm{AMZ}\varDelta)}{(\mathrm{AB}\varGamma)}=\frac{(\mathrm{AM}\varDelta)+(\mathrm{MZ}\varDelta)}{(\mathrm{AB}\varGamma)}\overset{(1),(8)}{=}\frac{\frac{1}{3}(\mathrm{AB}\varGamma)+\frac{5}{18}(\mathrm{AB}\varGamma)}{(\mathrm{AB}\varGamma)}=\frac{\frac{11}{18}(\mathrm{AB}\varGamma)}{(\mathrm{AB}\varGamma)}\Leftrightarrow\frac{(\mathrm{AMZ}\varDelta)}{(\mathrm{AB}\varGamma)}=\frac{11}{18}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ8 (22328)

Δίνεται κύκλος (K,R) και μια διάμετρός του AB. Από σημείο E στην προέκταση της AB προς το μέρος του B φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα στον κύκλο και έστω Γ το σημείο επαφής. Στο σημείο E φέρουμε κάθετη στην AB η οποία τέμνει την προέκταση της AΓ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι :

α) Το τετράπλευρο BEΔΓ είναι εγγράψιμο.

(Μονάδες 8)

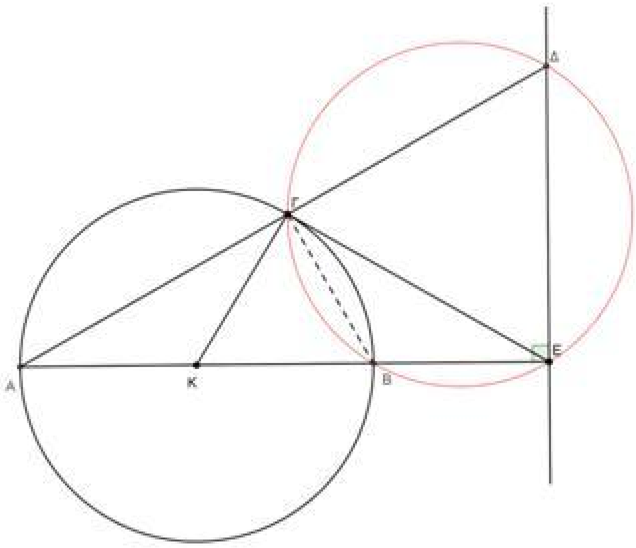
β) $\mathrm{A}\varGamma\cdot \mathrm{A}\varDelta=\mathrm{AE}^2-\mathrm{BE}\cdot\mathrm{AE}$.

(Μονάδες 10)

γ) $\dfrac{(\mathrm{A}\varGamma\mathrm{E})}{(\mathrm{BE}\varGamma)}=\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{BE}}$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ



α) Η γωνία AΓB είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο (K,R) που βαίνει σε ημικύκλιό του οπότε $\mathrm{A}\hat{\varGamma}\mathrm{B}=90^{\circ}$ (1). Επίσης , από υπόθεση ΔE ⊥ BE , οπότε $\mathrm{B}\hat{E}\varDelta=90^{\circ}$ (2).

$$(1),(2)\Rightarrow \mathrm{A}\hat{\varGamma}\mathrm{B}=\mathrm{B}\hat{E}\varDelta$$

Δηλαδή η εξωτερική γωνία AΓB , του τετραπλεύρου BEΔΓ ισούται την απέναντι εσωτερική γωνία BEΔ του BEΔΓ , άρα το τετράπλευρο BEΔΓ είναι εγγράψιμο.

β) Έστω (Λ, ρ) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τετραπλεύρου. Οι χορδές BE και ΓΔ του κύκλου (Λ, ρ) τέμνονται στο εξωτερικό του σημείο A , άρα

$$\mathrm{A}\varGamma\cdot\mathrm{A}\varDelta=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AE}=\mathrm{AE}(\mathrm{AE}-\mathrm{BE})=\mathrm{AE}^2-\mathrm{AE}\cdot\mathrm{BE}\Leftrightarrow\mathrm{A}\varGamma\cdot\mathrm{A}\varDelta=\mathrm{AE}^2-\mathrm{AE}\cdot\mathrm{BE}$$

γ) Τα τρίγωνα AΓE και BEΓ έχουν κοινή γωνία την $\varGamma\hat{E}A$. Επομένως

$$\frac{(\mathrm{A}\Gamma\mathrm{E})}{(\mathrm{BE}\Gamma)}=\frac{\mathrm{AE}\cdot\mathrm{E}\Gamma}{\mathrm{BE}\cdot\mathrm{E}\Gamma}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{BE}}$$

Β΄ τρόπος

Το τμήμα $\Gamma\mathrm{E}$ είναι εφαπτόμενο στον κύκλο (K,R) και η AE είναι τέμνουσα του κύκλου (K,R) άρα :

$$\Gamma E^2=\mathrm{BE}\cdot\mathrm{AE}\ \ (3)$$

Τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΒΕΓ είναι όμοια γιατί η ΒΕΓ είναι κοινή τους γωνία και $\hat{\mathrm{A}}=\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{E}$, αφού η ΒΓΕ είναι η γωνία που σχηματίζει η χορδή ΒΓ με την εφαπτομένη ΓΕ και η $\hat{\mathrm{A}}$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο (K,R) που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{B}\Gamma}$ της χορδής ΒΓ . Επομένως,

$$\frac{(\mathrm{A}\Gamma\mathrm{E})}{(\mathrm{BE}\Gamma)}=\left(\frac{\mathrm{AE}}{\Gamma\mathrm{E}}\right)^2=\frac{\mathrm{AE}^2}{\Gamma\mathrm{E}^2}\overset{(3)}{=}\frac{\mathrm{AE}^2}{\mathrm{BE}\cdot\mathrm{AE}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{BE}}\Leftrightarrow\frac{(\mathrm{A}\Gamma\mathrm{E})}{(\mathrm{BE}\Gamma)}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{BE}}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ9 (22336)

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ κατά τμήμα $\Gamma\Delta=\frac{\mathrm{A}\Gamma}{2}$. Αν η προέκταση του ύψους ΑΜ, τέμνει την ΒΔ στο Ε, να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{E}\Delta}=\frac{2}{3}$

(Μονάδες 8)

β) $\frac{(\mathrm{B}\Gamma\mathrm{E})}{(\Gamma\mathrm{E}\Delta)}=\frac{2}{3}$

(Μονάδες 9)

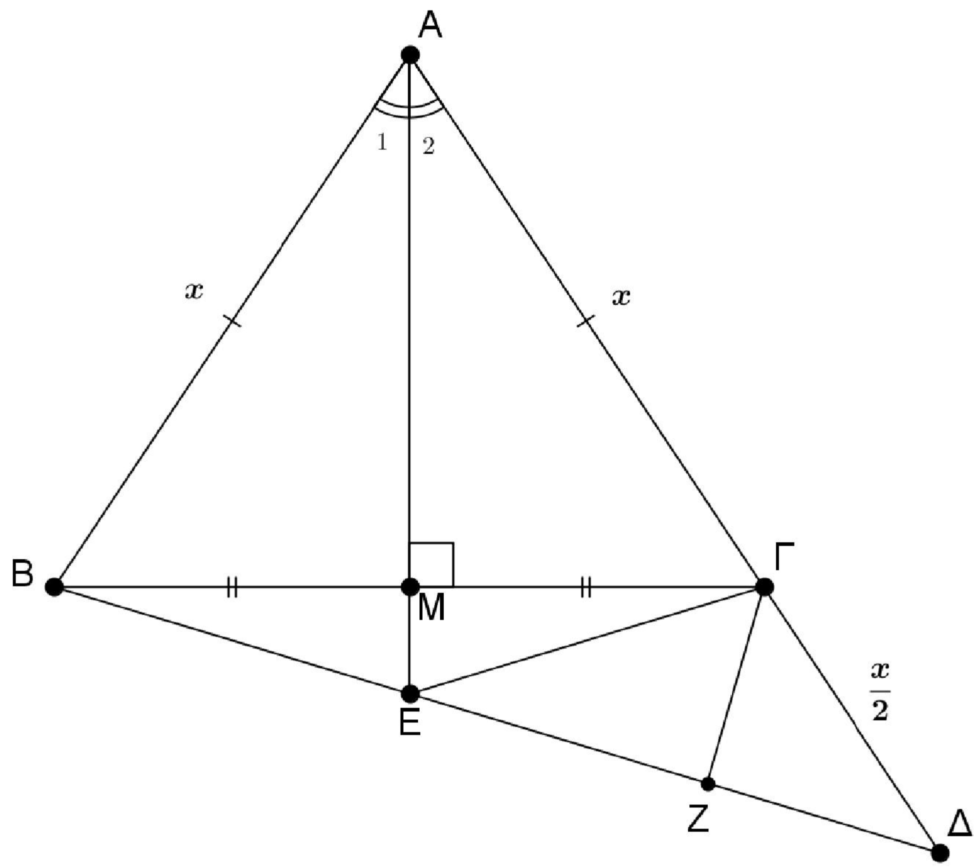
γ) $\frac{(\mathrm{AB}\Delta)}{(\Gamma\mathrm{E}\Delta)}=5$

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΑΕ είναι διχοτόμος, άρα από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου έχουμε,

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{E}\Delta}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}\Delta}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}\Gamma+\Gamma\Delta}=\frac{x}{x+\frac{x}{2}}=\frac{x}{\frac{3x}{2}}=\frac{2}{3}$$



β) Τα τρίγωνα ΒΓΕ και ΓΕΔ έχουν κοινό ύψος, άρα

$$\frac{(\mathrm{B\Gamma E})}{(\Gamma \mathrm{E}\Delta)}=\frac{\mathrm{BE}\cdot\Gamma\mathrm{Z}}{\mathrm{E}\Delta\cdot\Gamma\mathrm{Z}}=\frac{2}{3}$$

γ) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΕΔ έχουν κοινή γωνία Δ, άρα

$$\frac{(\mathrm{AB}\Delta)}{(\Gamma\mathrm{E}\Delta)}=\frac{\Delta\mathrm{B}\cdot\Delta\mathrm{A}}{\Delta\mathrm{E}\cdot\Delta\Gamma}=\frac{\Delta\mathrm{B}}{\Delta\mathrm{E}}\cdot\frac{\Delta\mathrm{A}}{\Delta\Gamma}=\frac{\Delta\mathrm{E}+\mathrm{EB}}{\Delta\mathrm{E}}\cdot\frac{x+\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\left(\frac{\Delta\mathrm{E}}{\Delta\mathrm{E}}+\frac{\mathrm{EB}}{\Delta\mathrm{E}}\right)\cdot\frac{\frac{3x}{2}}{\frac{x}{2}}=\left(1+\frac{2}{3}\right)\cdot 3=\frac{5}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}=5$$

Προσοχή:

Η αρχική εκφώνηση ζητούσε να αποδειχθεί ότι $\frac{(\mathrm{AB}\Delta)}{(\Gamma\mathrm{E}\Delta)}=\frac{5}{2}$. Το οποίο είναι λάθος.

Η σωστή απάντηση είναι $\frac{(\mathrm{AB}\Delta)}{(\Gamma\mathrm{E}\Delta)}=5$ και έχει διορθωθεί στην εκφώνηση).

Στοιχεία θεωρίας από το σχολικό βιβλίο

Θέμα Β

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (22295)

Με ένα σύρμα μήκους c κατασκευάζουμε ένα κανονικό εξάγωνο.

α) Να εκφράσετε την πλευρά του εξαγώνου ως συνάρτηση του c.

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του εξαγώνου ισούται με $\dfrac{c^2\sqrt{3}}{24}$

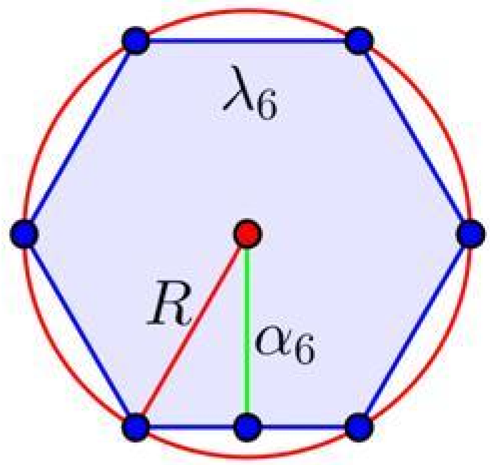
Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Έστω λ_6 η πλευρά του κανονικού εξαγώνου.

Το μήκος του σύρματος ισούται με την περίμετρο του κανονικού εξαγώνου, άρα

$$6\cdot\lambda_6 = c \Leftrightarrow \lambda_6 = \frac{c}{6}$$



β) Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν ενός κανονικού πολυγώνου πλευράς ν ισούται με το μισό του γινόμενο της περιμέτρου του επί το απόστημά του,

δηλαδή $E_\nu = \frac{1}{2}P_\nu\alpha_\nu$

άρα για το κανονικό εξάγωνο έχουμε

$$E_6 = \frac{1}{2}P_6\alpha_6$$

Η περίμετρος του κανονικού εξαγώνου προφανώς ισούται με $P_6 = c$.

Η πλευρά του κανονικού εξαγώνου ισούται με την ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου, δηλαδή $\lambda_6 = R$.

Το απόστημα του κανονικού εξαγώνου ισούται με

$$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{\lambda_6\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{c}{6}\sqrt{3}}{2} = \frac{c\sqrt{3}}{12}$$

Άρα σύμφωνα με τον αρχικό τύπο είναι

$$E_6 = \frac{1}{2}P_6\alpha_6 = \frac{1}{2}\cdot c\cdot\frac{c\sqrt{3}}{12} = \frac{c^2\sqrt{3}}{24}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (22296)

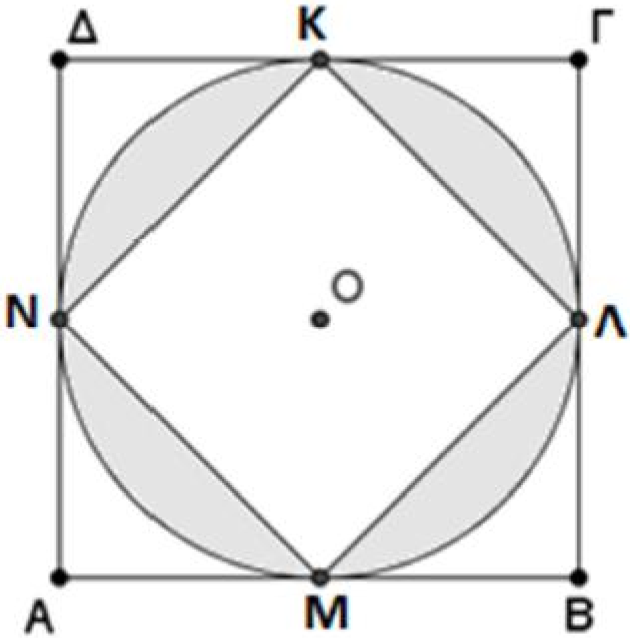
Σε τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ με πλευρά 10, θεωρούμε τον εγγεγραμμένο κύκλο του κέντρου $Ο$ και εντός του κύκλου το εγγεγραμμένο τετράγωνο $ΚΛΜΝ$, όπως στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $(ΚΛΜΝ) = 50$

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του κύκλου που βρίσκεται στο εξωτερικό του τετραγώνου $ΚΛΜΝ$ και εσωτερικά του κύκλου, είναι ίσο με $25(\pi - 2)$

Μονάδες 13



ΛΥΣΗ

α) Ο εγγεγραμμένος κύκλος του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ τέμνει τις πλευρές του τετραγώνου στα $Μ$, $Λ$, $Κ$ και $Ν$, τα οποία είναι μέσα των $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$ και $ΑΔ$ αντίστοιχα.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΑΜΝ}$ είναι

$$ΑΜ = \frac{1}{2}ΑΒ = \frac{1}{2}\cdot 10 = 5 \quad \text{και} \quad ΑΝ = \frac{1}{2}ΑΔ = \frac{1}{2}\cdot 10 = 5$$

και από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$ΜΝ^2 = ΑΜ^2 + ΑΝ^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$$

Συνεπώς το εμβαδόν του τετραγώνου $ΚΛΜΝ$ ισούται με

$$(ΚΛΜΝ) = ΜΝ^2 = 50 \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

β) Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου ισούται με το εμβαδόν του κύκλου μείον το εμβαδόν του τετραγώνου $ΚΛΜΝ$.

Ο κύκλος έχει ακτίνα $ΟΝ = ΑΜ = 5$, συνεπώς το εμβαδόν του ισούται με

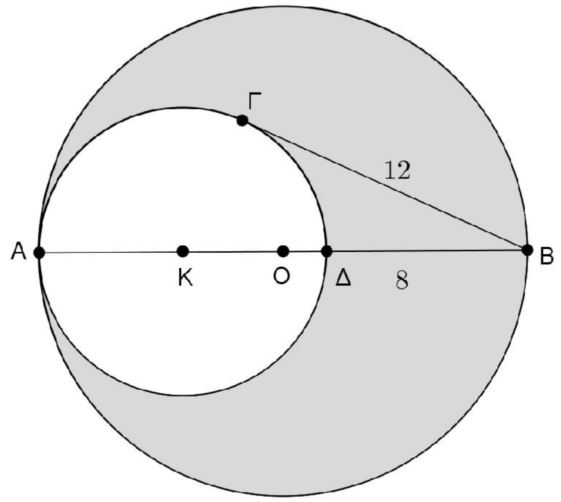
$$E = \pi\rho^2 = \pi \cdot AM^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου είναι ίσο με

$$(ΚΛΜΝ) - E = 50 - 25\pi = 25(\pi - 2) \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (22300)

Στο παρακάτω σχήμα οι κύκλοι (Ο, R) και (Κ, ρ) εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο Α. Από το άκρο Β της διαμέτρου ΑΒ του κύκλου (Ο, R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΒΓ του κύκλου (Κ, ρ) και είναι $ΒΓ=12$. Αν η διάμετρος ΒΑ τέμνει τον κύκλο (Κ, ρ) στο Δ και ισχύει ότι ΒΔ = 8 ,τότε:



α) Να αποδείξετε ότι για τις ακτίνες R και ρ των κύκλων (Ο, R) και (Κ, ρ) ισχύουν R = 9 και ρ = 5.

Μονάδες 15

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου (σκιασμένο) που περικλείεται μεταξύ των 2 κύκλων.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Η γωνία $Γ$ είναι ορθή γιατί είναι γωνιά που σχηματίζεται από την ακτίνα του κύκλου $(Ο,\rho)$ και την εφαπτομένη του στο σημείο επαφής. Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $ΒΚΓ$, έχουμε:

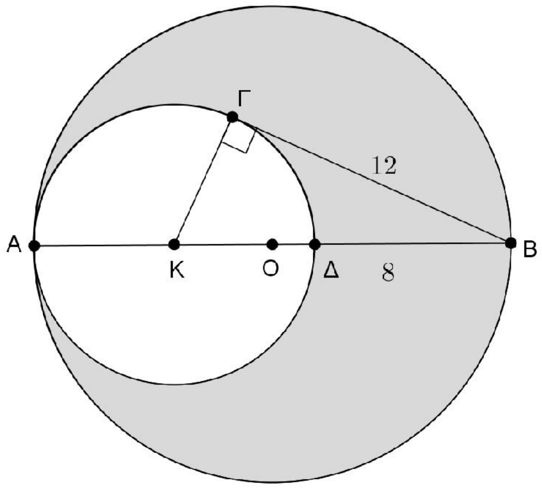
$$ΚΒ^2 = ΚΓ^2 + ΒΓ^2 \Leftrightarrow (\rho + 8)^2 = \rho^2 + 12^2 \Leftrightarrow \rho^2 + 16\rho + 64 = \rho^2 + 144 \Leftrightarrow 16\rho = 80 \Leftrightarrow \rho = 5$$

Το $ΑΒ$ είναι διάμετρος του κύκλου $(Ο,R)$ οπότε έχουμε:

$$ΑΒ = ΑΔ + ΔΒ \Leftrightarrow 2R = 2\rho + 8 \Leftrightarrow 2R = 18 \Leftrightarrow R = 9$$

β) Το εμβαδό του κύκλου $(Ο,R)$ είναι:

$$E_1 = \pi R^2 = 81\pi$$



Το εμβαδό του κύκλου (O,ρ) είναι:

$$E_2 = \pi\rho^2 = 25\pi$$

Οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των 2 κύκλων είναι:

$$E = E_1 - E_2 = 81\pi - 25\pi = 66\pi \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (22301)

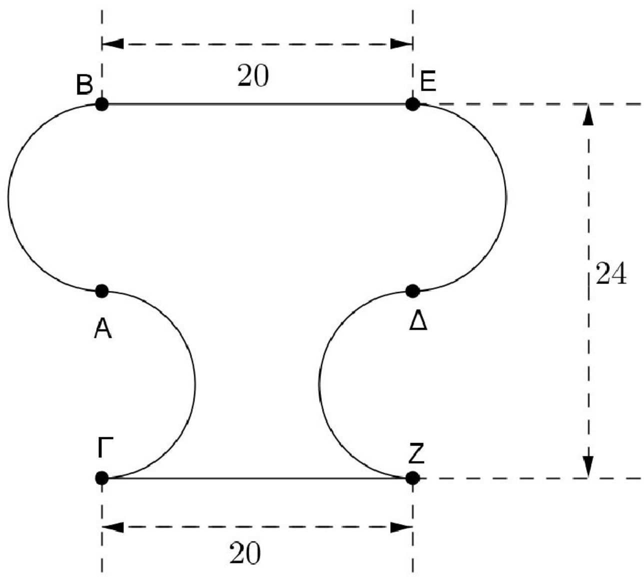
Στο παρακάτω σχήμα, τα καμπυλόγραμμα τμήματα ΒΑ, ΑΓ, ΖΔ και ΔΕ είναι ίσα ημικύκλια. Αν $BE \parallel A\Delta \parallel \Gamma Z$, $BE = A\Delta = \Gamma Z = 20$ και το ύψος του σχήματος είναι 24, να υπολογίσετε:

α) Την περίμετρο του σχήματος.

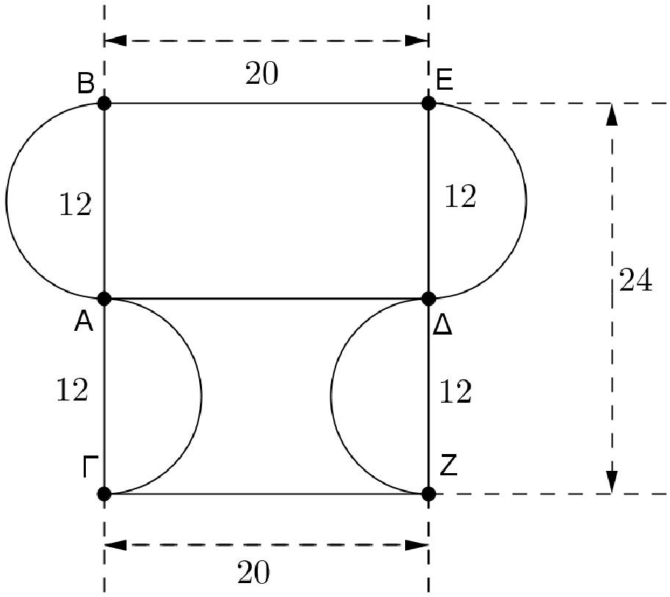
Μονάδες 12

β) Το εμβαδόν του.

Μονάδες 13



ΛΥΣΗ



α) Αφού τα ημικύκλια είναι όλα ίσα μεταξύ τους και έστω ρ η ακτίνα τους τότε έχουμε:

$$EZ = 24 \Leftrightarrow 4\rho = 24 \Leftrightarrow \rho = 6$$

Οπότε το μήκος κάθε ημικυκλίου θα είναι

$$L = \pi\rho = 6\pi$$

Τελικά η περίμετρος του σχήματος είναι:

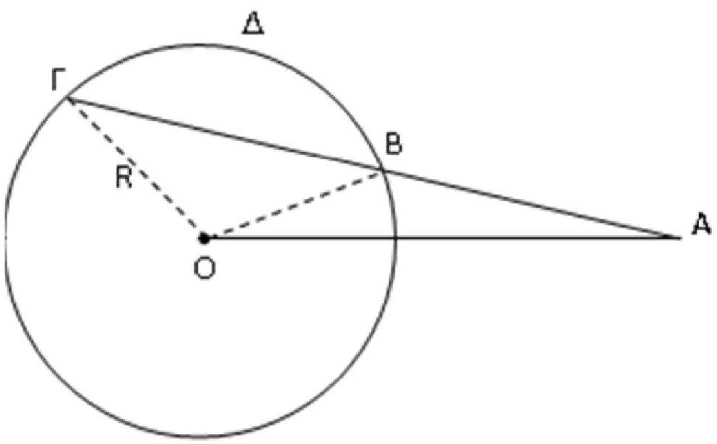
$$\Pi = BE + 4L + \Gamma Z = 20 + 24\pi + 20 = 40 + 24\pi$$

β) Αφού τα τέσσερα ημικύκλια είναι ίσα θα έχουν και ίσα εμβαδά. Οπότε το εμβαδό του σχήματος θα ισούται με το εμβαδό του ορθογωνίου $BEZ\Gamma$ με πλευρές 20 και 24. Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = (BEZ\Gamma) = 20 \cdot 24 = 480 \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

ΆΣΚΗΣΗ Β4 (22305)

Από σημείο Α εκτός κύκλου (O,R) φέρουμε τέμνουσα $AB\Gamma$ έτσι ώστε $AB = B\Gamma$. Αν $OA = R\sqrt{7}$ τότε:



α) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = \lambda_3 = R\sqrt{3}$.

Μονάδες 12

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ΓΔΒ.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε από το θεώρημα τεμνουσών:

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{AO}^2-\mathrm{R}^2 \Leftrightarrow \mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{A\Gamma}=\left(\mathrm{R}\sqrt{7}\right)^2-\mathrm{R}^2$$

$$\mathrm{B\Gamma}\cdot 2\mathrm{B\Gamma}=7\mathrm{R}^2-\mathrm{R}^2 \Leftrightarrow 2\mathrm{B\Gamma}^2=6\mathrm{R}^2 \Leftrightarrow \mathrm{B\Gamma}^2=3\mathrm{R}^2 \Leftrightarrow \mathrm{B\Gamma}=\sqrt{3}\cdot\mathrm{R}$$

άρα

$$\mathrm{B\Gamma}=\sqrt{3}\cdot\mathrm{R}=\lambda_3$$

β) Έστω ε το ζητούμενο εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ΓΔΒ:

$$\varepsilon=\left(\mathrm{O}\widehat{\Gamma\mathrm{B}}\right)-\left(\mathrm{O\Gamma B}\right)=\frac{\pi\mathrm{R}^2\cdot 120^\circ}{360^\circ}-\frac{\lambda_3\alpha_3}{2}=\frac{\pi\mathrm{R}^2}{3}-\frac{\mathrm{R}\sqrt{3}\,\frac{\mathrm{R}}{2}}{2}=\frac{\pi\mathrm{R}^2}{3}-\frac{\sqrt{3}\mathrm{R}^2}{4}$$
$$=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\mathrm{R}^2$$

οπότε $\varepsilon=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\mathrm{R}^2$ τ.μ.

Θέμα Δ

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (22299)

Δίνεται κύκλος (O,R) και σημείο Μ τέτοιο, ώστε η δύναμή του ως προς τον κύκλο (O,R) να είναι $3R^2$. Αν ΜΑ, ΜΒ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Μ προς τον κύκλο, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $MA = R\sqrt{3}$

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε ως συνάρτηση της ακτίνας R το εμβαδόν

i) του τετραπλεύρου ΟΑΜΒ

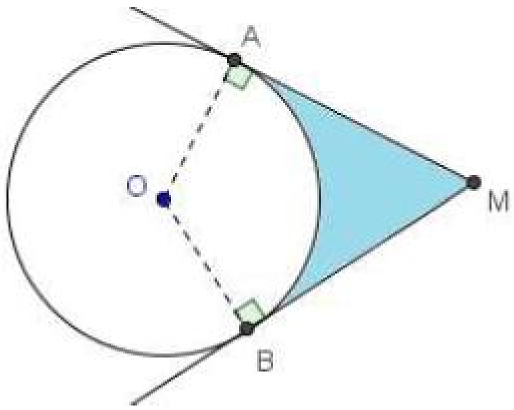
(Μονάδες 6)

ii) του (σκιασμένου) μικτόγραμμου τριγώνου ΑΜΒ

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $(OA\Gamma B) = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$, όπου Γ είναι το σημείο τομής του κύκλου με το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ.

(Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Η δύναμη του σημείου ως προς τον κύκλο (O,R) ισούται με

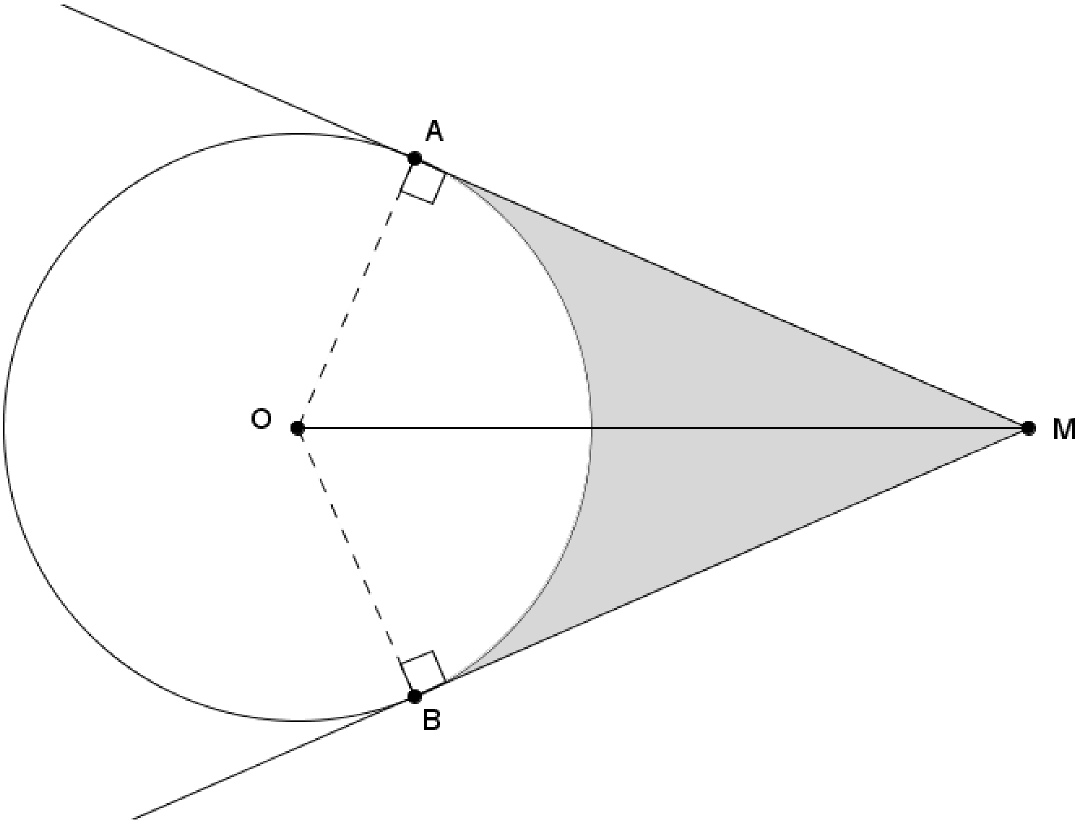
$$\Delta^{M}_{(O,R)} = \delta^2 - R^2 = MA^2 \Leftrightarrow MA^2 = 3R^2 \overset{MA>0}{\underset{R>0}{\Leftrightarrow}} MA = \sqrt{3}R$$

β) i) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ ($OB \perp MB$) είναι ίσα (§3.6) καθώς έχουν ίσες δύο ομόλογες πλευρές ίσες μία προς μία ($OA = OB = R$ και ΟΜ κοινή). Επομένως είναι και ισεμβαδικά (§10.2).

Έχουμε (§10.3):

$$\begin{aligned}(OAMB) &= (OAM)+(OBM)\\ &= 2(OAM)\\ &= \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot AM\cdot OA\\ &= R\sqrt{3}\cdot R\end{aligned}$$

$$\boxed{(\text{OAMB}) = R^2\sqrt{3}}$$



ii) Αρχικά, βρίσκουμε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα (§11.7) κέντρου Ο και ακτίνας R (που βρίσκεται εντός του τετραπλεύρου ΟΑΜΒ).

$$(\text{O}\widehat{\text{AB}}) = \frac{\pi R^2 \cdot 120^\circ}{360} = \frac{\pi R^2}{3},$$

αφού, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΜ (§5.9) είναι

$$\text{OA} = R = \frac{\text{OM}}{2} \Rightarrow \text{A}\widehat{\text{M}}\text{O} = 30^\circ \Rightarrow \text{A}\widehat{\text{O}}\text{M} = 60^\circ \Rightarrow \text{A}\widehat{\text{O}}\text{B} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{\text{AB}} = 120^\circ$$

Τότε, το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΜΒ είναι:

$$\boxed{(\text{AMB}_{\mu\iota\kappa\tau}) = (\text{OAMB}) - (\text{O}.\widehat{\text{AB}}) = R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{3} = R^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)}$$

γ) <u>1ος Τρόπος</u>

Τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΓ είναι ίσα καθώς έχουν:

1) $\text{OA} = \text{OB}\ (= R)$

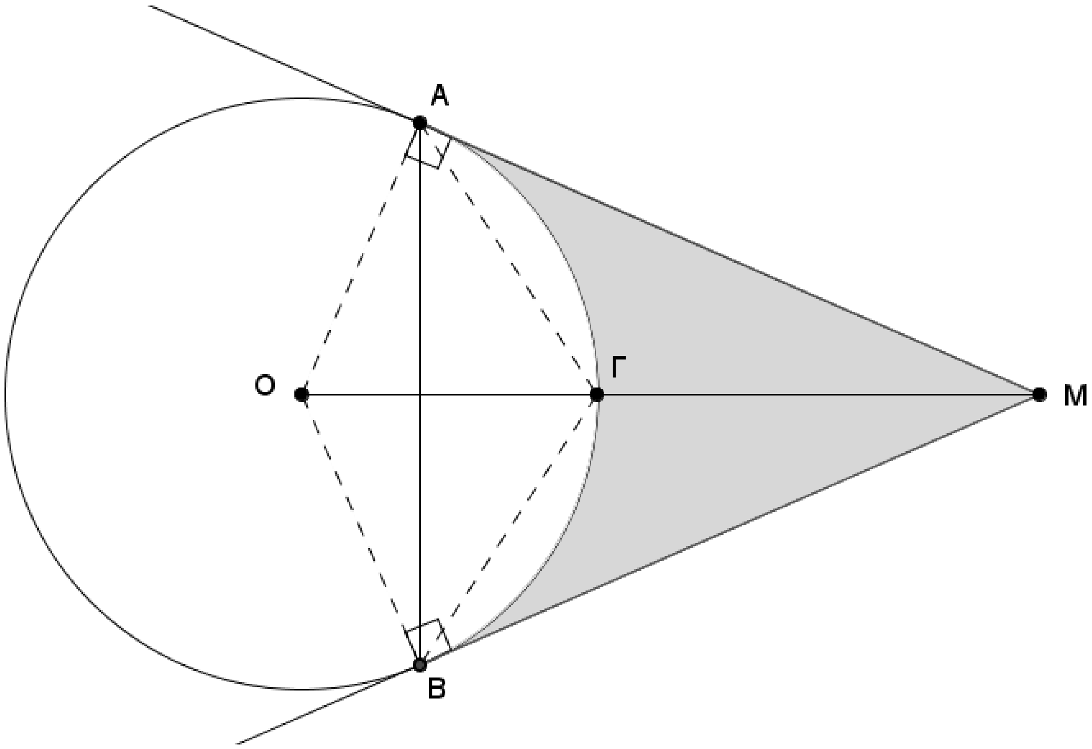
2) ΟΓ κοινή, και

3) $\text{A}\widehat{\text{M}}\text{O} = \text{B}\widehat{\text{M}}\text{O} = 30^\circ$, λόγω του κριτηρίου Πλευρά – Γωνία – Πλευρά (§3.2).

Άρα, θα είναι και $(\text{OA}\Gamma) = (\text{OB}\Gamma)$ (1) (§10.2).

Έτσι, έχουμε (§10.3):

$$\boxed{(\text{OA}\Gamma\text{B}) = (\text{OA}\Gamma) + (\text{OB}\Gamma) = 2\cdot(\text{OA}\Gamma) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\text{OA}\cdot\text{O}\Gamma\cdot\eta\mu\text{A}\widehat{\text{O}}\text{M} = R^2\cdot\eta\mu 60^\circ = R^2\frac{\sqrt{3}}{2}}$$



2ος Τρόπος

$A\widehat{M}B = 2 \cdot A\widehat{M}O = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ (2)

Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές ($MA = MB$) και μία γωνία του είναι 60°, άρα είναι ισόπλευρο, οπότε $AB = MA \overset{\alpha)}{=} R\sqrt{3}$ (3)

Επίσης, στο ισόπλευρο ΑΜΒ η ΜΚ (Κ σημείο τομής ΟΜ και ΑΒ) είναι διχοτόμος, επομένως θα είναι και ύψος. Άρα, $AB \perp OM$ (4)

Τότε το τετράπλευρο ΟΑΓΒ έχει κάθετες διαγώνιους (4), οπότε το εμβαδόν δίνεται από τον τύπο (§10.3)

$$\boxed{(OA\Gamma B) = \frac{1}{2} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot O\Gamma \overset{(3)}{=} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}R \cdot R = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (22303)

Δύο ίσοι κύκλοι (K, R), (Λ, R) τέμνονται στα σημεία Α, Β, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και έχουν διάκεντρο $K\Lambda = R\sqrt{3}$.

α) Να βρείτε τη γωνία $K\widehat{A}\Lambda$

(Μονάδες 7)

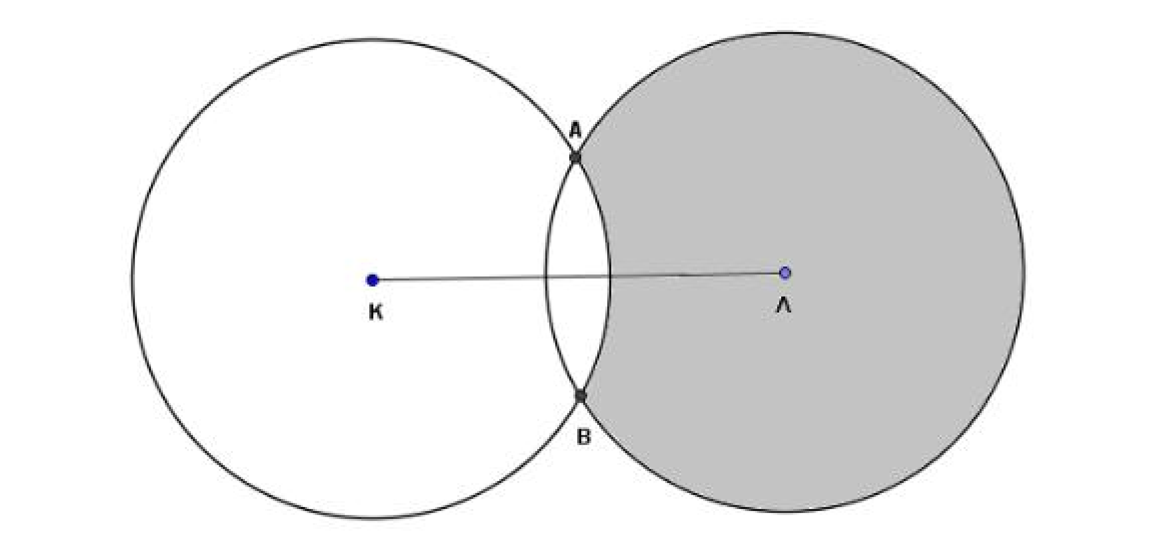
β) Να βρείτε ως συνάρτηση της ακτίνας R το εμβαδόν:

i) Του τετραπλεύρου ΑΚΒΛ.

(Μονάδες 10)

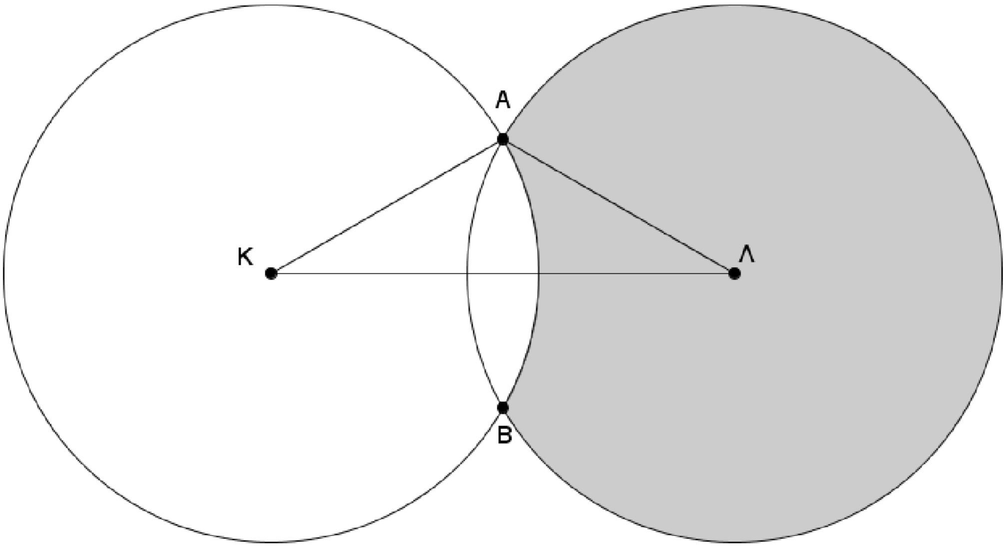
ii) Του σκιασμένου μηνίσκου.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) <u>1ος Τρόπος</u> Εφαρμόζουμε το νόμο των συνημιτόνων (§9.4) στο τρίγωνο ΑΚΛ:



$$\mathrm{K\Lambda}^2 = \mathrm{AK}^2 + \mathrm{A\Lambda}^2 - 2\cdot \mathrm{AK}\cdot \mathrm{A\Lambda}\cdot συν\mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3R^2 = R^2 + R^2 - 2\cdot R^2 \cdot συν\mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda$$

$$\Rightarrow R^2 = -2\cdot R^2 \cdot συν\mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda$$

$$\Rightarrow συν\mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow συν\mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda = -συν\frac{\pi}{3}$$

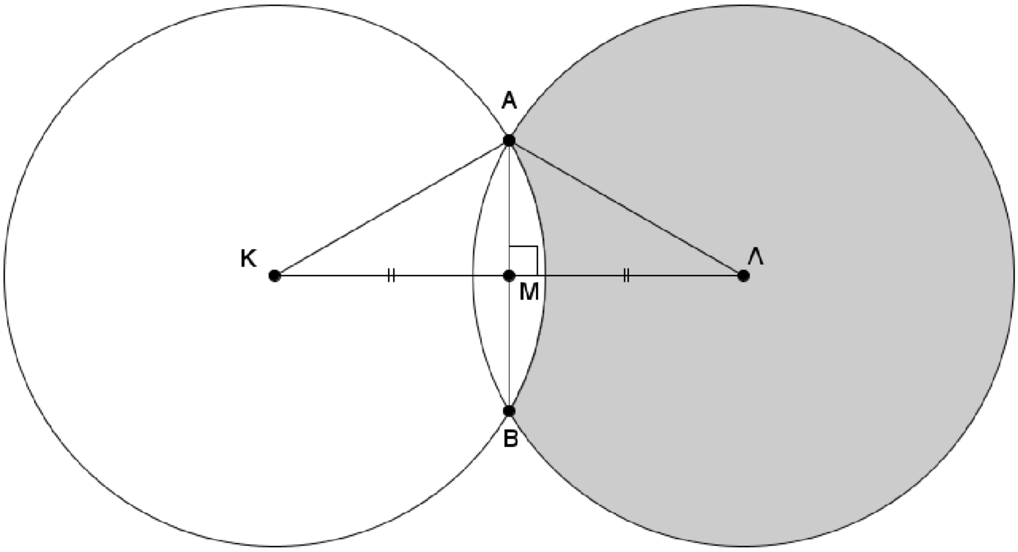
$$\Rightarrow συν\mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda = συν\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow συν\mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda = συν\frac{2\pi}{3}$$

$$\boxed{\overset{0<\mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda<\pi}{\Rightarrow} \mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda = \frac{2\pi}{3} \text{ ή } \mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda = 120^\circ}$$

<u>2ος Τρόπος</u>

Οι δύο κύκλοι (K,R), (Λ,R) είναι ίσοι, άρα η κοινή χορδή τους ΑΒ θα είναι μεσοκάθετος της διακέντρου ΚΛ (§3.16) με σημείο τομής έστω το Μ, οπότε Μ μέσο της ΚΛ (1) και $AB \perp K\Lambda$ (2)



Τότε, στο ορθογώνιο, λόγω (2), τρίγωνο ΑΚΜ είναι:

$$\eta\mu K\hat{A}M = \frac{KM}{AK} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu K\hat{A}M = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R}$$

$$\Rightarrow \eta\mu K\hat{A}M = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

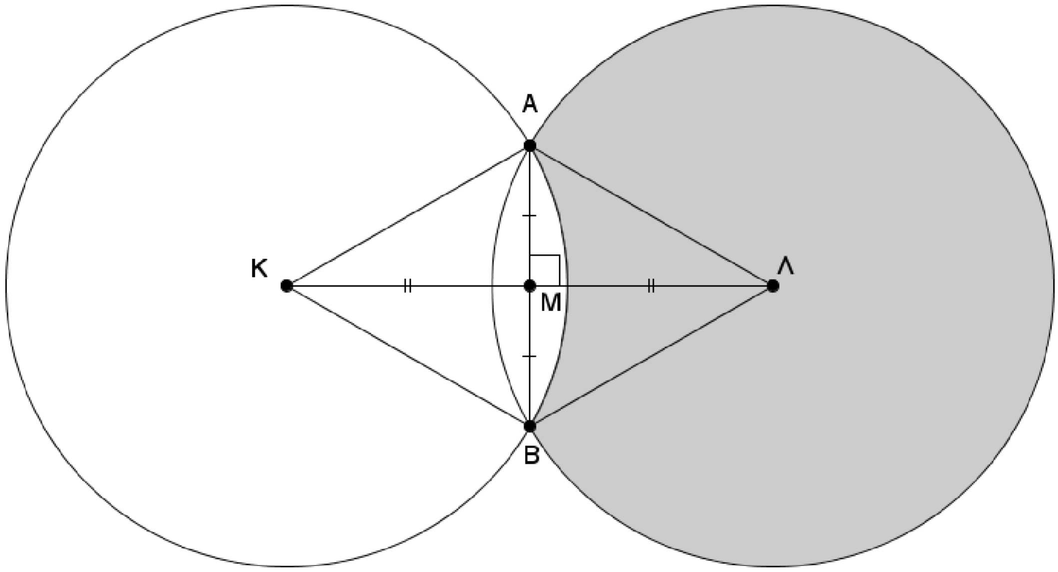
$$\Rightarrow \eta\mu K\hat{A}M = \eta\mu\frac{\pi}{3}$$

$$\overset{0<K\hat{A}M<\frac{\pi}{2}}{\Rightarrow} K\hat{A}M = \frac{\pi}{3} \ (3)$$

$$\boxed{\Rightarrow K\hat{A}\Lambda = \frac{2\pi}{3} \text{ ή } K\hat{A}\Lambda = 120^\circ}$$

β) i) 1ος <u>Τρόπος</u>

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΜ είναι $A\hat{K}M = 90^\circ - K\hat{A}M \overset{(3)}{=} 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ (4) οπότε η απέναντι από αυτήν κάθετη πλευρά θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας (§5.9), δηλαδή $AM = \frac{AK}{2} = \frac{R}{2}$ (5)



Επίσης, γνωρίζουμε ότι η διάκεντρος ΚΛ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής των δύο κύκλων (§3.16), οπότε Μ μέσο της ΑΒ (6), οπότε $AB = 2\cdot AM \overset{(5)}{=} 2\cdot\frac{R}{2} = R$ (7)

Τότε, το τετράπλευρο ΑΚΒΛ, που έχει κάθετες διαγώνιους (2), θα έχει εμβαδόν που δίνεται από τον τύπο (§10.3)

$$\boxed{(AKB\Lambda) = \frac{1}{2}\cdot\delta_1\cdot\delta_2 = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot K\Lambda \overset{(7)}{=} \frac{1}{2}\cdot R\cdot\sqrt{3}R = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}}$$

<u>2^{ος} Τρόπος</u> (για τον υπολογισμό του ΑΒ)

Το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές ($KA = KB = R$) και μία γωνία του, ($K\widehat{A}M$), είναι 60°, άρα είναι ισόπλευρο, οπότε $AB = KA = R$

<u>3^{ος} Τρόπος</u>

Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΒ είναι ίσα, καθώς έχουν:

1) $KA = \Lambda A\ (= R)$

2) $KB = \Lambda B\ (= R)$, και

3) ΟΓ κοινή, λόγω του κριτηρίου Πλευρά – Πλευρά – Πλευρά (§3.2).

Άρα, θα είναι και $(AKB) = (A\Lambda B)$ (§10.2).

Τότε, το τετράπλευρο ΑΚΒΛ θα έχει εμβαδόν (§10.1, §10.4)

$$\boxed{(AKB\Lambda) = (AKB) + (A\Lambda B) = 2\cdot(AKB) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot KA\cdot KB\cdot \eta\mu A\widehat{K}B \overset{(4)}{=} R^2\cdot\eta\mu 60^\circ = R^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}}$$

ii) Αρχικά, βρίσκουμε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα (§11.7) κέντρου Κ και ακτίνας R, που περιέχει την κοινή χορδή ΑΒ:

$$(K\widehat{AB}) \overset{(4)}{=} \frac{\pi R^2\cdot 60^\circ}{360} = \frac{\pi R^2}{6} \quad (8)$$

Τότε, το εμβαδόν ε του κυκλικού τμήματος (§11.7) που ορίζεται από τον κύκλο (K,R), την χορδή ΑΒ και την κυρτή γωνία $A\widehat{K}B$ είναι:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= (\mathrm{K}\widehat{\mathrm{AB}}) - (\mathrm{KAB}) \\
&\overset{(8)}{=} \frac{\pi R^2 \cdot 60^\circ}{360} - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{KA} \cdot \mathrm{KB} \cdot \eta\mu \mathrm{A}\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{B} \\
&\overset{(4)}{=} \frac{\pi R^2}{6} - \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \eta\mu 60^\circ \\
&= \frac{\pi R^2}{6} - \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (9) \\
&= \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \\
&= \frac{2\pi R^2 - 3R^2\sqrt{3}}{12}
\end{aligned}$$

Λόγω των ίσων κύκλων (K, R), (Λ, R) το κυκλικό τμήμα που ορίζεται από τον κύκλο (K, R), την χορδή ΑΒ και την κυρτή γωνία $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{B}$ είναι ίσο με το κυκλικό τμήμα που ορίζεται από τον κύκλο (Λ, R), την χορδή ΑΒ και την κυρτή γωνία $\mathrm{A}\widehat{\Lambda}\mathrm{B}$, άρα και ισοδύναμα (§10.2).

Τότε, το εμβαδόν $E_{\mu\eta\nu}$ του σκιασμένου μηνίσκου (§11.7) είναι:

$$\begin{aligned}
E_{\mu\eta\nu} &= E_{\text{κυκλικού δίσκου } (\Lambda, R)} - 2 \cdot \varepsilon \\
&= \pi R^2 - 2 \cdot \frac{2\pi R^2 - 3R^2\sqrt{3}}{12} \\
&= \pi R^2 - \frac{2\pi R^2 - 3R^2\sqrt{3}}{6} \\
&= \frac{6\pi R^2 - 2\pi R^2 + 3R^2\sqrt{3}}{6} \\
&= \frac{4\pi R^2 + 3R^2\sqrt{3}}{6}
\end{aligned}$$

άρα

$$\boxed{E_{\mu\eta\nu} = \frac{R^2\left(4\pi + 3\sqrt{3}\right)}{6}}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (22307)

Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ, ΑΔ και ΑΜ, όπου Μ το μέσο του ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\mathrm{AB\Gamma\Delta EZ}) = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

(Μονάδες 5)

β) $(\mathrm{AM\Delta}) = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

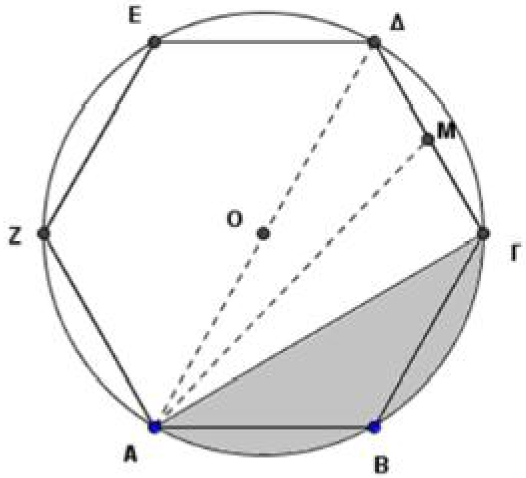
(Μονάδες 7)

γ) $(\text{ΑΜΔΕΖ}) = 2(\text{ΑΒΓΜ})$

(Μονάδες 5)

δ) Το εμβαδόν του (σκιασμένου) κυκλικού τμήματος που περικλείεται από τη χορδή ΑΓ και το τόξο ΑΒΓ είναι ίσο με: $\frac{R^2}{12}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Το ΑΒΓΔΕΖ, ως κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R), έχει εμβαδόν (§11.2, 11.3):

$$(\text{ΑΒΓΔΕΖ}) = E_6$$
$$= \frac{1}{2} \cdot P_6 \cdot \alpha_6$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \lambda_6 \cdot \alpha_6$$
$$= 3 \cdot R \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

άρα

$$\boxed{(\text{ΑΒΓΔΕΖ}) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}}$$

β) <u>1^{ος} Τρόπος</u>

Παρατηρούμε ότι Μ είναι το μέσο του ΓΔ. Επίσης το τρίγωνο ΟΔΓ είναι ισόπλευρο άρα ΔΓ=R .

Επομένως

$$(\text{ΑΜΔ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΓΔ}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΓ} \cdot \etaμ60^0 = \frac{1}{4} 2R \cdot R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

<u>2^{ος} Τρόπος</u>

Παρατηρούμε ότι Μ είναι το μέσο του ΓΔ, άρα, στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΓΔ ($\text{ΟΓ} = \text{ΟΔ}$) η διάμεσος ΟΜ θα είναι επιπλέον ύψος και διχοτόμος (§3.4). Οπότε, το ΟΜ θα είναι το απόστημα της χορδής ΓΔ και συνεπώς:

- $OM = \alpha_6$ (1)
- $M\hat{O}\Delta = \dfrac{\Gamma\hat{O}\Delta}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{\Gamma\Delta}}{2} = \dfrac{\frac{360^\circ}{6}}{2} = 30^\circ$ (2), καθώς η $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι επίκεντρη που βαίνει

στο τόξο ΓΔ (§2.19)

$$\begin{aligned}(AM\Delta) &= (OMA) + (OM\Delta)\\ &= \frac{1}{2}\cdot OM\cdot OA\cdot \eta\mu M\hat{O}A + \frac{1}{2}\cdot OM\cdot O\Delta\cdot \eta\mu M\hat{O}\Delta\\ &\overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\cdot \alpha_6\cdot R\cdot \eta\mu M\hat{O}A + \frac{1}{2}\cdot \alpha_6\cdot R\cdot \eta\mu M\hat{O}\Delta\\ &\overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\cdot \alpha_6\cdot R\cdot\left(\eta\mu 150^\circ + \eta\mu 30^\circ\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot R\cdot 2\cdot \eta\mu 30^\circ\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot R\cdot \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\end{aligned}$$

άρα

$$\boxed{(AM\Delta) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}}$$

<u>3ος Τρόπος</u>

Είναι $\overset{\frown}{AB\Gamma\Delta} = \frac{3}{6}\cdot \overset{\frown}{AB\Gamma\Delta EZA} = \frac{1}{2}\cdot 360^\circ = 180^\circ$ και συνεπώς ΑΔ είναι διάμετρος (3), ενώ $\overset{\frown}{AB\Gamma} = \frac{2}{6}\cdot \overset{\frown}{AB\Gamma\Delta EZA} = \frac{1}{3}\cdot 360^\circ = 120^\circ$ άρα $A\hat{\Delta}\Gamma = 120^\circ$ (4). Οπότε:

$$\begin{aligned}(AM\Delta) &= \frac{1}{2}\cdot \Delta A\cdot \Delta M\cdot \eta\mu A\hat{\Delta}M \text{ (§10.3)}\\ &\overset{(3)}{=} \frac{1}{\cancel{2}}\cdot \cancel{2}R\cdot\frac{\Gamma\Delta}{2}\cdot \eta\mu A\hat{\Delta}\Gamma\\ &\overset{(4)}{=} R\cdot\frac{\lambda_6}{2}\cdot \eta\mu 120^\circ \text{ (§11.3)}\\ &= R\cdot\frac{R}{2}\cdot \eta\mu 60^\circ\\ &= \frac{R^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

άρα

$$\boxed{(AM\Delta) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}}$$

γ) Είναι

$$\begin{aligned}(\text{ΑΜΔΕΖ}) &= (\text{ΑΔΜ}) + (\text{ΑΔΕΖ})\\ &\overset{\beta),(3)}{=} \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{(\text{ΑΒΓΔΕΖ})}{2}\\ &\overset{\alpha)}{=} \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

άρα

$$(\text{ΑΜΔΕΖ}) = R^2\sqrt{3} \quad (5)$$

Επίσης, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}(\text{ΑΒΓΜ}) &= (\text{ΑΒΓΔ}) - (\text{ΑΔΜ})\\ &\overset{\beta),(3)}{=} \frac{(\text{ΑΒΓΔΕΖ})}{2} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\\ &\overset{\alpha)}{=} \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

άρα

$$(\text{ΑΒΓΜ}) = \frac{R^2\sqrt{3}}{2} \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) προκύπτει ότι:

$$\boxed{(\text{ΑΜΔΕΖ}) = 2\cdot(\text{ΑΒΓΜ})}$$

δ) Αρχικά, βρίσκουμε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα (§11.7) κέντρου Ο και ακτίνας R, που περιέχει την κυρτή γωνία $\text{Α}\hat{\text{Ο}}\text{Γ}$

$$(\text{Ο}\overset{\frown}{\text{ΑΒΓ}}) \overset{(4)}{=} \frac{\pi R^2\cdot 120^\circ}{360} = \frac{\pi R^2}{3} \quad (7)$$

Τότε, το εμβαδόν ε του (σκιασμένου) κυκλικού τμήματος (§11.7) που ορίζεται από τον κύκλο $(\text{Ο},R)$, την χορδή ΑΓ και την κυρτή γωνία $\text{Α}\hat{\text{Ο}}\text{Γ}$ είναι:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= (\text{Ο}\overset{\frown}{\text{ΑΒΓ}}) - (\text{ΟΑΓ})\\ &\overset{(7)}{=} \frac{\pi R^2}{3} - \frac{1}{2}\cdot \text{ΟΑ}\cdot\text{ΟΓ}\cdot \eta\mu\text{Α}\hat{\text{Ο}}\text{Γ}\\ &\overset{(4)}{=} \frac{\pi R^2}{3} - \frac{1}{2}\cdot R^2\cdot \eta\mu 120^\circ\\ &= \frac{\pi R^2}{3} - \frac{1}{2}\cdot R^2\cdot \eta\mu 60^\circ \qquad (9)\\ &= \frac{\pi R^2}{3} - \frac{1}{2}\cdot R^2\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\\ &= \frac{4\pi R^2 - 3R^2\sqrt{3}}{12}\end{aligned}$$

άρα

$$\boxed{\varepsilon = \frac{R^2}{12}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (22315)

Δίνεται κύκλος (O, R) διαμέτρου ΑΒ και ημιευθεία Αx τέτοια, ώστε η γωνία $B\hat{A}x$ να είναι 30^0. Η Αx τέμνει τον κύκλο στο σημείο Γ. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β, η οποία τέμνει την Αx στο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = R$

Μονάδες 5

β) $\dfrac{(PB\Gamma)}{(PAB)} = \dfrac{1}{4}$

Μονάδες 8

γ) $PB = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$

Μονάδες 6

δ) Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία $B\hat{O}\Gamma$ είναι:

$E = \dfrac{R^2\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)}{12}$

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

α) Είναι $A\hat{\Gamma}B = 90°$ γιατί είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο, δηλαδή το τρίγωνο ΑΓΒ είναι ορθογώνιο κι αφού $A\hat{\Gamma}O = 30°$ είναι $B\Gamma = \dfrac{AB}{2} = R$

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $BP\Gamma, PAB$ είναι όμοια, γιατί έχουν και τη $B\hat{P}\Gamma$ κοινή γωνία, με λόγο ομοιότητας

$$\lambda = \frac{B\Gamma}{AB} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{(PB\Gamma)}{(PAB)} = \lambda^2 = \frac{1}{4}$$

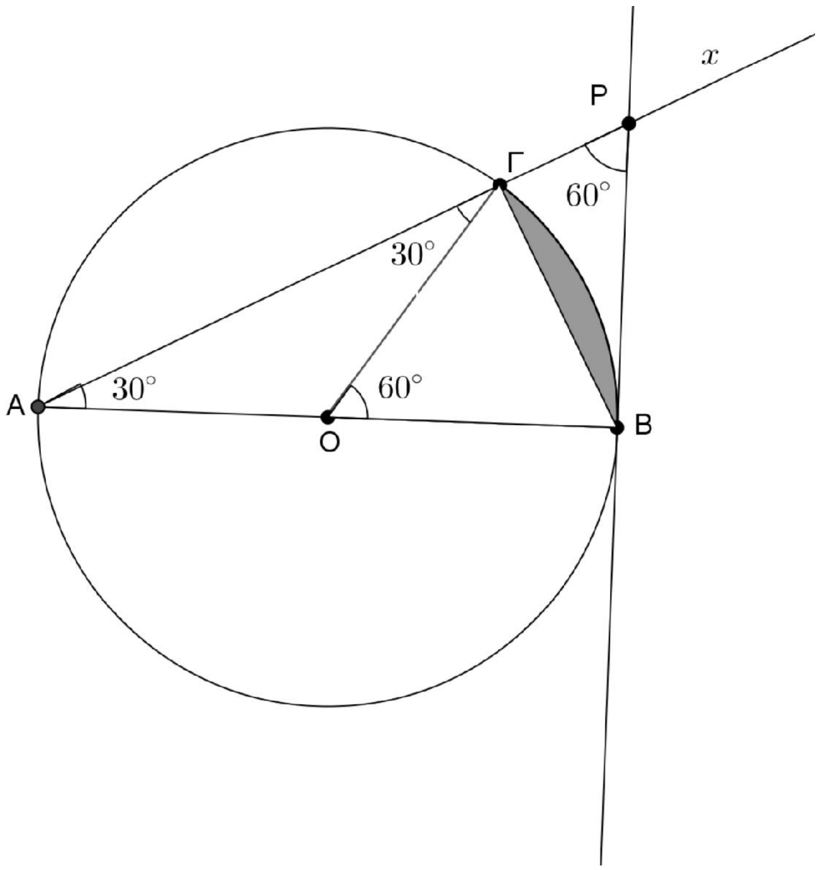
γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΡΑΒ, είναι $B\hat{A}P = 30^0$, άρα $BP = \dfrac{AP}{2}$ ή $AP = 2BP$, οπότε από Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$AP^2 = PB^2 + AB^2 \Rightarrow 4PB^2 = PB^2 + AB^2 \Rightarrow 3PB^2 = 4R^2$$

$$\text{άρα} \quad PB = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

δ) Είναι $B\hat{O}\Gamma = 60°$ ως εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΓ. Άρα το ισοσκελές τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο. Αν τ το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΒΟΓ τότε:

$$E = \tau - (OB\Gamma) = \frac{\pi R^2 60°}{360°} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)}{12}$$



ΑΣΚΗΣΗ Δ5 (22322)

Δίνεται κύκλος (O,R) και μία διάμετρός του ΒΓ. Η κάθετος στο μέσο Ε της ακτίνας ΟΒ τέμνει το ένα ημικύκλιο στο σημείο Α και η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β τέμνει την προέκταση της χορδής ΑΓ στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΑΓ = λ_3 = R\sqrt{3}$

Μονάδες 8

ii. $ΑΔ = \dfrac{ΑΓ}{3}$

Μονάδες 8

β) Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών: $\dfrac{(ΔΑΒ)}{(ΔΒΓ)}$

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) i) Επειδή ΑΕ μεσοκάθετος του ΒΟ είναι ΑΒ = ΑΟ = R, άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (γωνία $\hat{A} = 90°$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο) ισχύει $ΑΒ = \dfrac{ΒΓ}{2}$, οπότε $\hat{Γ} = 30°$, επομένως $\hat{B} = 60°$ κι αφού είναι εγγεγραμμένη το αντίστοιχο τόξο $\overset{\frown}{ΑΓ}$ είναι $120°$. Άρα $ΑΓ = λ_3 = R\sqrt{3}$.

ii) Είναι $A\hat{B}\Delta = \hat{\Gamma} = 30°$ γιατί η γωνία που σχηματίζεται από χορδή και εφαπτομένη ισούται με την αντίστοιχη εγγεγραμμένη γωνία. Άρα από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $A\Delta = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow B\Delta = 2A\Delta$. Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ και έχουμε, $AB^2 + A\Delta^2 = B\Delta^2 \Leftrightarrow R^2 + A\Delta^2 = 4A\Delta^2 \Leftrightarrow 3A\Delta^2 = R^2$ άρα

$$A\Delta = \frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{A\Gamma}{3}$$

β) Είναι ΔΓ = ΑΔ + ΑΓ = ΑΔ + 3ΑΔ = 4ΑΔ. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΔΒΓ έχουν κοινή τη γωνία $\hat{\Delta}$ έχουμε:

$$\frac{(\Delta AB)}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{\Delta A \cdot \cancel{\Delta B}}{\Delta\Gamma \cdot \cancel{\Delta B}} = \frac{\Delta A}{4\Delta A} = \frac{1}{4}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Προσοχή: Στο σχήμα της άσκησης που δίνεται, είναι γραμμοσκιασμένο το μικτόγραμμου τρίγωνο ΑΔΒ ενώ δεν ζητείται να υπολογιστεί. Ίσως λοιπόν αντί τον υπολογισμό του λόγου $\frac{(\Delta AB)}{(\Delta B\Gamma)}$ ο θεματοδότης να εννοεί τον υπολογισμό του λόγου του εμβαδού του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΔΒ προς το εμβαδό του ΔΒΓ. Στην περίπτωση αυτή έχουμε,

$$(\Delta AB)_{\mu\varepsilon\iota\kappa\tau} = (\Delta AB) - \text{εμβαδόν κυκλικού τμήματος χορδής } AB, \text{ όπου}$$

$$(\Delta AB) = \frac{A\Delta \cdot AB}{2} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{3} \cdot R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{6}$$

και

$$(\Delta B\Gamma) = \frac{B\Gamma \cdot B\Delta}{2} = \frac{2R \cdot \frac{2R\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$$

Ακόμα επειδή $\hat{B} = 60°$ το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΟ είναι ισόπλευρο, άρα και $A\hat{O}B = 60°$, τότε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος χορδής ΑΒ είναι

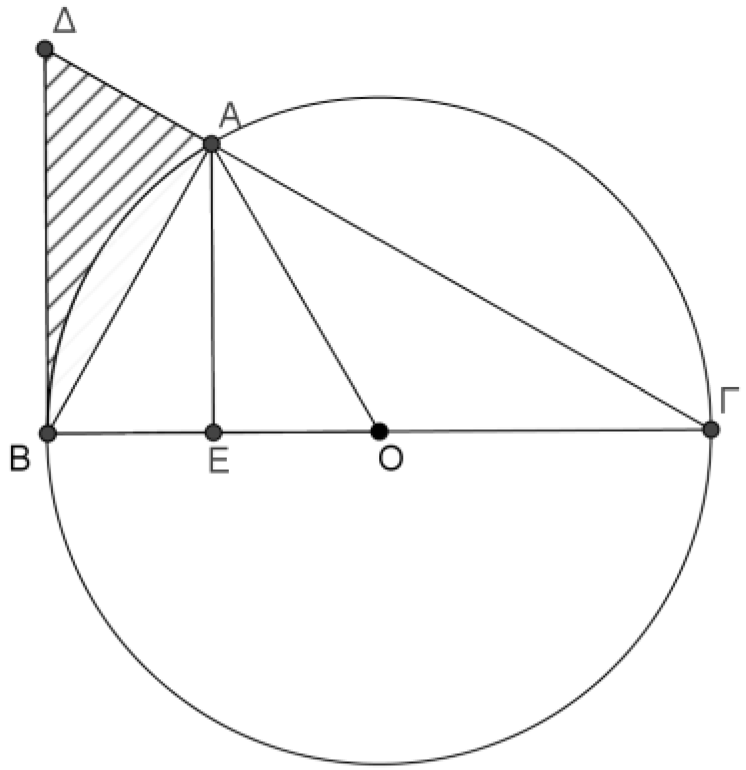
$$\left[\left(O.\overset{\frown}{AB}\right) - \left(\underset{\iota\sigma o\pi\lambda}{ABO}\right)\right] = \frac{\pi R^2 60°}{360°} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

Άρα

$$(\Delta AB)_{\mu\varepsilon\iota\kappa\tau} = \frac{R^2\sqrt{3}}{6} - \left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{R^2(5\sqrt{3} - 2\pi)}{12}$$

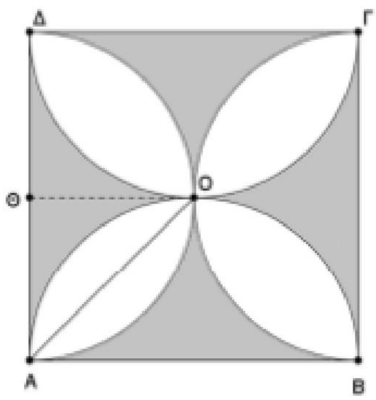
Τελικά,

$$\frac{(\Delta AB)_{\mu\varepsilon\iota\kappa\tau.}}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{\frac{\cancel{R^2}(5\sqrt{3} - 2\pi)}{12}}{\frac{2\cancel{R^2}\sqrt{3}}{3}} = \frac{15 - 2\pi\sqrt{3}}{24}$$



ΑΣΚΗΣΗ Δ6 (22325)

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 10, κατασκευάζουμε ημικύκλια με διαμέτρους τις πλευρές του τετραγώνου που βρίσκονται στο εσωτερικό του και έχουν κοινό σημείο το κέντρο Ο του τετραγώνου.



α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα που περιέχεται στην επίκεντρη γωνία $A\hat{\Theta}O$, όπου Θ το μέσο της πλευράς ΑΔ.

Μονάδες 5

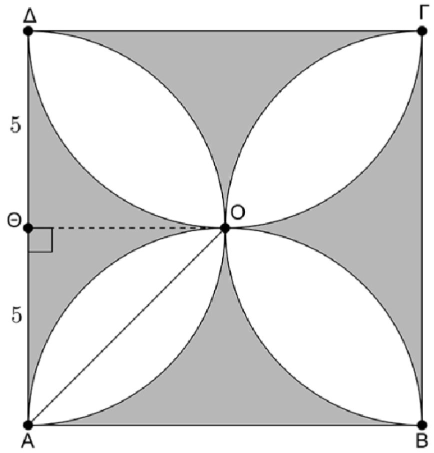
β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην επίκεντρη γωνία $A\hat{\Theta}O$ είναι $\frac{25}{4}(\pi-2)$.

Μονάδες 10

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του τετραγώνου, είναι 50 (4 – π).

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ



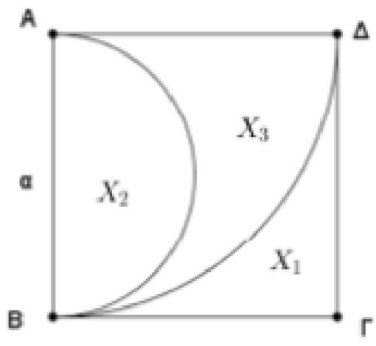
α) $\left(\widehat{\Theta A O}\right) = \dfrac{\pi \cdot \Theta A^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \dfrac{25\pi}{4}$

β) $\varepsilon = \widehat{\Theta A O} - (\Theta A O) = \dfrac{25\pi}{4} - \dfrac{25}{2} = \dfrac{25\pi}{4} - \dfrac{50}{4} = \dfrac{25}{4}(\pi - 2)$

γ) $E_{\gamma\rho\alpha\mu} = (AB\Gamma\Delta) - 8\varepsilon = 10^2 - 8 \cdot \dfrac{25}{4}(\pi - 2) = 100 - 50\pi + 100 = 50(4 - \pi)$

ΑΣΚΗΣΗ Δ7 (22326)

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α, γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο Α και ακτίνα α.



α) Αν X_1 είναι το χωρίο του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του τεταρτοκύκλιου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του είναι:

$$(X_1) = \frac{\alpha^2}{4}(4 - \pi)$$

Μονάδες 5

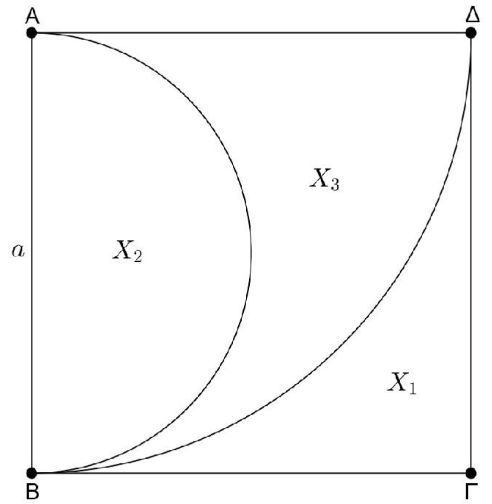
β) Με διάμετρο ΑΒ κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου. Αν X_2 είναι το χωρίο του ημικυκλίου και X_3 το χωρίο του τεταρτοκυκλίου που βρίσκεται εξωτερικά του ημικυκλίου, να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο χωρίων X_2 και X_3.

Μονάδες 11

γ) Ποιο από τα χωρία X_1 και X_2 έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ



α) Είναι,

$$(X_1)=(ΑΒΓΔ)-(Α\overset{\frown}{Β}Δ)=α^2-\frac{πα^2}{4}=\frac{4α^2}{4}-\frac{πα^2}{4}=\frac{α^2}{4}(4-π)$$

β) Είναι,

$$(X_2)=\frac{1}{2}π\left(\frac{α}{2}\right)^2=\frac{πα^2}{8}$$

και

$$(X_3)=(Α\overset{\frown}{Β}Δ)-(X_2)=\frac{πα^2}{4}-\frac{πα^2}{8}=\frac{2πα^2}{8}-\frac{πα^2}{8}=\frac{πα^2}{8}=(X_2)$$

γ) Είναι,

$$3π>8 \Leftrightarrow 2π+π>8 \Leftrightarrow π>8-2π \Leftrightarrow \frac{πα^2}{8}>\frac{α^2(8-2π)}{8}=\frac{α^2}{4}(4-π) \Leftrightarrow X_2>X_1$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ8 (22329)

Δύο ίσοι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,R) τέμνονται στα σημεία Α και Β έτσι ώστε το μήκος της διακέντρου τους να είναι $ΚΛ=R\sqrt{2}$

α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΑΛΒ είναι τετράγωνο.

Μονάδες 10

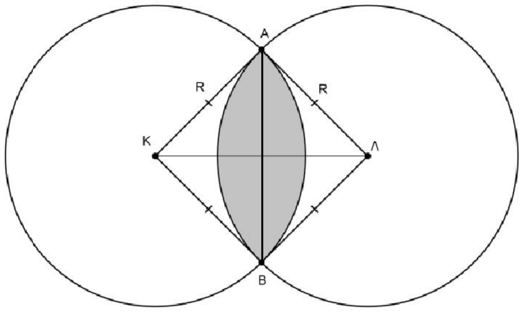
β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του κοινού χωρίου των δύο κύκλων.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Είναι ΚΑ=ΚΒ=ΛΑ=ΛΒ=R άρα το τετράπλευρο ΚΑΛΒ έχει όλες τις πλευρές του ίσες και επομένως είναι ρόμβος. Στο τρίγωνο ΚΑΛ είναι ΚΑ=ΛΑ=R και $ΚΛ=R\sqrt{2}$.
Ισχύει

$$ΚΛ^2=2R^2 \quad \text{και} \quad ΚΑ^2+ΛΑ^2=R^2+R^2=2R^2$$

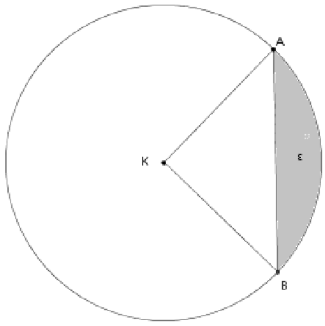


άρα

$$K\Lambda^2 = KA^2 + \Lambda A^2 \Leftrightarrow \widehat{A} = 90^o$$

Οπότε το τετράπλευρο ΚΑΛΒ είναι ρόμβος με $\widehat{A} = 90^o$ δηλαδή τετράγωνο.

β)



Το ζητούμενο εμβαδό είναι δύο φορές το εμβαδό του κυκλικού τμήματος ε. Είναι,

$$\varepsilon = (K\widehat{AB}) - (K\overset{\Delta}{A}B) = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R \cdot R}{2} = \frac{\pi R^2 - 2R^2}{4} = \frac{(\pi - 2)R^2}{4}$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = 2\varepsilon = \frac{(\pi - 2)R^2}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ9 (22332)

Σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας R=6cm εγγράφουμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και στο τετράγωνο εγγράφουμε νέο κύκλο.

α) Να υπολογίσετε:

i) Το εμβαδό του τετραγώνου.

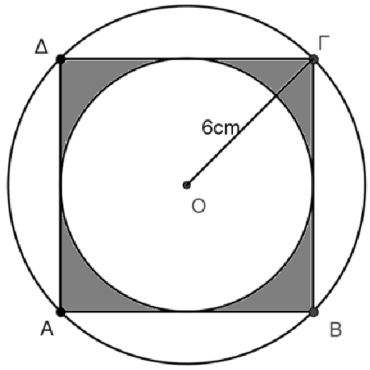
Μονάδες 7

ii) Το εμβαδό Ε του γραμμοσκιασμένου χωρίου, δηλαδή του χωρίου του τετραγώνου ΑΒΓΔ που βρίσκεται έξω από τον εγγεγραμμένο κύκλο του.

Μονάδες 9

β) Να συγκρίνετε το εμβαδόν Ε του γραμμοσκιασμένου χωρίου με το εμβαδόν του τμήματος του κύκλου ακτίνας R που βρίσκεται έξω από τον το τετράγωνο ΑΒΓΔ.

Μονάδες 9



ΛΥΣΗ

α) i) Η πλευρά του τετραγώνου είναι $\lambda_4 = R\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. Άρα το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι

$$(AB\Gamma\Delta) = \lambda_4^2 = (6\sqrt{2})^2 = 72cm^2$$

ii) Για το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν Ε έχουμε:

$$E=(AB\Gamma\Delta) - E_{\text{κύκλου }(O,\rho)}$$

Η ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου είναι ίση με το απόστημα α_4 του τετραγώνου. Δηλαδή

$$\rho = \alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

άρα

$$E = 72cm^2 - \pi\rho^2 = 72cm^2 - 18\pi\ cm^2 = 18(4-\pi)\ cm^2$$

β) Το εμβαδό E_1 που βρίσκεται έξω από το τετράγωνο είναι,

$$E_1 = E_{(O,R)} - (AB\Gamma\Delta) = \pi R^2 - 72\ cm^2 = 36\pi - 72cm^2 = 36(\pi-2)\ cm^2$$

Για π = 3,14 είναι Ε=15,48 cm^2 και E_1=41,04 cm^2 οπότε προφανώς $E < E_1$.

Β΄ τρόπος

Είναι,

$$E - E_1 = 18(4-\pi) - 36(\pi-2) = 72 - 18\pi - 36\pi + 72 = 144 - 54\pi < 0 \Leftrightarrow E - E_1 < 0 \Leftrightarrow E < E_1$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ10 (22333)

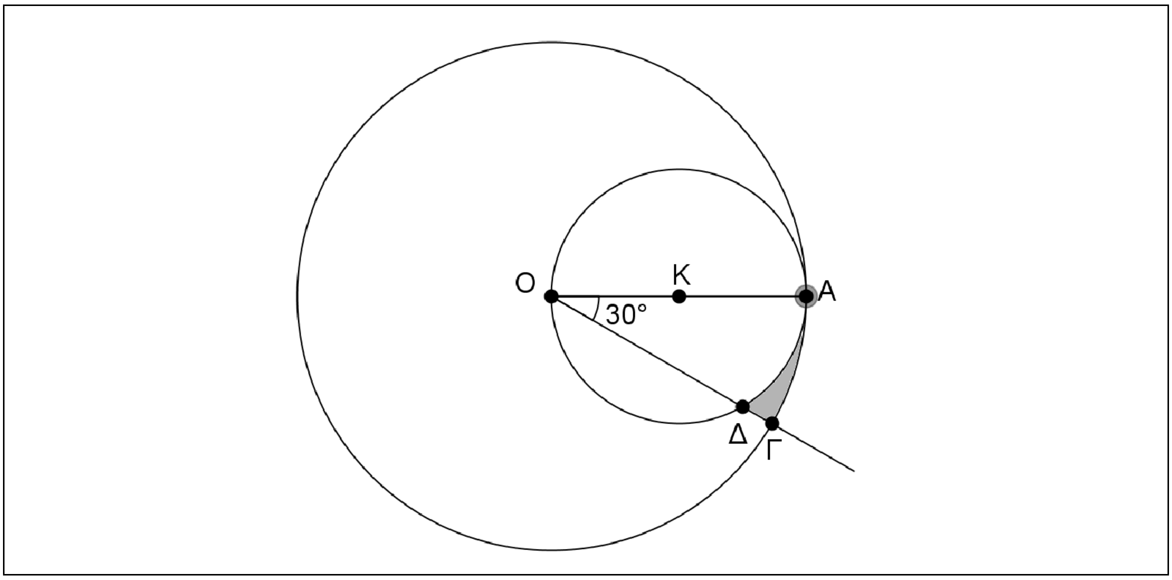
Με διάμετρο την ακτίνα ΟΑ ενός κύκλου (O, R) γράφουμε κύκλο (Κ) και από το Ο φέρουμε ημιευθεία που σχηματίζει με την ακτίνα ΟΑ γωνία 30° και τέμνει τον κύκλο (O) στο Γ και τον κύκλο (Κ) στο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τόξα ΑΓ και ΑΔ έχουν ίσα μήκη.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου (O, R) την περίμετρο του μικτόγραμμου (σκιασμένου) τριγώνου ΑΔΓ

(Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α) Από τον κύκλο (O, R) έχουμε,

$$\ell_{A\Gamma} = \frac{\pi \cdot R \cdot \mu}{180^0} = \frac{\pi \cdot R \cdot 30^0}{180^0} = \frac{\pi \cdot R}{6}$$

από τον κύκλο (K, ρ), όπου $\rho = AK = \dfrac{R}{2}$, έχουμε,

$$\ell_{A\Delta} = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \mu}{180^0} = \frac{\pi \cdot \frac{R}{2} \cdot 60^0}{180^0} = \frac{\pi \cdot R}{6} = \ell_{A\Gamma}$$

β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΔΑ έχουμε $\Delta\hat{O}A = 30^0$, άρα

$$A\Delta = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$$

Από Πυθαγόρειο θεώρημα στο $O\overset{\triangle}{\Delta}A$ έχουμε,

$$OA^2 = O\Delta^2 + A\Delta^2 \Rightarrow R^2 = O\Delta^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 \Rightarrow O\Delta^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} \Rightarrow O\Delta = \frac{\sqrt{3} \cdot R}{2}$$

άρα η περίμετρος του μικτόγραμμου (σκιασμένου) τριγώνου ΑΔΓ είναι,

$$\ell_{A\Gamma} + \ell_{A\Delta} + \Gamma\Delta = 2\ell_{A\Delta} + O\Gamma - O\Delta$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi \cdot R}{6} + R - \frac{\sqrt{3} \cdot R}{2}$$

$$= \frac{\pi \cdot R}{3} + R\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= R\left(\frac{\pi}{3} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$