

Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

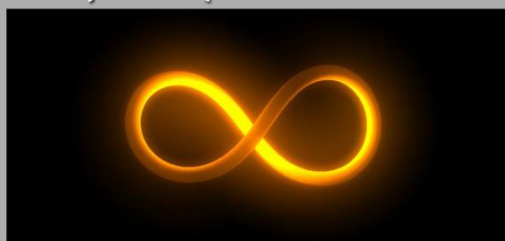
Τράπεζα

lisari team



Θεμάτων

Εκφωνήσεις-Λύσεις



η καλύτερη ομάδα λόγω team_ής

(Έκδοση: 01 – 03 – 2015)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς
των συνεργατών του δικτυακού τόπου

<http://lisari.blogspot.gr>

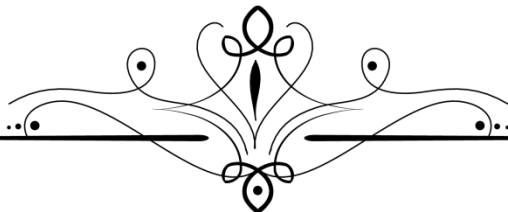
4η έκδοση: 01 – 03 – 2015 (συνεχής ανανέωση)

Το βιβλίο διατίθεται **αποκλειστικά**
από το μαθηματικό blog

<http://lisari.blogspot.gr>

Περιεχόμενα

	Σελίδες
• Πρόλογος:	3
• Η ομάδα εργασιών	5
• Κεφάλαιο 1ο: Διανύσματα	7
• Κεφάλαιο 2ο: Ευθεία	40
• Κεφάλαιο 3ο: Κωνικές τομές	110



Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο δίνονται όλες οι ασκήσεις της **Τράπεζας Θεμάτων** που αφορούν στα **Μαθηματικά Προσανατολισμού της Β΄ Λυκείου** μαζί με τις λύσεις τους. Η παρουσίαση των λύσεων είναι κατά το δυνατόν αναλυτική έτσι, ώστε το αρχείο να μπορεί να διαβαστεί και να μελετηθεί εύκολα από τους μαθητές. Σε αρκετές περιπτώσεις οι λύσεις συνοδεύονται με αναφορές σε παρόμοιες ασκήσεις του σχολικού βιβλίου ή της τράπεζας θεμάτων καθώς και με κάποια στοιχεία θεωρίας ή ακόμα και μεθοδολογίας.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε από μια **διαδικτυακή** (και όχι μόνο) **ομάδα μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος. Η ομάδα συγκροτήθηκε από τους μαθηματικούς που ανταποκρίθηκαν στο κάλεσμα που απεύθυνε μέσα από το blog <http://lisari.blogspot.gr> ο ακούραστος **Μάκης Χατζόπουλος**. Εργάστηκε με μεράκι, κάτω από πίεση χρόνου, για να προσφέρει στην εκπαιδευτική κοινότητα, μαθητές και καθηγητές, το συγκεκριμένο υλικό.

Επιθυμία όλων μας είναι να συμβάλλουμε, έστω και ελάχιστα, στην **βελτίωση της διδασκαλίας** των μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, μέσα από την παροχή υποστηρικτικού υλικού στην ελληνική εκπαιδευτική κοινότητα.

Μετά την αρχική συγγραφή των λύσεων έγιναν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις για την όσο το δυνατό **ποιοτικότερη παρουσίαση**. Ζητούμε συγγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες οι οποίες ενδεχομένως θα έχουν διαλάβει της προσοχής μας, κάτι αναπόδραστο στην εκπόνηση μιας εργασίας τέτοιας έκτασης σε τόσο στενά περιθώρια χρόνου. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου το υλικό θα βελτιωθεί. Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

Η ομάδα του lisari

30 – 11 – 2014

lisari team

Αντωνόπουλος Νίκος (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου Κατεύθυνση - Άργος)
Αυγερινός Βασίλης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου ΔΙΑΤΑΞΗ - Ν. Σμύρνη και Νίκαια)
Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο ΒΕΛΛΑΩΡΑΣ - Λιβαδειά Βοιωτίας)
Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο Ευθύνη - Ρέθυμνο)
Γιαννόπουλος Μιχάλης (Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)
Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο Αστρολάβος - Άρτα)
Δούδης Δημήτρης (3^ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)
Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια Πουκαμισάς Γλυφάδας)
Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο Ώθηση - Αργυρούπολη)
Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο Παπαπαναγιώτου – Παπαπαύλου - Σέρρες)
Κανάβης Χρήστος (Διδακτορικό στο ΕΜΠ – 2ο ΣΔΕ φυλακών Κορυδαλλού)
Καρδαμίτσης Σπύρος (Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων)
Κοπάδης Θανάσης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίων 19+ - Πολύγωνο)
Κουλούρης Αντρέας (3^ο Λύκειο Γαλατσίου)
Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο Στόχος - Περιστέρη)
Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο Ρηγάκης - Κοζάνη)
Μαρούγκας Χρήστος (3^ο ΓΕΛ Κηφισιάς)
Νάννος Μιχάλης (1^ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)
Νικολόπουλος Θανάσης (Λύκειο Κατασταρίου, Ζάκυνθος)
Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο Φάσμα - Αγρίνιο)
Παντούλας Περικλής (Φροντιστήρια Γούλα-Δημολένη - Ιωάννινα)
Παπαδομανωλάκη Μαρία (Ιδιοκτήτρια Πρότυπου Κέντρου Μάθησης ΔΙΑΚΡΙΣΙΣ - Ρέθυμνο)
Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός Ρόμβος)
Πορίχης Λευτέρης (Γυμνάσιο Λιθακιάς – Ζάκυνθος)
Ράπτης Γιώργος (6^ο ΓΕΛ Βόλου)
Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο Μπαχαράκης - Θεσσαλονίκη)
Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1^ο Λύκειο Χαλκίδας)
Σπλήνης Νίκος (Φροντιστήριο ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ - Ηράκλειο Κρήτης)
Σπυριδάκης Αντώνης (Γυμνάσιο Βιάννου - Λασιθί)
Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)
Σταυρόπουλος Σταύρος (Γραμματέας Ε.Μ.Ε Κορινθίας - Γυμνάσιο Α.Τ. Λέχαιου Κορινθίας)
Τηλέγραφος Κώστας (Φροντιστήριο Θεμέλιο - Αλεξανδρούπολη)
Τρύφων Παύλος (1^ο Εσπερινό ΕΠΑΛ Περιστερίου)
Φιλίππιδης Χαράλαμπος (Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί)
Χαραλάμπους Σταύρος (Μουσικό Σχολείο Λαμίας)
Χατζόπουλος Μάκης (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων)

Τράπεζα Θεμάτων

Μαθηματικά Προσανατολισμού

Β' τάξης



Λύτες

Νίκος Αντωνόπουλος
Σήφης Βοσκάκης
Γιάννης Ζαμπέλης
Γιάννης Κάκανος
Χρήστος Κανάβης
Χρήστος Κουστέρης
Ανδρέας Μανώλης
Θανάσης Νικολόπουλος
Μαρία Παπαδομανωλάκη
Δημήτρης Παπαμικρούλης
Γιώργος Ράπτης
Χρήστος Σίσκας
Νίκος Σκομπρής
Νίκος Σπλήνης
Σταύρος Σταυρόπουλος
Σταύρος Χαραλάμπους
Μάκης Χατζόπουλος



Έλεγχος

Σπύρος Καρδαμίτσης
Σταύρος Σταυρόπουλος

Κεφάλαιο 1

Γιώργος Ράπτης
Χρήστος Σίσκας
Νίκος Σπλήνης

Κεφάλαιο 2

Νίκος Αντωνόπουλος
Ανδρέας Μανώλης
Σταύρος Σταυρόπουλος

Κεφάλαιο 3

Γιάννης Ζαμπέλης



Συντονιστής

Γιάννης Ζαμπέλης



Εξώφυλλο

Μιχάλης Νάννος

Πρόλογος

Ανδρέας Κουλούρης



Επιμελητής

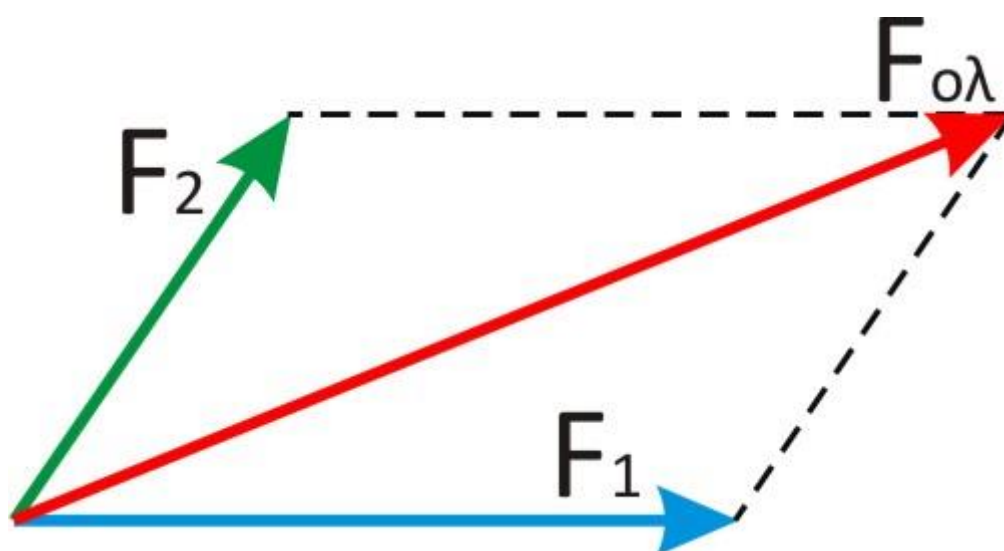
Μάκης Χατζόπουλος

lisari team
η καλύτερη ομάδα λόγω team_ής!

Μαθηματικά Προσανατολισμού

Β' Λυκείου

Κεφάλαιο 1ο: Διανύσματα



Β Θέματα 1.1- 1.2 - 1.3

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (18603)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία Δ και E του επιπέδου τέτοια, ώστε

$$\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{A\Gamma} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{A\Gamma}$$

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta E}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$

Μονάδες 13

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι παράλληλα.

Μονάδες 12

παρόμοια με 11 Α' ομάδα σελ. 27

ΛΥΣΗ

Μεθοδολογία

- Αν O είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχουμε

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

- Αν έχουμε να δείξουμε μια διανυσματική ισότητα τότε ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα

- Θεωρούμε σημείο αναφοράς ένα από τα σημεία της διανυσματικής ισότητας (πχ το A)
- Εκφράζουμε όλα τα διανύσματα με αρχή το σημείο A
- Κάνουμε πράξεις και καταλήγουμε σε μια σχέση που ισχύει είτε προφανώς είτε από δεδομένα

α) Θεωρούμε σημείο αναφοράς το A , οπότε:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Delta E} &= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{A\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta E} = (5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{A\Gamma}) - (2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{A\Gamma}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta E} = 5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{A\Gamma} - 2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{A\Gamma} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta E} = 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{A\Gamma} \quad (1) \end{aligned}$$

β)

Μεθοδολογία

Για να δείξουμε ότι δύο διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα έχουμε τους παρακάτω τρεις τρόπους

- Δείχνουμε ότι $\vec{a} = \lambda \vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ (αυτή τη μέθοδο τη χρησιμοποιούμε όταν έχουμε μια διανυσματική ισότητα και δεν ξέρουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων)

✓ Αν $\vec{a} = \lambda \vec{\beta}$, $\lambda > 0$ τότε $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$

✓ Αν $\vec{a} = \lambda \vec{\beta}$, $\lambda < 0$ τότε $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$

➤ Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε αρκεί να δείξουμε $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$

$$(\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

➤ Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ και $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μη κατακόρυφα διανύσματα αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\vec{\beta}}$ (ο συντελεστής διεύθυνσης ενός διανύσματος $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ είναι $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{y_1}{x_1}$)

Από τη σχέση (1) έχουμε,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Delta E} &= 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{\Delta E} = 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AG}) \\ &\Rightarrow \overrightarrow{\Delta E} = 3\overrightarrow{GB} \Rightarrow \overrightarrow{\Delta E} = -3\overrightarrow{BG} \Rightarrow \overrightarrow{\Delta E} \parallel \overrightarrow{BG} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (18604)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και E, Z σημεία τέτοια ώστε:

$$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{AZ} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AG}.$$

α) Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{EZ}$ και $\overrightarrow{ZB}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AD}$.

Μονάδες 13

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Z και E είναι συνευθειακά.

Μονάδες 12

παρόμοια με 4 Α' ομάδα σελ. 27

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε σημείο αναφοράς το A , οπότε:

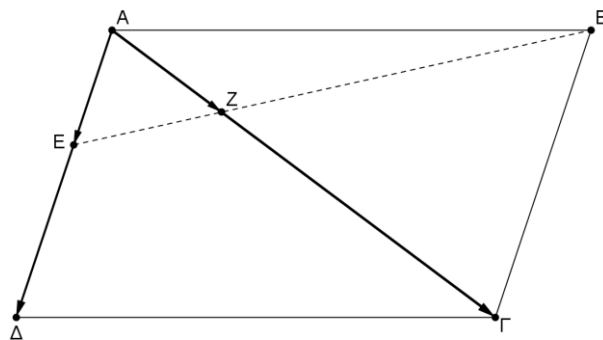
$$\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AE} \Leftrightarrow \overrightarrow{EZ} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AG} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{EZ} = \frac{2}{7}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}) - \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{EZ} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{BG} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$$

$$\stackrel{\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AD}}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{EZ} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{10}{35}\overrightarrow{AD} - \frac{14}{35}\overrightarrow{AD}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{EZ} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{4}{35}\overrightarrow{AD}} \quad (1)$$



$$\text{Επίσης } \overrightarrow{ZB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AZ} \Leftrightarrow \overrightarrow{ZB} = \overrightarrow{AB} - \frac{2}{7}\overrightarrow{AG}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ZB} = \overrightarrow{AB} - \frac{2}{7}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ZB} = \overrightarrow{AB} - \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{7}\overrightarrow{B\Gamma}$$

$$\stackrel{\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{ZB} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{7}\overrightarrow{A\Delta} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{ZB} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{7}\overrightarrow{A\Delta}} \quad (2)$$

β)

Μεθοδολογία

Για να δείξουμε ότι τρία σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{A\Gamma}$ ή $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{B\Gamma}$ κ.ο.κ

Από σχέση (2) έχουμε,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ZB} &= \frac{5}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{7}\overrightarrow{A\Delta} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 5}\overrightarrow{A\Delta} = \\ &= 5 \cdot \left(\frac{1}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{35}\overrightarrow{A\Delta} \right) = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{4}{35}\overrightarrow{A\Delta} \right) \end{aligned}$$

Από την σχέση (1) έχουμε,

$$\overrightarrow{ZB} = \frac{5}{2} \cdot \overrightarrow{EZ} \Leftrightarrow \overrightarrow{ZB} // \overrightarrow{EZ}$$

Όμως το Z κοινό σημείο, άρα τα σημεία B, Z, E συνευθειακά.

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (20054)

Θεωρούμε τα σημεία P, Λ, K και M του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$5\overrightarrow{P\Lambda} = 2\overrightarrow{PK} + 3\overrightarrow{PM}$$

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία K, Λ και M είναι συνευθειακά.

Μονάδες 10

β) Για τα παραπάνω σημεία K, Λ και M να δείξετε ότι ισχύει

$$2\overrightarrow{A\Lambda} + 3\overrightarrow{B\Lambda} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$$

όπου A και B είναι σημεία του επιπέδου.

Μονάδες 15

παρόμοια με 6 Α' ομάδα σελ. 27

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$\begin{aligned} 5\overrightarrow{P\Lambda} = 2\overrightarrow{PK} + 3\overrightarrow{PM} &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{P\Lambda} + 3\overrightarrow{P\Lambda} = 2\overrightarrow{PK} + 3\overrightarrow{PM} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{P\Lambda} - 2\overrightarrow{PK} = 3\overrightarrow{PM} - 3\overrightarrow{P\Lambda} \\ &\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{P\Lambda} - \overrightarrow{PK}) = 3(\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{P\Lambda}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{K\Lambda} = 3\overrightarrow{LM} \Leftrightarrow \overrightarrow{K\Lambda} = \frac{3}{2}\overrightarrow{LM}. \end{aligned}$$

Άρα $\overrightarrow{K\Lambda} // \overrightarrow{LM}$ κι επειδή έχουν κοινό σημείο το Λ θα έχουν τον ίδιο φορέα, επομένως τα σημεία K, Λ και M είναι συνευθειακά.

β) Έχουμε,

$$2\overrightarrow{A\Lambda} + 3\overrightarrow{B\Lambda} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$$

Με σημείο αναφοράς το Λ, ισοδύναμα, έχουμε:

$$\begin{aligned}
2(\overrightarrow{ΛΛ} - \overrightarrow{ΛΑ}) + 3(\overrightarrow{ΛΛ} - \overrightarrow{ΛΒ}) + 2(\overrightarrow{ΛΒ} - \overrightarrow{ΛΜ}) &= \overrightarrow{ΛΚ} - \overrightarrow{ΛΑ} + \overrightarrow{ΛΜ} - \overrightarrow{ΛΑ} + \overrightarrow{ΛΚ} - \overrightarrow{ΛΒ} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -2\overrightarrow{ΛΑ} - 3\overrightarrow{ΛΒ} + 2\overrightarrow{ΛΒ} - 2\overrightarrow{ΛΜ} = \overrightarrow{ΛΚ} - \overrightarrow{ΛΑ} + \overrightarrow{ΛΜ} - \overrightarrow{ΛΑ} + \overrightarrow{ΛΚ} - \overrightarrow{ΛΒ} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -2\overrightarrow{ΛΚ} = 3\overrightarrow{ΛΜ} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{ΚΛ} = 3\overrightarrow{ΛΜ} \Leftrightarrow \overrightarrow{ΚΛ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{ΛΜ}
\end{aligned}$$

που ισχύει από το ερώτημα (α).



Β Θέματα 1.4

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (18605)

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + \vec{j}$ και $\overrightarrow{OG} = 5\vec{i} - 5\vec{j}$, όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BG}$.

Μονάδες 12

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία A, B και Γ μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α)

Μεθοδολογία

- Αν $\vec{a} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}$ τότε $\vec{a} = (x_1, y_1)$
- Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε

$$\vec{a} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

Οπότε:

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = (2, 4), \quad \overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + \vec{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = (3, 1)$$

$$\text{και } \overrightarrow{OG} = 5\vec{i} - 5\vec{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = (5, -5)$$

Με σημείο αναφοράς το O, έχουμε,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = (3, 1) - (2, 4) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = (3 - 2, 1 - 4) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = (1, -3)$$

και

$$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = (5, -5) - (3, 1) \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = (5 - 3, -5 - 1) \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = (2, -6)$$

β) Για να σχηματίζουν τρία σημεία του επιπέδου τρίγωνο, πρέπει να μην είναι συνευθειακά, όμως,

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BG}) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-6) - (-3) \cdot 2 = -6 + 6 = 0$$

άρα $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BG}$, οπότε τα A, B, Γ είναι συνευθειακά, επομένως δεν σχηματίζουν τρίγωνο.

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (20148)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{\beta} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ και $\vec{\gamma} = (7, 3)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι μη συγγραμμικά ανά δύο.

Μονάδες 10

β) Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

Μεθοδολογία

Για να δείξουμε ότι δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα αρκεί να δείξουμε ότι $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \neq 0$ με την προϋπόθεση πως γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$

Έχουμε $\vec{\alpha} = \vec{i} - 2\vec{j} = (1, -2)$ και $\vec{\beta} = 2\vec{i} - 5\vec{j} = (2, -5)$

α) Έχουμε $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 4 = -1 \neq 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$

$\det(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 14 = 17 \neq 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \nparallel \vec{\gamma}$

$\det(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 35 = 41 \neq 0 \Rightarrow \vec{\beta} \nparallel \vec{\gamma}$

β)

Μεθοδολογία

Αν θέλουμε να γράψουμε ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ως γραμμικό συνδυασμό δύο διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ τότε πρέπει το $\vec{\alpha}$ να γραφεί στην παρακάτω μορφή

$$\vec{\alpha} = \kappa \vec{\beta} + \lambda \vec{\gamma} \text{ με } \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$

Το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, αν και μόνο αν, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί λ, μ τέτοιοι ώστε: $\vec{\gamma} = \lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Έχουμε,

$$\vec{\gamma} = \lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta} \Leftrightarrow (7, 3) = \lambda(1, -2) + \mu(2, -5) \Leftrightarrow (7, 3) = (\lambda + 2\mu, -2\lambda - 5\mu)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = 7 \\ -2\lambda - 5\mu = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2\mu + 7 \\ +4\mu - 14 - 5\mu = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 41 \\ \mu = -17 \end{cases}$$

άρα $\vec{\gamma} = 41 \cdot \vec{\alpha} - 17 \cdot \vec{\beta}$ είναι ο γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (20061)

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τρεις κορυφές τα σημεία Α(1,1), Γ(4, 3) και Δ(2, 3).

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του ΑΒΓΔ.

Μονάδες 9

β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής K των διαγωνίων $ΑΓ$ και $ΒΔ$, καθώς και τις συντεταγμένες της κορυφής B .

Μονάδες 16

ΛΥΣΗ

Έχουμε,

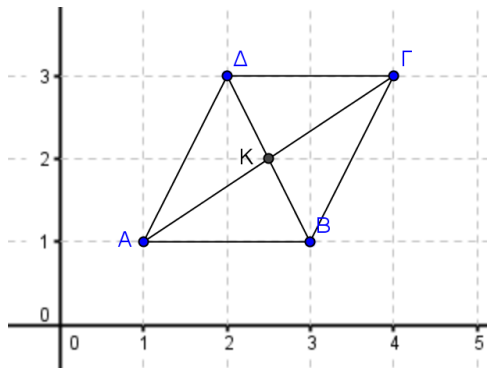
$$\overrightarrow{ΑΔ} = (x_Δ - x_A, y_Δ - y_A) = (2-1, 3-1) = (1, 2)$$

άρα και $\overrightarrow{ΒΓ} = (1, 2)$, αφού $ΑΒΓΔ$ παραλληλόγραμμο.

Επίσης,

$$\overrightarrow{ΔΓ} = (x_Γ - x_Δ, y_Γ - y_Δ) = (4-2, 3-3) = (2, 0)$$

άρα και $\overrightarrow{ΑΒ} = (2, 0)$.



α) Τα μήκη των πλευρών του $ΑΒΓΔ$ είναι τα μέτρα των διανυσμάτων. Έχουμε λοιπόν:

$$(AB) = |\overrightarrow{ΑΒ}| = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2 = (ΔΓ) \text{ και}$$

$$(ΑΔ) = |\overrightarrow{ΑΔ}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} = (ΒΓ)$$

β) Επειδή οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου $ΒΔ$, $ΑΓ$ διχοτομούνται, το K είναι μέσον του $ΑΓ$.

$$\text{Οπότε: } x_K = \frac{x_A + x_Γ}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} \text{ και } y_K = \frac{y_A + y_Γ}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\text{Άρα: } K\left(\frac{5}{2}, 2\right).$$

Το K είναι μέσον και της $ΒΔ$ οπότε για τον υπολογισμό της κορυφής B έχουμε:

$$\begin{cases} x_K = \frac{x_B + x_Δ}{2} \\ y_K = \frac{y_B + y_Δ}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2} = \frac{x_B + 2}{2} \\ 2 = \frac{y_B + 3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = x_B + 2 \\ 4 = y_B + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 3 \\ y_B = 1 \end{cases}$$

$$\text{Άρα: } B(3, 1)$$

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (20055)

Θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha+1, 3)$, $B(\alpha, 4)$ και $\Gamma(-4, 5\alpha+4)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΒ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$.

Μονάδες 8

β) Να βρείτε για ποια τιμή του α , τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

Μονάδες 10

γ) Αν $\alpha = 1$, να βρείτε τον αριθμό λ ώστε $\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \overrightarrow{AB}$.

Μονάδες 7

παρόμοια με εφαρμογή σελ. 38

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$\overrightarrow{AB} = (\alpha - (\alpha + 1), 4 - 3) = (\alpha - \alpha - 1, 1) = (-1, 1)$$

και

$$\overrightarrow{B\Gamma} = (-4 - \alpha, 5\alpha + 4 - 4) = (-\alpha - 4, 5\alpha)$$

β) Για να είναι συνευθειακά τα A, B, Γ αρκεί $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{B\Gamma}$, δηλαδή

$$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\alpha - 4 & 5\alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \cdot 5\alpha - (-\alpha - 4) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow -5\alpha + \alpha + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -5\alpha + \alpha = -4 \Leftrightarrow -4\alpha = -4 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

γ) Για $\alpha = 1$ έχουμε A(2,3), B(1,4), Γ(-4,9) και

$$\overrightarrow{A\Gamma} = (-4 - 2, 9 - 3) = (-6, 6), \quad \overrightarrow{AB} = (1 - 2, 4 - 3) = (-1, 1)$$

Επομένως,

$$\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (-6, 6) = \lambda(-1, 1) \Leftrightarrow (-6, 6) = (-\lambda, \lambda)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 = -\lambda \\ 6 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 6}$$

ΑΣΚΗΣΗ B5 (20071)

Θεωρούμε τα σημεία A(1+2α, 4α-2) και B(5α+1, -α), $\alpha \in \mathbb{Z}$

α) Να γράψετε το $\overrightarrow{AB}$ συναρτήσει του α και να βρείτε το α ώστε $|\overrightarrow{AB}| = 10$

(Μονάδες 12)

β) Έστω $\alpha = 2$. Να βρείτε σημείο M του άξονα x'x ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ισοσκελές με βάση την AB.

(Μονάδες 13)

παρόμοια με 8 Α' ομάδα σελ. 40

ΛΥΣΗ

Μεθοδολογία

Αν $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$ τότε

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

α) Έχουμε :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (x_B - x_A, y_B - y_A) = (5\alpha + 1 - (1 + 2\alpha), -\alpha - (4\alpha - 2)) \\ &= (5\alpha + 1 - 1 - 2\alpha, -\alpha - 4\alpha + 2) = (3\alpha, 2 - 5\alpha)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{(3\alpha)^2 + (2 - 5\alpha)^2} = \sqrt{9\alpha^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5\alpha + (5\alpha)^2} \\ &= \sqrt{9\alpha^2 + 4 - 20\alpha + 25\alpha^2} = \sqrt{34\alpha^2 - 20\alpha + 4}.\end{aligned}$$

Οπότε ,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB}| = 10 &\Leftrightarrow \sqrt{34\alpha^2 - 20\alpha + 4} = 10 \Leftrightarrow \left(\sqrt{34\alpha^2 - 20\alpha + 4}\right)^2 = 10^2 \\ &\Leftrightarrow 34\alpha^2 - 20\alpha + 4 = 100 \Leftrightarrow 34\alpha^2 - 20\alpha + 4 - 100 = 0 \\ &\Leftrightarrow 34\alpha^2 - 20\alpha - 96 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (17\alpha^2 - 10\alpha - 48) = 0 \\ &\Leftrightarrow 17\alpha^2 - 10\alpha - 48 = 0\end{aligned}$$

Λύνουμε το τριώνυμο $17\alpha^2 - 10\alpha - 48 = 0$.

Έχουμε

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 17 \cdot (-48) = 100 + 3264 = 3364$$

Οπότε

$$\alpha = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{10 \pm \sqrt{3364}}{2 \cdot 17} = \frac{10 \pm 58}{34} = \begin{cases} \frac{10 + 58}{34} = \frac{68}{34} = 2 \\ \frac{10 - 58}{34} = \frac{-48}{34}, \text{ απορρίπτεται αφού } \alpha \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Έτσι καταλήξαμε ότι $\alpha = 2$.

β) Για $\alpha = 2$ τα σημεία είναι $A(5, 6)$ και $B(11, -2)$.

Το σημείο M ανήκει στον άξονα $x'x$ οπότε η τεταγμένη του θα είναι 0 και θα έχει την μορφή $M(x_M, 0)$. Επειδή το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές με βάση την AB θα ισχύει ότι $(MA) = (MB)$.

Έτσι έχουμε,

$$\begin{aligned}(MA) &= \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{(5 - x_M)^2 + (6 - 0)^2} \\ &= \sqrt{5^2 - 2 \cdot 5 \cdot x_M + x_M^2 + 36} = \sqrt{25 - 10x_M + x_M^2 + 36} = \sqrt{x_M^2 - 10x_M + 61} \\ (MB) &= \sqrt{(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2} = \sqrt{(11 - x_M)^2 + (-2 - 0)^2} \\ &= \sqrt{11^2 - 2 \cdot 11 \cdot x_M + x_M^2 + 4} = \sqrt{121 - 22x_M + x_M^2 + 4} = \sqrt{x_M^2 - 22x_M + 125}\end{aligned}$$

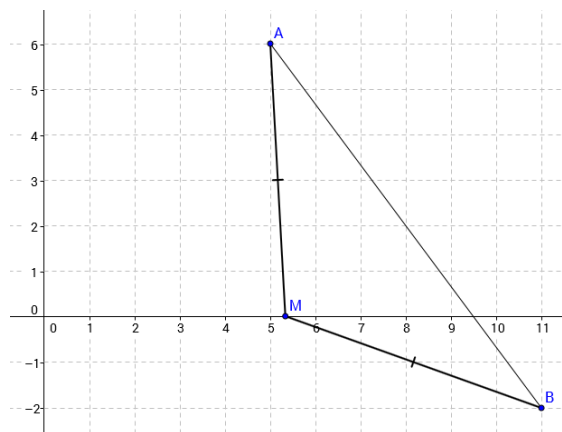
άρα

$$\sqrt{x_M^2 - 10x_M + 61} = \sqrt{x_M^2 - 22x_M + 125} \Leftrightarrow \sqrt{x_M^2 - 10x_M + 61}^2 = \sqrt{x_M^2 - 22x_M + 125}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_M^2 - 10x_M + 61 = x_M^2 - 22x_M + 125 \Leftrightarrow 22x_M - 10x_M = 125 - 61 \Leftrightarrow 12x_M = 64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_M = \frac{64}{12} \Leftrightarrow x_M = \frac{16}{3}$$

Έτσι λοιπόν το σημείο είναι το $M\left(\frac{16}{3}, 0\right)$



ΑΣΚΗΣΗ Β6 (22518)

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και τυχαίο σημείο O. Αν $\vec{OA} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 5\vec{\gamma}$,

$\vec{OB} = -\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$ και $\vec{OG} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 6\vec{\gamma}$

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{AG}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ότι :

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = -\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma} - (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 5\vec{\gamma}) = -\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma} - \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} - 5\vec{\gamma} = -2\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}$$

$$\text{και } \vec{AG} = \vec{OG} - \vec{OA} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 6\vec{\gamma} - \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} - 5\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$$

β) Παρατηρούμε ότι $\vec{AB} = -2\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} = -(2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}) = -\vec{AG}$, οπότε $\vec{AB} \parallel \vec{AG}$.

Άρα τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά

Δ ΘΕΜΑΤΑ 1.4

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (22561)

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AD} = \vec{\beta}$. Θεωρούμε σημεία E, Z , την $A\Delta$ και τη διαγώνιο $A\Gamma$ αντίστοιχα, ώστε $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

(Μονάδες 8)

β) $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{4}\left(\vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta}\right)$ και να υπολογίσετε με τη βοήθεια των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ το $\overrightarrow{EB}$.

(Μονάδες 12)

γ) Τα σημεία E, Z, B είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Αφού $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}) \stackrel{\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{AD}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \Rightarrow$$

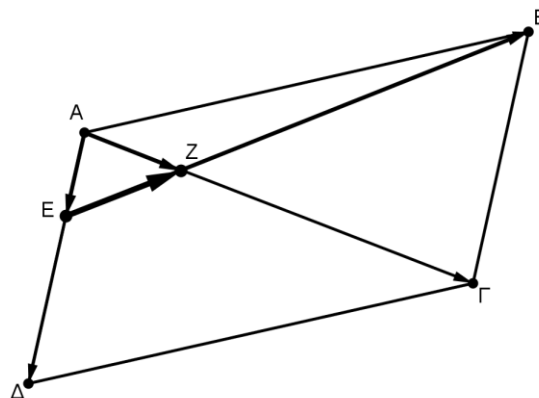
$$\Rightarrow \overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$$

β) Είναι $\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma} - \frac{1}{3}\overrightarrow{A\Delta} =$

$$\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{EZ} = \frac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - \frac{1}{3}\vec{\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{EZ} = \frac{1}{4}\vec{\alpha} + \frac{1}{4}\vec{\beta} - \frac{1}{3}\vec{\beta} \Leftrightarrow \overrightarrow{EZ} = \frac{1}{4}\vec{\alpha} + \frac{3}{12}\vec{\beta} - \frac{4}{12}\vec{\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{EZ} = \frac{1}{4}\vec{\alpha} - \frac{1}{12}\vec{\beta} \Rightarrow \overrightarrow{EZ} = \frac{1}{4}\left(\vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta}\right)$$



$$\text{Ακόμη } \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{EB} = \vec{\alpha} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{EB} = \vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta}$$

γ) Έχουμε

$$\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{4}\left(\vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{EB}$$

άρα $\overrightarrow{EB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EZ}$ δηλαδή E, B, Z συνευθειακά



Β Θέματα 1.5

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (18556)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με $\left(\vec{a}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$ και $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο

Μονάδες 8

β) Αν τα διανύσματα $2\vec{a} + \vec{\beta}$ και $\kappa\vec{a} + \vec{\beta}$ είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του κ .

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{a} + \vec{\beta}$.

Μονάδες 7

παρόμοια με 5 και 7 Α' ομάδα σελ. 47

ΛΥΣΗ

Μεθοδολογία

➤ Για να βρούμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων που γνωρίζουμε τα μέτρα τους και τη γωνία τους χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{\beta})$$

➤ Για να βρούμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ που γνωρίζουμε τις συντεταγμένες τους χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

➤ Για να βρούμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων που γνωρίζουμε τα μέτρα τους καθώς και μια σχέση μεταξύ των διανυσμάτων τους, απομονώνουμε στο ένα μέλος τα δυο διανύσματα και υψώνουμε στο τετράγωνο ώστε να «δημιουργήσουμε» το εσωτερικό γινόμενο που ψάχνουμε.

α) Έχουμε,

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \sin(\vec{a}, \vec{\beta}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 2$$

β)

Μεθοδολογία

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$

Αφού $(2\vec{a} + \vec{\beta}) \perp (\kappa\vec{a} + \vec{\beta})$ έχουμε,

$$\begin{aligned} (2\vec{a} + \vec{\beta}) \cdot (\kappa\vec{a} + \vec{\beta}) &= 0 \Leftrightarrow 2\kappa \cdot \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \kappa\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\kappa |\vec{a}|^2 + (2 + \kappa)\vec{a}\vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2\kappa \cdot \sqrt{2}^2 + (2 + \kappa) \cdot 2 + (2\sqrt{2})^2 = 0 \Leftrightarrow 4\kappa + 4 + 2\kappa + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\kappa = -12 \Leftrightarrow \kappa = -2$$

γ)

Μεθοδολογία

Αν γνωρίζουμε τα μέτρα δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και την γωνία τους $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο οποιουδήποτε διανύσματος της μορφής $\vec{u} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ υπολογίζοντας το

$$|\vec{u}|^2 = (\vec{u})^2 = (\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta})^2 = (\lambda\vec{\alpha})^2 + 2 \cdot \lambda\vec{\alpha} \cdot \mu\vec{\beta} + (\mu\vec{\beta})^2 = \lambda^2 \vec{\alpha}^2 + 2 \cdot \lambda\vec{\alpha} \cdot \mu\vec{\beta} + \mu^2 \vec{\beta}^2$$

$$= \lambda^2 |\vec{\alpha}|^2 + (2\lambda\mu) \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \mu^2 |\vec{\beta}|^2.$$

Προσοχή! Στο τέλος πρέπει να θυμόμαστε να παίρνουμε τη ρίζα της ποσότητας που έχουμε υπολογίσει.

Έχουμε,

$$|2\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = (2\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 + 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 8 = 24$$

άρα

$$|2\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (18581)

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία : $2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

Μονάδες 15

παρόμοια με 7 Α' ομάδα σελ. 47 και θέμα 18556

ΛΥΣΗ

α) Είναι $2|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, οπότε

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sin(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 2$$

β) Έχουμε

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 + 8 + 2 \cdot 2 = 14$$

Άρα

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{14}.$$

Επίσης

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 + 8 - 2 \cdot 2 = 6$$

Άρα

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{6}.$$

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (20056)

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = \sqrt{2}, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{5\pi}{6}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

α) Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{u}$.

Μονάδες 16

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$.

Μονάδες 9

παρόμοια με 7 Α' ομάδα σελ. 47 και θέματα 18556, 18581

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \frac{5\pi}{6} = 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{6}.$$

και

$$\vec{\beta} \cdot \vec{u} = \vec{\beta} \cdot (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}^2 = -\sqrt{6} + 2|\vec{\beta}|^2 = -\sqrt{6} + 2 \cdot \sqrt{2}^2 = -\sqrt{6} + 2 \cdot 2 = 4 - \sqrt{6}$$

β) Έχουμε,

$$|\vec{u}|^2 = |\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 4|\vec{\beta}|^2 = 2^2 + 4 \cdot (-\sqrt{6}) + 4 \cdot \sqrt{2}^2 = 4(3 - \sqrt{6})$$

άρα,

$$|\vec{u}| = \sqrt{4(3 - \sqrt{6})} = 2\sqrt{3 - \sqrt{6}}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (18598)

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (\kappa^2 - 6\kappa + 9, \kappa - 3)$ και $\overrightarrow{AG} = (1, 6)$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$

Μονάδες 8

β) Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ να είναι κάθετα.

Μονάδες 9

γ) Για $\kappa = 1$ να βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{BG}$

Μονάδες 8

παρόμοια με 3, 11 Α' ομάδα σελ. 47

ΛΥΣΗ

α) Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$ ισούται με,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = (\kappa^2 - 6\kappa + 9) \cdot 1 + (\kappa - 3) \cdot 6 = \kappa^2 - 6\kappa + 9 + 6\kappa - 18 = \kappa^2 - 9$$

β) Έχουμε,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AG} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Leftrightarrow \kappa^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (\kappa - 3) \cdot (\kappa + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \kappa - 3 = 0 \text{ ή } \kappa + 3 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3 \text{ ή } \kappa = -3 \end{aligned}$$

γ) Για $\kappa = 1$ έχουμε $\overrightarrow{AB} = (4, -2)$. Επομένως,

$$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} = (1, 6) - (4, -2) = (-3, 8)$$

ΑΣΚΗΣΗ Β5 (20059)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 3)$ και $\vec{\beta} = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

Μονάδες 10

β) Να βρείτε το θετικό αριθμό x για τον οποίον τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v} = (x^2, x - 1)$ είναι κάθετα

Μονάδες 15

παρόμοια με 3 Α' ομάδα σελ. 47 και θέμα 18598

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$\vec{u} = \vec{\alpha} - 2 \cdot \vec{\beta} = (-1, 3) - 2 \cdot \left(-2, -\frac{1}{2}\right) = (-1, 3) - (-4, -1) = (3, 4)$$

β) Έχουμε

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4(x - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 4 = 0 \quad (1)$$

Η (1) είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού με

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4(-4) \cdot 3 = 16 + 48 = 64$$

$$\text{Οπότε έχει λύσεις : } x = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm 8}{6} = \begin{cases} \frac{2}{3} \\ -2 \end{cases}$$

Επειδή $x > 0$ δεκτή είναι μόνο η $x = \frac{2}{3}$

ΑΣΚΗΣΗ Β6 (20070)

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δυο διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύουν

$$3|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 9, \quad 2|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| = 1 \quad \text{και} \quad (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$$

- α) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
 Μονάδες 12
- β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$
 Μονάδες 13

παρόμοια με 7 Α' ομάδα σελ. 47 και θέματα 18556, 18581, 20056, 20057

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε τις σχέσεις

$$3|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 9 \quad (1) \quad \text{και} \quad 2|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| = 1 \quad (2).$$

Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη :

$$3|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| + 2|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| = 9 + 1 \Leftrightarrow 5|\vec{\alpha}| = 10 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = 2.$$

Πάμε στην σχέση (1) και αντικαθιστούμε το $|\vec{\alpha}| = 2$. Οπότε έχουμε,

$$3 \cdot 2 + |\vec{\beta}| = 9 \Leftrightarrow 6 + |\vec{\beta}| = 9 \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = 9 - 6 \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = 3.$$

Για το εσωτερικό γινόμενο έχουμε :

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sin(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 2 \cdot 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

β) Για να βρούμε το μέτρο ενός διανύσματος θεωρούμε το τετράγωνο του μέτρου.

Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned} |\vec{u}|^2 &= |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}|^2 = (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2 = (2\vec{\alpha})^2 - 2 \cdot 2\vec{\alpha} \cdot 3\vec{\beta} + (3\vec{\beta})^2 \\ &= 4\vec{\alpha}^2 - 12\vec{\alpha}\vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 - 12\vec{\alpha}\vec{\beta} + 9|\vec{\beta}|^2 \\ &= 4 \cdot 2^2 - 12 \cdot 3 + 9 \cdot 3^2 = 16 - 36 + 81 = 61. \end{aligned}$$

Άρα

$$|\vec{u}| = \sqrt{61}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β7 (18558)

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $\vec{AB} = (-4, -6)$, $\vec{AG} = (2, -8)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AM}$, όπου ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι οξεία.

Μονάδες 10

γ) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ επιπλέον ισχύει $A(3,1)$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του Β και Γ.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG})$, όμως

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG} = (-4 - 6) + (2 - 8) = (-2 - 14).$$

Άρα

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (-2 - 14) = (-1 - 7)$$

β) Έχουμε,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = -4 \cdot 2 + (-6) \cdot (-8) = 40$$

οπότε,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 40 \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AG}| \cdot \sin \hat{A} = 40 \Leftrightarrow \sin \hat{A} = \frac{40}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AG}|} > 0$$

άρα $\sin A > 0$ δηλαδή $A < 90^\circ$

γ) Έστω $B(x_B, y_B)$, τότε $\overrightarrow{AB} = (x_B - 3, y_B - 1)$ άρα,

$$\overrightarrow{AB} = (-4, -6) \Leftrightarrow (x_B - 3, y_B - 1) = (-4, -6) \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - 3 = -4 \\ \text{και} \\ y_B - 1 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -1 \\ \text{και} \\ y_B = -5 \end{cases}$$

Επομένως, $B(-1, -5)$. Επίσης, αν $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ τότε $\overrightarrow{AG} = (x_\Gamma - 3, y_\Gamma - 1)$ άρα

$$\overrightarrow{AG} = (2, -8) \Leftrightarrow (x_\Gamma - 3, y_\Gamma - 1) = (2, -8) \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Gamma - 3 = 2 \\ \text{και} \\ y_\Gamma - 1 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Gamma = 5 \\ \text{και} \\ y_\Gamma = -7 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β8 (20053)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 4$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -8$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} + 2\vec{\alpha} = \vec{0}$.

Μονάδες 15

παρόμοια με 4 Β' ομάδα σελ. 49

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε, $|\vec{\beta}| = 4$ και $|\vec{\alpha}| = 2$, επομένως

$$\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{-8}{2 \cdot 4} = \frac{-8}{8} = -1.$$

Άρα

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 180^\circ \text{ ή } \pi \text{ rad.}$$

β) Από το (α) ερώτημα έχουμε ότι $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 180^\circ$ οπότε $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ κι αφού $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$,

$$\vec{\beta} = -2\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\beta} + 2\vec{\alpha} = \vec{0}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β9 (20057)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε τα

εξής:

α) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και κατόπιν της παράστασης

$$\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha} \cdot (2\vec{\beta})$$

Μονάδες 10

β) το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ και $\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}$

Μονάδες 15

παρόμοια με 7 Α' ομάδα σελ. 47 και θέματα 18556, 18581, 20056

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

οπότε,

$$\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha} \cdot (2\vec{\beta}) = |\vec{\alpha}|^2 + 2 \cdot (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$$

β) Σύμφωνα με τη θεωρία, έχουμε :

$$\cos(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}, \vec{\beta} + 2\vec{\alpha}) = \frac{(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\beta} + 2\vec{\alpha})}{|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| \cdot |\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}|} \quad (1)$$

Έχουμε :

$$(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}) = \vec{\alpha}\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}^2 - 2\vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = -3\vec{\alpha}\vec{\beta} + 2|\vec{\alpha}|^2 - 2|\vec{\beta}|^2 = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 2^2 = -9$$

$$|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4|\vec{\beta}|^2 = 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2^2 = 13$$

Οπότε,

$$|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| = \sqrt{13}$$

$$|\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}|^2 = (\vec{\beta} + 2\vec{\alpha})^2 = \vec{\beta}^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\alpha}^2 = |\vec{\beta}|^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4|\vec{\alpha}|^2 = 2^2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1^2 = 12$$

Οπότε,

$$|\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Αντικαθιστούμε τα αποτελέσματα που βρήκαμε στη σχέση (1) και έχουμε :

$$\cos(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}, \vec{\beta} + 2\vec{\alpha}) = \frac{(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})(\vec{\beta} + 2\vec{\alpha})}{|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| \cdot |\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}|} = \frac{-9}{\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{-9}{2\sqrt{39}} = \frac{-9\sqrt{39}}{78} = -\frac{3\sqrt{39}}{26}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β10 (20058)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, \sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, 3)$. Να υπολογίσετε

α) τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

Μονάδες 10

β) το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 \cdot \vec{\alpha}$

Μονάδες 15

παρόμοια με 2, 6 Α' ομάδα σελ. 47

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \text{ Είναι } \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{-1 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot 3}{\sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} \cdot \sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{12}} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

Επειδή είναι $0 \leq (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \leq \pi$, τότε $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$

β) Έχουμε,

$$\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2 = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2}^2 = \sqrt{4}^2 = 4$$

Επίσης

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot 3 = 2\sqrt{3}$$

οπότε,

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 \cdot \vec{\alpha} = 4 \cdot \vec{\beta} - (2\sqrt{3})^2 \cdot \vec{\alpha} = 4 \cdot (\sqrt{3}, 3) - 12 \cdot (-1, \sqrt{3}) \\ &= (4\sqrt{3}, 12) - (-12, 12\sqrt{3}) = (4\sqrt{3} + 12, 12 - 12\sqrt{3}) \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β11 (20052)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \cdot \vec{\beta} = 7$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$.

α) Να υπολογίσετε τα $\vec{\alpha}^2$ και $|\vec{\beta}|$.

Μονάδες 6

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

Μονάδες 9

β) Να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ στο διάνυσμα $\vec{\beta}$.

Μονάδες 10

παρόμοια με 12 Α' ομάδα σελ. 47

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2 = 1^2 = 1,$$

Άρα

$$(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \cdot \vec{\beta} = 7 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 2\vec{\beta}^2 = 7 \Leftrightarrow -1 + 2|\vec{\beta}|^2 = 7 \Leftrightarrow |\vec{\beta}|^2 = 4 \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = 2$$

β) Έχουμε,

$$\begin{aligned} |\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|^2 &= (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 2 \cdot \vec{\alpha} \cdot 2\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 4|\vec{\beta}|^2 = \\ &= 1 + 4 \cdot (-1) + 4 \cdot 2^2 = -3 + 16 = 13 \end{aligned}$$

Άρα

$$|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = \sqrt{13}.$$

γ) Ισχύει ότι $\text{προβ}_{\vec{\beta}}(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) / |\vec{\beta}|$ δηλαδή υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$\text{προβ}_{\vec{\beta}}(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = \lambda \cdot \vec{\beta}$$

Όμως

$$(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}}(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \Leftrightarrow 7 = \vec{\beta} \cdot \lambda \vec{\beta} \Leftrightarrow 7 = \lambda \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow 7 = \lambda \cdot 2^2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{7}{4}$$

Άρα

$$\text{προβ}_{\vec{\beta}}(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = \frac{7}{4} \vec{\beta}.$$

ΑΣΚΗΣΗ Β12 (20050)Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 7)$ και $\vec{\beta} = (2, 4)$.α) Να βρεθεί η προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.

Μονάδες 10

β) Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες, η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$.

Μονάδες 15

*παρόμοια με 12 Α' ομάδα σελ. 48***ΛΥΣΗ**α) Γνωρίζουμε ότι, $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} / |\vec{\beta}|$ δηλαδή υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta} = \lambda \cdot (2, 4) = (2\lambda, 4\lambda)$$

Όμως:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} \Leftrightarrow (1, 7) \cdot (2, 4) = (2, 4) \cdot (2\lambda, 4\lambda) \Leftrightarrow 1 \cdot 2 + 7 \cdot 4 = 2 \cdot 2\lambda + 4 \cdot 4\lambda \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 + 28 = 4\lambda + 16\lambda \Leftrightarrow 30 = 20\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{30}{20} \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \left(2 \cdot \frac{3}{2}, 4 \cdot \frac{3}{2} \right) = (3, 6).$$

Μεθοδολογία

Για να αναλύσουμε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δυο κάθετες συνιστώσες ώστε η μια να είναι παράλληλη σε ένα $\vec{\alpha}$ ακολουθούμε την εξής διαδικασία.

Εστω $\vec{\beta}_1$ και $\vec{\beta}_2$ οι κάθετες συνιστώσες του $\vec{\beta}$, οπότε $\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2$ (1)

Εστω $\vec{\beta}_1 // \vec{\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\vec{\beta}_1 = \lambda \vec{\alpha}}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{\beta}_2 \perp \vec{\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\vec{\beta}_2 \cdot \vec{\alpha} = 0}$

Εχουμε,

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}_1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}_2 = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}_1 = \vec{\alpha} \cdot \lambda \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} = \lambda \cdot |\vec{\alpha}|^2 = \lambda \cdot |\vec{\alpha}|^2$$

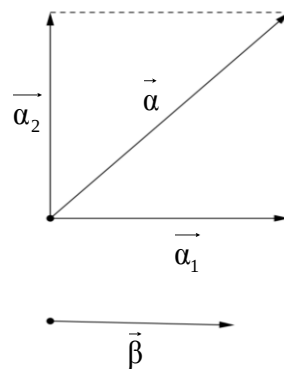
από όπου βρίσκουμε $\lambda = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2}$ επομένως λ = γνωστός αριθμός.

Στη συνέχεια από τον τύπο $\vec{\beta}_1 = \lambda \vec{\alpha}$ υπολογίζουμε το $\vec{\beta}_1$, τέλος από τη σχέση $\vec{\beta}_2 = \vec{\beta} - \vec{\beta}_1$ υπολογίζουμε το $\vec{\beta}_2$

β) Έστω $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2$ με $\vec{\alpha}_1 \perp \vec{\alpha}_2$ και $\vec{\alpha}_1 // \vec{\beta}$

• $\vec{\alpha}_1 = \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = (3, 6)$ από α) ερώτημα

• $\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha} - \vec{\alpha}_1 = (1, 7) - (3, 6) = (1 - 3, 7 - 6) = (-2, 1)$



ΑΣΚΗΣΗ Β13 (20069)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -3)$ και $\vec{\beta} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

α) Να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$

Μονάδες 10

β) Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη με το $\vec{\beta}$

Μονάδες 15

παρόμοια με 12 Α' ομάδα σελ. 48 και θέμα 20050

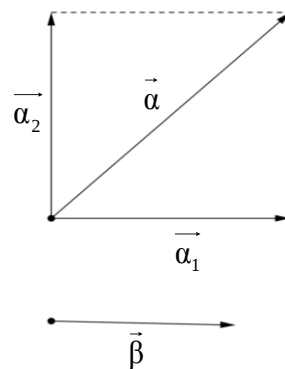
ΛΥΣΗ

α) Επειδή $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} // \vec{\beta}$ είναι $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} \Leftrightarrow 2 - \frac{3}{2} = \vec{\beta} \cdot (\lambda \vec{\beta}) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \lambda |\vec{\beta}|^2,$$

αλλά $|\vec{\beta}|^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, άρα $\frac{1}{2} = \frac{5}{4} \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{5}$,

οπότε $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} = \frac{2}{5} \left(1, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$.



β) Έστω $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2$ με $\vec{\alpha}_1 \perp \vec{\alpha}_2$ και $\vec{\alpha}_1 // \vec{\beta}$, άρα

$$\vec{\alpha}_1 = \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right) \text{ από το α) ερώτημα,}$$

$$\text{τότε } \vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha} - \vec{\alpha}_1 = (2, -3) - \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right) = \left(\frac{8}{5}, -\frac{16}{5} \right).$$

ΑΣΚΗΣΗ Β14 (22505)

Δίνεται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}, \vec{v} = 5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \text{ και } |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2}$

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} - 3\vec{v}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{u} - 3\vec{v}| = 14$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$\begin{aligned} \vec{u} \perp \vec{v} &\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \cdot (5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}) = 0 \Rightarrow 5\vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 10\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 8\vec{\beta}^2 = 0 \Rightarrow \\ 5|\vec{\alpha}|^2 + 6\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 8|\vec{\beta}|^2 &= 0 \Rightarrow 5 \cdot 1^2 + 6\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 8 \cdot 1^2 = 0 \Rightarrow 5 + 6\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 8 = 0 \Rightarrow 6\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 3 \Rightarrow \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= \frac{3}{6} \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

β) Έχουμε,

$$\begin{aligned} |\vec{u} - 3\vec{v}|^2 &= (\vec{u} - 3\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 6\vec{u} \cdot \vec{v} + 9\vec{v}^2 = (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})^2 - 6 \cdot 0 + 9 \cdot (5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})^2 = \\ \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 + 9 \cdot (25\vec{\alpha}^2 - 40\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 16\vec{\beta}^2) &= 1^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 1^2 + 9 \cdot \left(25 \cdot 1^2 - 40 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot 1^2 \right) = \\ 1 + 2 + 4 + 9 \cdot (25 - 20 + 16) &= 7 + 9 \cdot 21 = 7 + 189 = 196 \end{aligned}$$

Οπότε,

$$|\vec{u} - 3\vec{v}| = \sqrt{196} = 14.$$

Επίσης,

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 1^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 = 1 - 1 + 1 = 1$$

Άρα

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{1} = 1$$

Επίσης,

$$(\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = [\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 3 \cdot (5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})] \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 15\vec{\alpha} + 12\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) =$$

$$(-14\vec{\alpha} + 14\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = -14(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = -14(\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = -14|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = -14 \cdot 1 = -14$$

δηλαδή,

$$\cos(\vec{u} - 3\vec{v}, \vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \frac{(\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta})}{|\vec{u} - 3\vec{v}| \cdot |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|} = \frac{-14}{14 \cdot 1} = \frac{-14}{14} = -1$$

Επομένως

$$(\vec{u} - 3\vec{v}, \vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 180^\circ \text{ ή } \pi \text{ rad και } (\vec{u} - 3\vec{v}) \uparrow \downarrow (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$$

Άσκηση Β15 (22519)

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα για τα οποία ισχύουν :

$$\vec{\beta} = \left(\frac{1}{7}, 1\right) \text{ και } \vec{\alpha} + 7\vec{\beta} = (\mu + 2, 7 - 2\mu), \mu \in \mathbb{R}$$

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ως συνάρτηση του μ .

(Μονάδες 10)

β) Αν $\mu = 2$, τότε :

i. να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = (3, -4)$ και ότι το $\vec{\alpha}$ είναι κάθετο στο $\vec{\alpha} + 7\vec{\beta}$

(Μονάδες 10)

ii. να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε :

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} + 7\vec{\beta} &= (\mu + 2, 7 - 2\mu) \Leftrightarrow \vec{\alpha} + 7\left(\frac{1}{7}, 1\right) = (\mu + 2, 7 - 2\mu) \Leftrightarrow \vec{\alpha} + \left(7 \cdot \frac{1}{7}, 7 \cdot 1\right) = (\mu + 2, 7 - 2\mu) \\ \Leftrightarrow \vec{\alpha} + (1, 7) &= (\mu + 2, 7 - 2\mu) \Leftrightarrow \vec{\alpha} = (\mu + 2, 7 - 2\mu) - (1, 7) \Leftrightarrow \vec{\alpha} = (\mu + 2 - 1, 7 - 2\mu - 7) \\ \Leftrightarrow \vec{\alpha} &= (\mu + 1, -2\mu) \end{aligned}$$

β) i. Αν $\mu = 2$ τότε έχουμε : $\vec{\alpha} = (\mu + 1, -2\mu) = (2 + 1, -2 \cdot 2) = (3, -4)$ και

$$\vec{\alpha} + 7\vec{\beta} = (\mu + 2, 7 - 2\mu) = (2 + 2, 7 - 2 \cdot 2) = (4, 7 - 4) = (4, 3)$$

Για να δείξουμε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\alpha} + 7\vec{\beta}$ αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + 7\vec{\beta}) = 0$.

Οπότε

$$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + 7\vec{\beta}) = (3, -4)(4, 3) = 3 \cdot 4 + (-4) \cdot 3 = 12 - 12 = 0$$

ii. Για να βρούμε τη γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \sin(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \quad (1).$$

Έχουμε

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = (3, -4) \cdot \left(\frac{1}{7}, 1\right) = 3 \cdot \frac{1}{7} + (-4) \cdot 1 = \frac{3}{7} - 4 = \frac{3}{7} - \frac{28}{7} = -\frac{25}{7}$$

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

και

$$|\vec{\beta}| = \sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{49} + 1} = \sqrt{\frac{50}{49}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{49}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{7}.$$

Από τη σχέση (1) έχουμε :

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \sin(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \Leftrightarrow -\frac{25}{7} = 5 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{7} \cdot \sin(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \Leftrightarrow -\frac{25}{7} = \frac{25\sqrt{2}}{7} \cdot \sin(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$$

$$\Leftrightarrow \sin(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι $\frac{3\pi}{4}$

ΑΣΚΗΣΗ Β16 (22524)

Έστω $\vec{\alpha} = (2, -3)$ και $\vec{\beta} = (-5, 1)$ δύο διανύσματα.

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και να υπολογίσετε την παράσταση $\frac{|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|}{\sqrt{-\vec{\alpha}\vec{\beta}}}$.

Μονάδες 13

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 \cdot (-5) + (-3) \cdot 1 = -10 - 3 = -13.$$

Είναι

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \text{ και } |\vec{\beta}| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26} = \sqrt{2 \cdot 13} = \sqrt{2} \sqrt{13}$$

Επομένως η παράσταση γίνεται

$$\frac{|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|}{\sqrt{-\vec{\alpha}\vec{\beta}}} = \frac{\sqrt{13} + \sqrt{2} \sqrt{13}}{\sqrt{-(-13)}} = \frac{\sqrt{13}(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{13}} = (1 + \sqrt{2})$$

β) Είναι

$$2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = 2(2, -3) - 3(-5, 1) = (4, -6) + (15, -3) = (19, -9)$$

Επομένως

$$|2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| = \sqrt{19^2 + (-9)^2} = \sqrt{361 + 81} = \sqrt{442}$$

Β τρόπος:

Έχουμε,

$$\begin{aligned} |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}|^2 &= (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2 = (2\vec{\alpha})^2 - 2 \cdot 2\vec{\alpha} \cdot 3\vec{\beta} + (3\vec{\beta})^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 - 12\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 9|\vec{\beta}|^2 = \\ &= 4 \cdot 13 - 12 \cdot (-13) + 9 \cdot 26 = 52 + 156 + 234 = 442. \end{aligned}$$

Επομένως αφού $|2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| \geq 0$ είναι $|2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| = \sqrt{442}$.

ΑΣΚΗΣΗ Β17 (22527)

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2$$

Μονάδες 12

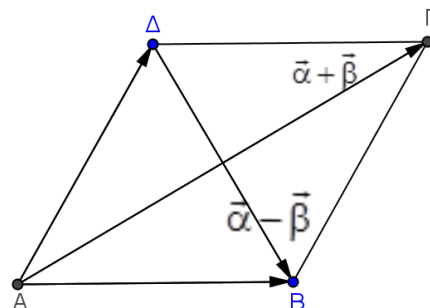
β) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με πλευρά ίση με τη μονάδα και $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{\beta}$. Αν η διαγώνιός του ΑΓ έχει μήκος $\sqrt{3}$, να βρείτε το μήκος της διαγώνιου ΒΔ.

Μονάδες 13

Λύση

α) Είναι γνωστό ότι: $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$ οπότε :

$$\begin{aligned} |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 &= (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 + (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = \\ &= \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 + \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = \\ &= 2\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\beta}^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 \end{aligned}$$



β) Από υπόθεση έχουμε $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{\alpha}| = 1$ και $|\overrightarrow{AD}| = |\vec{\beta}| = 1$

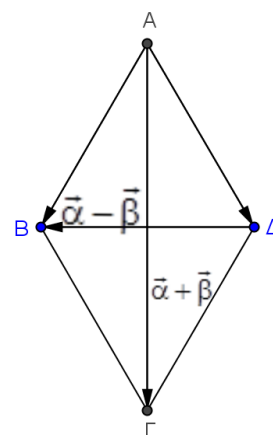
Είναι γνωστό (κανόνας του παραλληλογράμμου) ότι:

$\overrightarrow{AG} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{DB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ οπότε το μήκος της διαγώνιου

ΒΔ θα είναι το $|\overrightarrow{DB}| = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$.

Από ερώτημα (α) ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 &= 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 \quad \text{ή} \\ |\overrightarrow{AG}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 &= 2|\overrightarrow{AB}|^2 + 2|\overrightarrow{AD}|^2 \Leftrightarrow (\sqrt{3})^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{BD}|^2 &= 4 - 3 \Leftrightarrow |\overrightarrow{BD}|^2 = 1 \Leftrightarrow |\overrightarrow{BD}| = 1 \end{aligned}$$



ΑΣΚΗΣΗ Β18 (22530)

Θεωρούμε τα σημεία A, B, Γ ώστε $\overrightarrow{AB} = (-1, 4)$ και $\overrightarrow{AG} = (3, 6)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο και να βρείτε αν η γωνία A του τριγώνου είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία..

Μονάδες 15

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου AM του τριγώνου..

Μονάδες 10

Λύση

α) Έχουμε,

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -6 - 12 = -18 \neq 0$$

οπότε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AG}$ δεν είναι παράλληλα και επομένως τα τρία σημεία A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AG}|} = \frac{-1 \cdot 3 + 4 \cdot 6}{\sqrt{(-1)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + 6^2}} = \frac{21}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{45}} > 0.$$

Άρα η γωνία A του τριγώνου είναι οξεία.

β) Είναι γνωστό ότι: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG})$ οπότε:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}((-1, 4) + (3, 6)) = \frac{1}{2}(2, 10) = (1, 5) \text{ και}$$

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

Δ ΘΕΜΑΤΑ 1.5

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (18606)

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = (4, -2)$ και $\overrightarrow{OB} = (1, 2)$ όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ είναι κάθετα.

Μονάδες 4

β) Αν $\Gamma(\alpha, \beta)$ είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{AB} = (-3, 4)$ και $\overrightarrow{AG} = (\alpha - 4, \beta + 2)$

Μονάδες 5

ii) να αποδείξετε ότι: $4\alpha + 3\beta = 10$

Μονάδες 6

iii) αν επιπλέον τα διανύσματα $\overrightarrow{OG}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = 0, \text{ άρα } \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}.$$

β) i) Είναι $\overrightarrow{OG} = (\alpha, \beta)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1, 2) - (4, -2) = (-3, 4)$$

και

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = (\alpha, \beta) - (4, -2) = (\alpha - 4, \beta + 2)$$

ii) Τα A, B, Γ συνευθειακά αν, και μόνο αν,

$$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ \alpha - 4 & \beta + 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3(\beta + 2) - 4(\alpha - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3\beta - 6 - 4\alpha + 16 = 0 \Leftrightarrow -4\alpha - 3\beta + 10 = 0 \Leftrightarrow 4\alpha + 3\beta = 10 \quad (1)$$

iii) Είναι

$$\overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow -3\alpha + 4\beta = 0 \quad (2)$$

Από το σύστημα των (1), (2) έχουμε

$$\begin{cases} 4\alpha + 3\beta = 10 \\ -3\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12\alpha + 9\beta = 30 \\ -12\alpha + 16\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25\beta = 30 \\ -3\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{30}{25} \\ \alpha = \frac{4\beta}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{6}{5} \\ \alpha = \frac{8}{5} \end{cases}$$

$$\text{άρα } \Gamma\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (18616)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ \text{ και } \vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}.$$

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

Μονάδες 3

β) Αν ισχύει $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\kappa = -2$

Μονάδες 6

ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

Μονάδες 8

iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα.

Μονάδες 8

παρόμοια με 5, 7 Α' ομάδα σελ. 47 και θέματα 18556, 18581, 20056, 20057, 20070

ΛΥΣΗ

α) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίσο με:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

β) Έχουμε,

$$i) \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa \Leftrightarrow \vec{\beta} \cdot \left(\frac{\kappa}{2} \vec{\alpha} - \vec{\beta} \right) = \kappa \Leftrightarrow \vec{\beta} \cdot \frac{\kappa}{2} \vec{\alpha} - \vec{\beta}^2 = \kappa \Leftrightarrow \stackrel{(a)}{\frac{\kappa}{2}} \cdot (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) - |\vec{\beta}|^2 = \kappa \Leftrightarrow$$

$$\frac{\kappa}{2} \cdot 1 - 1^2 = \kappa \Leftrightarrow \frac{\kappa}{2} - 1 = \kappa \Leftrightarrow \frac{\kappa}{2} - \kappa = 1 \Leftrightarrow -\frac{\kappa}{2} = 1 \Leftrightarrow \kappa = -2.$$

ii) Για $\kappa = -2$ είναι $\vec{\gamma} = \frac{-2}{2} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta} = -\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ άρα

$$\begin{aligned} |\vec{\gamma}|^2 &= |-\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = |-(\vec{\alpha} + \vec{\beta})|^2 = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \\ &= |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2 \cdot (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) = 2^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 = 7 \text{ οπότε } |\vec{\gamma}| = \sqrt{7}. \end{aligned}$$

iii) Έχουμε,

$$\begin{aligned} (3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma})(\vec{\beta} - \vec{\gamma}) &= 3 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + 2 \cdot \vec{\gamma} \cdot \vec{\beta} - 2 \cdot \vec{\gamma}^2 \\ &= 3 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3 \cdot \vec{\alpha} \cdot (-\vec{\alpha} - \vec{\beta}) + 2 \cdot (-\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot \vec{\beta} - 2 \cdot (-\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 3 \cdot \vec{\alpha}^2 + 3 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 2 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 2 \cdot \vec{\beta}^2 - 2 \cdot (\vec{\alpha}^2 + 2 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2) \\
&= 3 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 3 \cdot |\vec{\alpha}|^2 + 3 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 2 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 2 \cdot |\vec{\beta}|^2 - 2 \cdot (|\vec{\alpha}|^2 + 2 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2) \\
&= \cancel{3 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} + 3|\vec{\alpha}|^2 + \cancel{3 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} - \cancel{2 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} - 2|\vec{\beta}|^2 - 2|\vec{\alpha}|^2 - \cancel{4 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} - 2|\vec{\beta}|^2 \\
&= |\vec{\alpha}|^2 - 4|\vec{\beta}|^2 = 2^2 - 4 \cdot 1^2 = 0,
\end{aligned}$$

δηλαδή $(3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma})(\vec{\beta} - \vec{\gamma}) = 0 \Leftrightarrow (3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}) \perp (\vec{\beta} - \vec{\gamma})$,

Άρα πράγματι τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα.

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (18618)

α) Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες:

$$|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}| \text{ και } |\vec{u} + \vec{v}| = ||\vec{u}| - |\vec{v}||$$

Μονάδες 10

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \text{ και } \frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$$

i) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$

Μονάδες 8

ii) Να αποδείξετε ότι: $7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$

Μονάδες 7

παρόμοια με 15 Α' ομάδα, 4 Β' ομάδα σελ. 48-49 και θέμα 20053

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$\begin{aligned}
|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}| &\Leftrightarrow |\vec{u} + \vec{v}|^2 = (|\vec{u}| + |\vec{v}|)^2 \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v})^2 = (|\vec{u}| + |\vec{v}|)^2 \\
&\Leftrightarrow \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \\
&\Leftrightarrow \cancel{|\vec{u}|^2} + \cancel{|\vec{v}|^2} + 2\vec{u}\vec{v} = \cancel{|\vec{u}|^2} + \cancel{|\vec{v}|^2} + 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \\
&\Leftrightarrow 2\vec{u}\vec{v} = 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u} \uparrow \uparrow \vec{v}.
\end{aligned}$$

Ομοίως:

$$\begin{aligned}
|\vec{u} + \vec{v}| = ||\vec{u}| - |\vec{v}|| &\Leftrightarrow |\vec{u} + \vec{v}|^2 = ||\vec{u}| - |\vec{v}||^2 \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v})^2 = (|\vec{u}| - |\vec{v}|)^2 \\
&\Leftrightarrow \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \\
&\Leftrightarrow \cancel{|\vec{u}|^2} + \cancel{|\vec{v}|^2} + 2\vec{u}\vec{v} = \cancel{|\vec{u}|^2} + \cancel{|\vec{v}|^2} - 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \\
&\Leftrightarrow 2\vec{u}\vec{v} = -2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u} \uparrow \downarrow \vec{v}.
\end{aligned}$$

β) Έστω ότι

$$\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7} = \lambda \geq 0.$$

τότε $|\vec{\alpha}| = 3\lambda$, $|\vec{\beta}| = 4\lambda$ και $|\vec{\gamma}| = 7\lambda$.

- Για να δείξουμε ότι $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$, από α' ερώτημα αρκεί να δείξουμε ότι

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|.$$

Από τη σχέση $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ ισοδύναμα έχουμε ότι $\vec{\gamma} = -\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, οπότε

$$|\vec{\gamma}| = |-(\vec{\alpha} + \vec{\beta})| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$$

και επειδή $|\vec{\gamma}| = 7\lambda$ είναι $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 7\lambda$.

Επιπλέον είναι $|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 3\lambda + 4\lambda = 7\lambda$, άρα $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ και από το α ερώτημα έχουμε ότι $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$.

- Για να δείξουμε ότι $\vec{\beta} \uparrow \vec{\gamma}$, από α' ερώτημα αρκεί να δείξουμε ότι

$$|\vec{\beta} + \vec{\gamma}| = ||\vec{\beta}| - |\vec{\gamma}||.$$

Από τη σχέση $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ ισοδύναμα έχουμε ότι $\vec{\alpha} = -\vec{\beta} - \vec{\gamma}$, οπότε

$$|\vec{\alpha}| = |-(\vec{\beta} + \vec{\gamma})| = |\vec{\beta} + \vec{\gamma}|$$

και επειδή $|\vec{\alpha}| = 3\lambda$ είναι $|\vec{\beta} + \vec{\gamma}| = 3\lambda$.

Επιπλέον είναι $||\vec{\beta}| - |\vec{\gamma}|| = |4\lambda - 7\lambda| = |-3\lambda| = 3\lambda$, αφού $\lambda > 0$

Άρα $|\vec{\beta} + \vec{\gamma}| = ||\vec{\beta}| - |\vec{\gamma}||$ και από το α' ερώτημα έχουμε $\vec{\beta} \uparrow \vec{\gamma}$.

ii) Α' τρόπος (Σδράκας Βασίλης από τη Λάρισα)

Αρκεί να δείξουμε ότι $7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$

Έχουμε,

$$\begin{aligned} |7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma}|^2 &= (7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma})^2 \\ &= 49\vec{\alpha}^2 + 42\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + 9\vec{\gamma}^2 \\ &= 49|\vec{\alpha}|^2 + 42|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\gamma}| \cdot \cos(\angle(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})) + 9|\vec{\gamma}|^2 \\ &= 49 \cdot 9\lambda^2 + 42 \cdot 3\lambda \cdot 7\lambda(-1) + 9 \cdot 49\lambda^2 = 0 \end{aligned}$$

άρα,

$$|7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma}| = 0 \Leftrightarrow 7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$$

Β' τρόπος:

Βρήκαμε ότι $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow \vec{\gamma}$ άρα και $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\gamma}$, οπότε υπάρχει $k \in \mathbb{R}$, με $k < 0$, ώστε $\vec{\gamma} = k\vec{\alpha}$.

Όμως

$$\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7} \Leftrightarrow 3|\vec{\gamma}| = 7|\vec{\alpha}| \Rightarrow 3|k\vec{\alpha}| = 7|\vec{\alpha}| \Leftrightarrow 3|k||\vec{\alpha}| = 7|\vec{\alpha}|.$$

Εδώ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

– Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε προφανώς και η σχέση $\vec{\gamma} = k\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\gamma} = k \cdot \vec{0} = \vec{0}$, οπότε το ζητούμενο γίνεται ισοδύναμα $7 \cdot \vec{0} + 3 \cdot \vec{0} = \vec{0}$ που ισχύει.

– Αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| \neq 0$, τότε από τη σχέση $3|k||\vec{\alpha}| = 7|\vec{\alpha}|$ έπεται ότι $3|k| = 7 \Leftrightarrow |k| = \frac{7}{3}$

και αφού $k < 0$, άρα $k = -\frac{7}{3}$, τότε

$$\vec{\gamma} = k\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\gamma} = -\frac{7}{3}\vec{\alpha} \Leftrightarrow 3\vec{\gamma} = -7\vec{\alpha} \Leftrightarrow 7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}.$$

Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι $7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$.

Μαθηματικά Προσανατολισμού

Β' Λυκείου

Κεφάλαιο 2ο: Ευθεία



Παράλληλες;;

Β Θέματα 2.1 – 2.2

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (18575)

Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$ και $B(5,6)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος ε του ευθυγράμμου τμήματος AB έχει εξίσωση την $y = -x + 7$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

Μεθοδολογία :

Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που διέρχεται από δύο γνωστά σημεία δίνεται

από τον τύπο $\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Επίσης μια ευθεία (ε) της οποίας ορίζεται ο συντελεστής

διεύθυνσης έχει τη μορφή $y - y_0 = \lambda_\varepsilon (x - x_0)$.

α) Θα έχουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι $\lambda_{AB} = \frac{6-2}{5-1} = 1$, άρα η ευθεία AB θα έχει εξίσωση $\varepsilon_{AB} : y - 2 = 1 \cdot (x - 1)$

Μεθοδολογία :

Για να βρούμε την μεσοκάθετο ενός ευθύγραμμου τμήματος AB ;έχουμε 3 τρόπους:

A' τρόπος: , Βρίσκουμε το μέσο M (χρησιμοποιώντας τους τύπους $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ και

$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$) και με δεδομένο ότι η ευθεία είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα θα

έχουμε το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης τους ισούται με -1

B' τρόπος: Ξέρουμε ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος επομένως απαιτούμε $(MA) = (MB)$

β) **A' τρόπος**

Το μέσο M του τμήματος AB θα έχει συντεταγμένες: $M\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = (3,4)$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι 1, άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της μεσοκάθετης (ε) θα είναι $\lambda_\varepsilon = -1$, αφού η (ε) είναι κάθετη στην ευθεία AB .

Τότε η μεσοκάθετη ευθεία (ε) του τμήματος AB θα έχει εξίσωση:

$$\varepsilon : y - 4 = -1 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y = -x + 7$$

B' τρόπος

[Έστω $M(x, y)$ σημείο της μεσοκαθέτου του AB τότε ισχύει

$$\begin{aligned} (MA) &= (MB) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-6)^2} \Leftrightarrow \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 &= x^2 - 10x + 25 + y^2 - 12y + 36 \Leftrightarrow \\ 8x + 8y - 56 &= 0 \Leftrightarrow y = -x + 7 \end{aligned}$$

★Παρόμοιες Ασκήσεις Σχολικού : Παράγραφος 2.1 / Εφαρμογή 1, Παράγραφος 2.1 / Α' Ομάδα / Άσκηση 4

★Παρόμοιες Ασκήσεις Τράπεζας : 20063

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (18602)

Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon) : y + x = 1$ και το σημείο $A(2, -4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην (ε) .

Μονάδες 10

β) Να βρείτε την προβολή του σημείου A πάνω στην (ε)

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Ο τύπος της εξίσωσης ευθείας που διέρχεται από δοσμένο σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει

συντελεστή διεύθυνσης λ είναι:

$$y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $Ax + By + \Gamma = 0$ δίνεται από τον τύπο:

$$\lambda = -\frac{A}{B}$$

Οπότε για την ευθεία $(\varepsilon) : y + x = 1$ είναι $\lambda_\varepsilon = -\frac{1}{1} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -1$

Αν ονομάσουμε (ε_1) την ευθεία που αναζητούμε, τότε είναι:

$$(\varepsilon) \perp (\varepsilon_1) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{\varepsilon_1} = -1$$

$$\Leftrightarrow (-1) \cdot \lambda_{\varepsilon_1} = -1$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = 1$$

άρα,

$$y - y_0 = \lambda_{\varepsilon_1} (x - x_0) \Leftrightarrow y - (-4) = 1 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y + 4 = x - 2 \Leftrightarrow y = x - 6 \quad (\varepsilon_1)$$

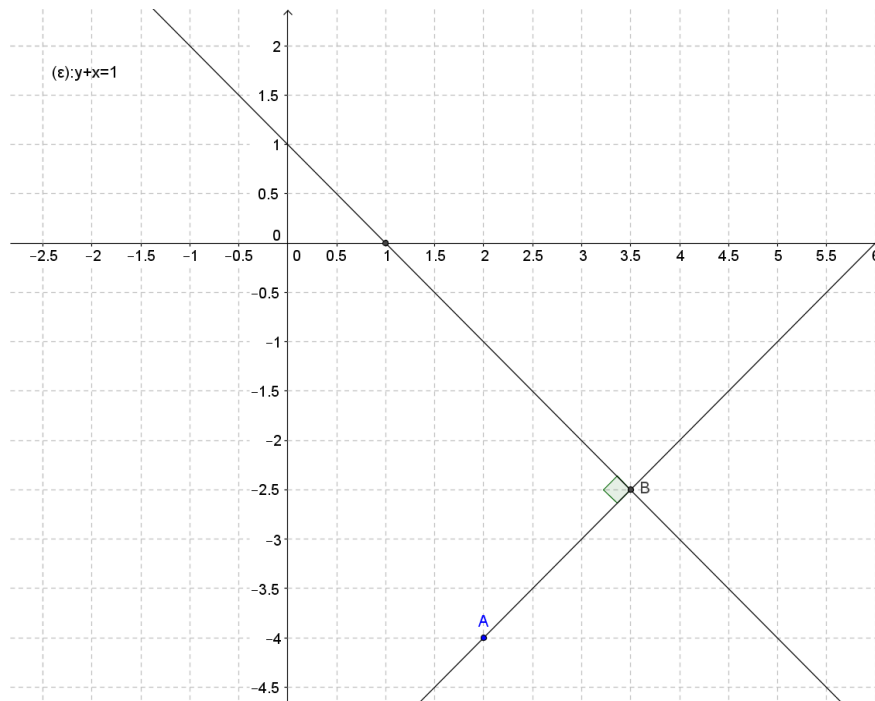
β) Η προβολή του A στην ευθεία (ε) είναι το σημείο τομής των (ε) , (ε_1) .

Οπότε λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους, έχουμε:

$$\begin{cases} y + x = 1 \\ y = x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 6) + x = 1 \\ y = x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 7 \\ y = x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{7}{2} - 6 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

άρα $B\left(\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

Επομένως η προβολή του Α πάνω στην (ε) είναι το σημείο $B\left(\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$



★Παρόμοιες Ασκήσεις Σχολικού : Παράγραφος 2.2 / Α' Ομάδα / Άσκηση 3

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (20066)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $A(3,1)$, $B(-1,1)$ και $\Gamma(2,4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΓ.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις του ύψους ΒΔ και της διαμέσου ΑΜ.

(Μονάδες 18)

ΛΥΣΗ

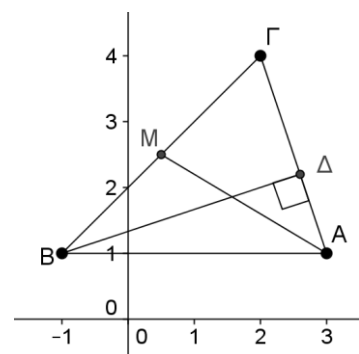
α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ΑΓ είναι

$$\lambda = \frac{4-1}{2-3} = \frac{3}{-1} = -3$$

Άρα η εξίσωση της ΑΓ είναι:

$$y - 1 = -3(x - 3) \quad \text{ή} \quad y = -3x + 10.$$

β) Επειδή $BD \perp AG$ είναι



$$\lambda_{BA} \cdot \lambda_{AG} = -1 \quad \text{ή} \quad -3 \cdot \lambda_{BA} = -1 \quad \text{ή} \quad \lambda_{BA} = \frac{1}{3}.$$

Άρα η εξίσωση του ύψους ΒΔ είναι:

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x + 1) \quad \text{ή} \quad 3y - 3 = x + 1 \quad \text{ή} \quad x - 3y + 4 = 0.$$

Οι συντεταγμένες του μέσου Μ της ΒΓ είναι

$$x = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}, \quad \text{δηλαδή} \quad M\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

Οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της διαμέσου ΑΜ είναι:

$$\lambda = \frac{\frac{5}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 3} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{5}.$$

Άρα η εξίσωση της ΑΜ είναι:

$$y - 1 = -\frac{3}{5}(x - 3) \quad \text{ή} \quad 5y - 5 = -3x + 9 \quad \text{ή} \quad 3x + 5y - 14 = 0.$$

★Παρόμοιες Ασκήσεις Σχολικού : Παράγραφος 2.1 / Α' Ομάδα / Εφαρμογή 1,
Παράγραφος 2.1 / Α' Ομάδα / Άσκηση

★Παρόμοιες Ασκήσεις Τράπεζας: 20140

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (20072)

Θεωρούμε μια ευθεία (ε) και ένα σημείο Α(6, -1) εκτός της (ε). Έστω Μ(2, 1) η προβολή του Α στην (ε).

Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της ευθείας (ε).

(Μονάδες 13)

β) Το συμμετρικό του Α ως προς την (ε).

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Αρχικά έχουμε,

$$\lambda_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{1 - (-1)}{2 - 6} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

Εφόσον το Μ είναι η προβολή του Α στην (ε) η ΑΜ θα είναι κάθετη στην (ε) και θα ισχύει ότι

$$AM \perp (ε) \Leftrightarrow \lambda_{AM} \cdot \lambda_{ε} = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \cdot \lambda_{ε} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{ε} = 2.$$

Η ευθεία (ε) έχει τη μορφή $y - y_0 = \lambda_{ε}(x - x_0)$. Όμως $\lambda_{ε} = 2$ και το Μ(2, 1) ανήκει στην (ε), άρα

$$y - 1 = 2(x - 2) \Leftrightarrow y - 1 = 2x - 4$$

Οπότε (ε) : $y = 2x - 3$

β) Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την (ε) . Το σημείο M θα είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AA' .

Οπότε :

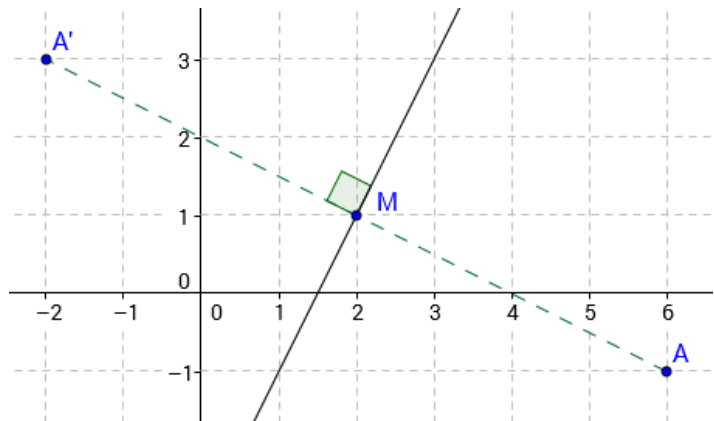
$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{6 + x_{A'}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4 = 6 + x_{A'} \Leftrightarrow x_{A'} = -2$$

και

$$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{-1 + y_{A'}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 = -1 + y_{A'} \Leftrightarrow y_{A'} = 3$$



Άρα το συμμετρικό του A ως προς την (ε) είναι το $A'(-2, 3)$

*Παρόμοιες Ασκήσεις Σχολικού: Παράγραφος 2.1 / Εφαρμογή 2, Παράγραφος 2.2 / Β' Ομάδας / Άσκηση 6

*Παρόμοιες Ασκήσεις Τράπεζας : 18602

ΑΣΚΗΣΗ Β5 (20073)

Δίνονται τα σημεία $A(2, 3)$, $B(-1, 5)$ και $\Gamma(-2, -4)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το συμμετρικό Δ του B ως προς το μέσο M της $A\Gamma$.

(Μονάδες 10)

γ) Τι σχήμα είναι το $AB\Gamma\Delta$; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (-1 - 2, 5 - 3) = (-3, 2) \text{ και}$$

$$\overrightarrow{B\Gamma} = (x_\Gamma - x_B, y_\Gamma - y_B) = (-2 - (-1), -4 - 5) = (-2 + 1, -9) = (-1, -9).$$

Παρατηρούμε ότι :

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -9 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-9) - 2 \cdot (-1) = 27 + 2 = 29 \neq 0$$

Οπότε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι μη συγγραμμικά, δηλαδή τα Α, Β, Γ είναι μη συνευθειακά, άρα σχηματίζουν κορυφές τριγώνου.

β) Το σημείο Μ είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ. Έτσι έχουμε :

$$x_M = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} = \frac{2 - 2}{2} = 0$$

$$y_M = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} = \frac{3 - 4}{2} = -\frac{1}{2}$$

Άρα έχουμε το μέσο $M\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ της ΑΓ.

Το σημείο Μ θα είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΔ.

Έτσι έχουμε :

$$x_M = \frac{x_B + x_\Delta}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{-1 + x_\Delta}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 = -1 + x_\Delta \Leftrightarrow x_\Delta = 1$$

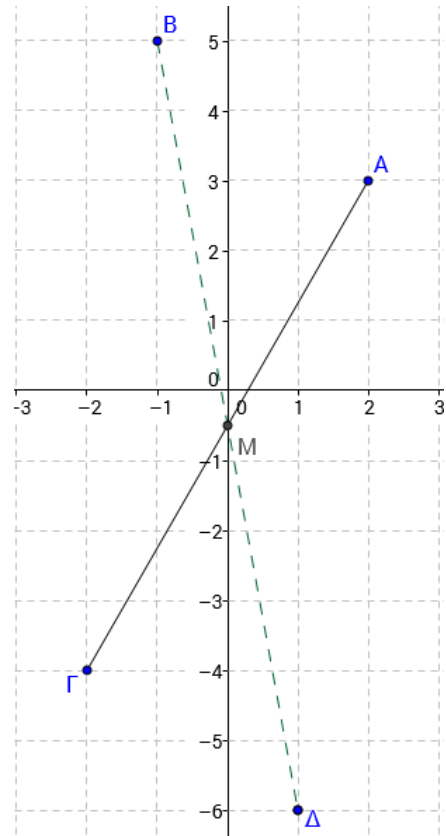
και

$$y_M = \frac{y_B + y_\Delta}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = \frac{5 + y_\Delta}{2}$$

$$\Leftrightarrow -1 = 5 + y_\Delta \Leftrightarrow y_\Delta = -6$$

Οπότε το συμμετρικό του σημείου Β ως προς το Μ είναι το Δ(1, -6)

γ) Παρατηρούμε ότι το σημείο Μ διχοτομεί τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.



★Παρόμοιες Ασκήσεις Σχολικού: Παράγραφος 2.1 / Εφαρμογή 2, Παράγραφος 2.1 /
★Α' Ομάδας / Άσκηση 6, Παράγραφος 2.2 / Β' Ομάδας / Άσκηση 6

ΑΣΚΗΣΗ Β6 (18584)

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1 : x - 2y - 8 = 0$, $\varepsilon_2 : 2x - 4y + 10 = 0$ και το σημείο Α της ε_1 που έχει τετμημένη το 4.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α

Μονάδες 5

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στην ευθεία ε_1

Μονάδες 10

γ) Αν Β είναι το σημείο τομής των ευθειών ε και ε_2 , τότε να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β

Μονάδες 10

ΛΥΣΗΜεθοδολογία :

Όταν θέλουμε να βρούμε τη σχετική θέση δύο ευθειών λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους. Δηλαδή :

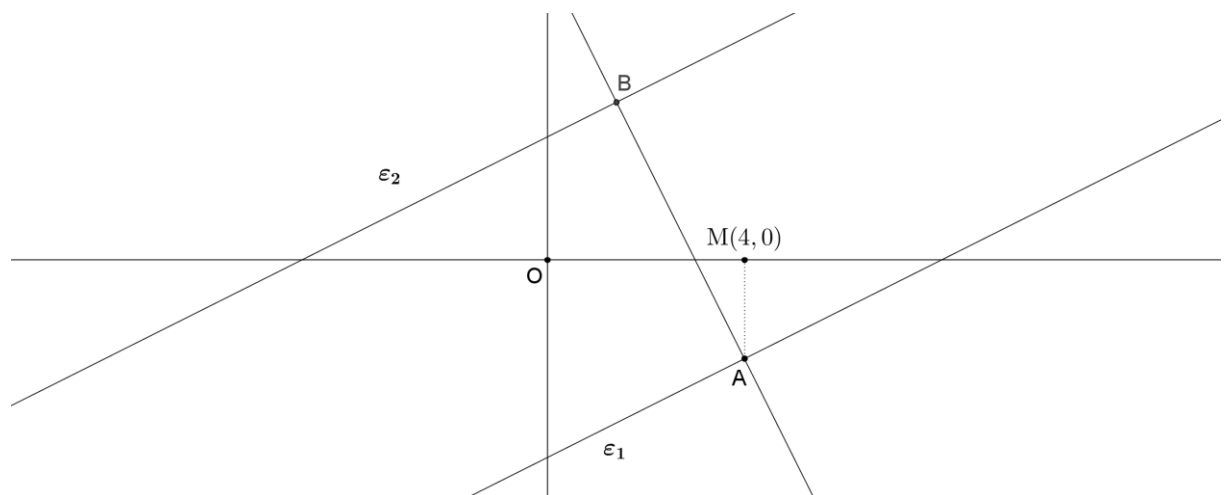
- ✓ Αν το σύστημα έχει **μία λύση** τότε οι ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο
- ✓ Αν το σύστημα είναι **αδύνατο** τότε οι ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο δηλαδή είναι παράλληλες
- ✓ Αν το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις** τότε οι ευθείες έχουν άπειρα κοινά σημεία δηλαδή ταυτίζονται

α) Οι συντεταγμένες του σημείου M επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε_1 . Από την εξίσωση της ευθείας ε_1 για $x = 4$ παίρνουμε:

$$4 - 2y - 8 = 0 \Rightarrow 2y = -4 \Rightarrow y = -2 \text{ επομένως είναι } A(4, -2)$$

β) Η ευθεία ε_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{1}{2}$ άρα η ζητούμενη ευθεία ε θα έχει συντελεστή διεύθυνσης -2 και επειδή διέρχεται από το σημείο $A(4, -2)$ θα έχει εξίσωση:

$$y - (-2) = -2(x - 4) \Rightarrow y = -2x + 6$$



γ) Θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών ε και ε_2 .
Είναι:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 10 = 0 \\ y = -2x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4(-2x + 6) + 10 = 0 \\ y = -2x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x = 14 \\ y = -2x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = \frac{16}{5} \end{cases}$$

Επομένως είναι $B\left(\frac{7}{5}, \frac{16}{5}\right)$.

★Παρόμοιες Ασκήσεις Σχολικού : Παράγραφος 2.2 / Α' Ομάδα / Άσκηση 2

ΑΣΚΗΣΗ Β7 (18587)

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x - 8y + 16 = 0$ και $\varepsilon_2 : 2x + y + 15 = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο M. Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα $y'y$ στα σημεία A, B αντίστοιχα, τότε:

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M, A και B

Μονάδες 10

β) Αν K είναι το μέσο του τμήματος AB, να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{MK}$

Μονάδες 15

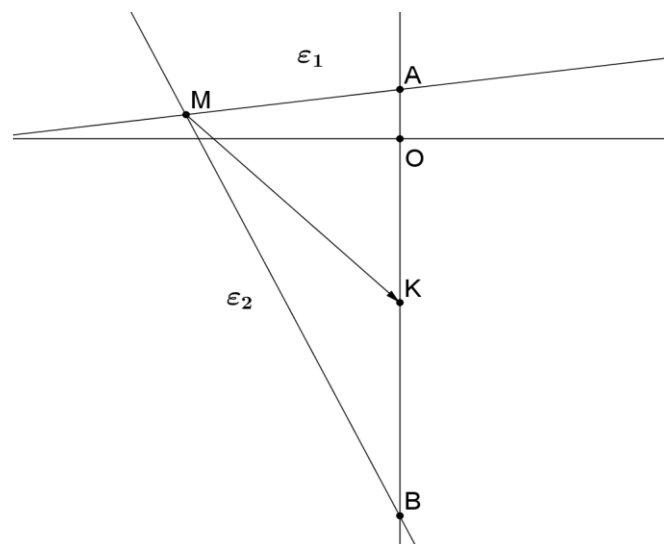
ΛΥΣΗ

α) Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου M θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών ε_1 και ε_2 .

Είναι:

$$\begin{cases} x - 8y + 16 = 0 \\ 2x + y + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8y - 16 \\ 2(8y - 16) + y + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8y - 16 \\ 17y = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 1 \end{cases}$$

Επομένως είναι $M(-8, 1)$.



Από την εξίσωση της ευθείας ε_1 για $x = 0$ παίρνουμε $-8y + 16 = 0 \Rightarrow y = 2$ άρα η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 2)$

Από την εξίσωση της ευθείας ε_2 για $x = 0$ παίρνουμε $y + 15 = 0 \Rightarrow y = -15$ άρα η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, -15)$

β) Το μέσο K του AB έχει συντεταγμένες $K\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ επομένως είναι $K\left(0, -\frac{13}{2}\right)$.

Το διάνυσμα $\overrightarrow{MK}$ έχει συντεταγμένες:

$$\overrightarrow{MK} = (x_K - x_M, y_K - y_M) = \left(0 - (-8), -\frac{13}{2} - 1\right) = \left(8, -\frac{15}{2}\right)$$

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης του $\overrightarrow{MK}$ είναι $\frac{-15}{8} = \frac{-15}{16}$

★Παρόμοιες Ασκήσεις Σχολικού :

ΑΣΚΗΣΗ Β8 (18589)

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 8x + y - 28 = 0$ και $\varepsilon_2 : x - y + 1 = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο M .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M και στη συνέχεια την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που διέρχονται από το M και έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ έχουν εξίσωση την $\lambda x - y - 3\lambda + 4 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου M , θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών ε_1 και ε_2

Είναι:

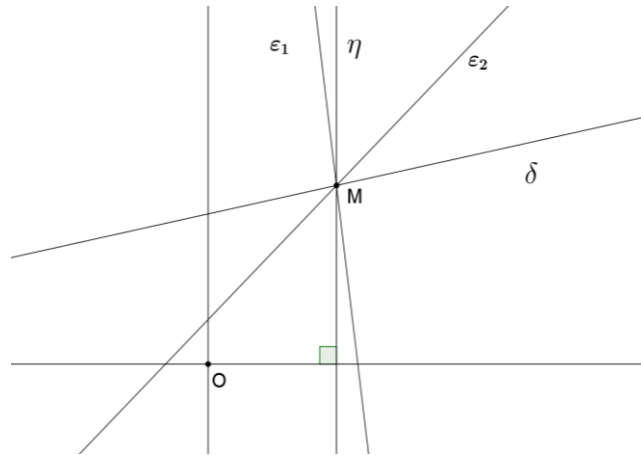
$$\begin{cases} 8x + y - 28 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + (x + 1) - 28 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x = 27 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο $M(3, 4)$.

Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο M και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $x = 3$

β) Μια ευθεία δ που διέρχεται από το σημείο $M(3, 4)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , έχει εξίσωση:

$$y - 4 = \lambda(x - 3) \Rightarrow y - 4 = \lambda x - 3\lambda \Rightarrow \lambda x - y - 3\lambda + 4 = 0$$



★ Παρόμοιες Ασκήσεις Σχολικού : Παράγραφος 2.2 / Α' Ομάδα / Άσκηση 3

ΑΣΚΗΣΗ Β9 (20063)

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα AB με μέσο M και $A(1, -2)$, $M(-2, 5)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου ε του ευθυγράμμου τμήματος AB, καθώς και τα κοινά σημεία αυτής με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Το M είναι μέσον του τμήματος AB οπότε θα έχουμε:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = \frac{1 + x_B}{2} \\ 5 = \frac{-2 + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = 1 + x_B \\ 10 = -2 + y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -5 \\ y_B = 12 \end{cases}$$

άρα: $B(-5, 12)$.

β) Έχουμε,

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{12 - (-2)}{-5 - 1} = \frac{14}{-6} = -\frac{7}{3}.$$

Είναι :

$$\varepsilon_\mu \perp AB \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_\mu} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_\mu} \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_\mu} = \frac{3}{7}$$

Γνωρίζω σημείο M και συντελεστή διεύθυνσης οπότε η εξίσωση της μεσοκαθέτου είναι

$$(\varepsilon_\mu): y - 5 = \frac{3}{7}(x - (-2)) \Leftrightarrow 7(y - 5) = 3(x + 2) \Leftrightarrow 7y - 35 = 3x + 6$$

ή

$$(\varepsilon_\mu): 3x - 7y + 41 = 0$$

Σημεία τομής της (ε_μ) με τους άξονες.

Για το $\Gamma((\varepsilon_\mu)$ με άξονα $x'x$) θέτω στην εξίσωση της (ε_μ) όπου $y = 0$ και λύνω ως προς

x
Επομένως,

$$3x - 7 \cdot 0 + 41 = 0 \Leftrightarrow 3x = -41 \Leftrightarrow x = -\frac{41}{3}$$

άρα, $\Gamma\left(-\frac{41}{3}, 0\right)$

Για το $\Delta((\varepsilon_\mu)$ με άξονα $y'y$) θέτω στην εξίσωση της (ε_μ) όπου $x = 0$ και λύνω ως προς y
δηλαδή,

$$3 \cdot 0 - 7 \cdot y + 41 = 0 \Leftrightarrow -7y = -41 \Leftrightarrow y = \frac{41}{7}$$

άρα : $\Delta\left(0, \frac{41}{7}\right)$

★Παρόμοιες Ασκήσεις Σχολικού : Παράγραφος 2.1 / Α' Ομάδα / Εφαρμογή 1,
Παράγραφος 2.1 / Α' Ομάδα / Άσκηση 4

★Παρόμοιες Ασκήσεις Τράπεζας : 20063

ΑΣΚΗΣΗ Β10 (20065)

Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): x + y + 2 = 0$ και το σημείο $A(5,1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η_1 , η οποία διέρχεται από το A και είναι κάθετη προς την ευθεία ε .

Μονάδες 9

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η_2 , η οποία διέρχεται από το A και είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών η_1 και η_2 και την απόστασή του από την αρχή των αξόνων

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$(\varepsilon): x + y + 2 = 0 \text{ με } \lambda_\varepsilon = -1.$$

Είναι :

$$\eta_1 \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\eta_1} \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\eta_1} \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\eta_1} = 1.$$

Γνωρίζω σημείο Α και συντελεστή διεύθυνσης όποτε η εξίσωση της ευθείας η_1 είναι:

$$(\eta_1): y - 1 = 1(x - 5) \Leftrightarrow y - 1 = x - 5.$$

άρα :

$$(\eta_1): x - y - 4 = 0.$$

β) Επειδή $\eta_2 // x'x$ είναι $\lambda_{\eta_2} = 0$ όποτε η εξίσωση της ευθείας η_2 είναι:

$$(\eta_2): y - 1 = 0 \cdot (x - 5),$$

άρα :

$$(\eta_2): y - 1 = 0$$

γ) Το κοινό σημείο Μ θα το βρούμε από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των δυο ευθειών η_1 και η_2 , δηλ.:

$$M: \begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 - 4 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Επομένως: $M(5,1)$.

Η απόσταση του Μ από την αρχή των αξόνων είναι:

$$(OM) = \sqrt{(5-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

★Παρόμοιες Ασκήσεις Σχολικού :-

ΑΣΚΗΣΗ Β11 (18592)

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x - 3y + 5 = 0$ και $\varepsilon_2: 3x + y - 5 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους

Μονάδες 9

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών ε_1 και ε_2

Μονάδες 9

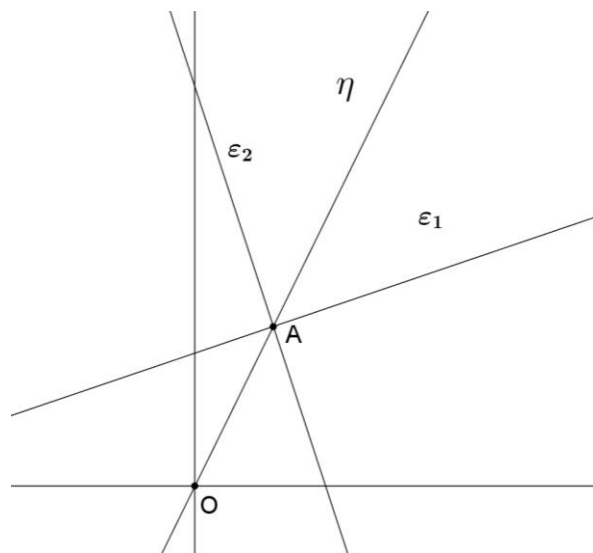
γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α και την αρχή Ο των αξόνων

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ και $\lambda_2 = -3$

αντίστοιχα. Επειδή $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ προκύπτει ότι $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$



β) Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών ε_1 και ε_2 θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών αυτών.

Είναι:

$$\begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ 3x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y - 5 \\ 3(3y - 5) + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y - 5 \\ 10y = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο Α(1,2)

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΟΑ είναι: $\lambda = \frac{2-0}{1-0} = 2$ και επειδή

διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων η ευθεία αυτή έχει εξίσωση $y = 2x$.

ΑΣΚΗΣΗ Β12 (18595)

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 2y - 4 = 0$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών ε_1 και ε_2 (Μονάδες 8)

β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Β και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ, τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ (Μονάδες 8)

ii) να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Β και Γ έχει εξίσωση την $3x - 4y - 12 = 0$

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Για να βρούμε το σημείο τομής Α των ευθειών ε_1 και ε_2 , αρκεί να λύσουμε το

σύστημα
$$\begin{cases} 3x + y + 3 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{cases} 3x + y + 3 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = -3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \xrightarrow{(-3)} \begin{cases} 3x + y = -3 \\ -3x - 6y = -12 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} 3x + y = -3 \\ -5y = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y = -15 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x + 2 \cdot 3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Συνεπώς η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (-2, 3)$ και άρα το σημείο τομής είναι το $A(-2, 3)$

β) i) Αφού η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B , τότε αυτό θα έχει συντεταγμένες $B(0, y_B)$ και θα επαληθεύει την εξίσωση της.

$$\text{Δηλαδή } 3 \cdot 0 + y_B + 3 = 0 \Leftrightarrow y_B = -3, \text{ άρα } B(0, -3)$$

Ομοίως αφού η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ , τότε αυτό θα έχει συντεταγμένες $\Gamma(x_\Gamma, 0)$ και θα επαληθεύει την εξίσωση της.

$$\text{Δηλαδή } x_B + 2 \cdot 0 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_B - 4 = 0 \Leftrightarrow x_B = 4, \text{ άρα } \Gamma(4, 0)$$

ii) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία B και Γ

$$\text{ισούται με } \lambda = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} = \frac{0 - (-3)}{4 - 0} = \frac{3}{4}.$$

Η ζητούμενη ευθεία διέρχεται από το σημείο $B(0, -3)$ και έχει συντελεστή

$$\text{διεύθυνσης } \lambda = \frac{3}{4}.$$

Επομένως έχει εξίσωση,

$$\begin{aligned} y - y_B &= \lambda(x - x_B) \Leftrightarrow y - (-3) = \frac{3}{4}(x - 0) \Leftrightarrow y + 3 = \frac{3}{4}x \Leftrightarrow 4y + 12 = 3x \\ &\Leftrightarrow 3x - 4y - 12 = 0 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β13 (18601)

Έστω $M(3, 5)$ το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB με $A(1, 1)$

α) Να βρείτε

i) τις συντεταγμένες του σημείου B

(Μονάδες 6)

ii) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου K του άξονα $x'x$ έτσι, ώστε να ισχύει

$$(KA) = (KB)$$

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) i) Για τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος AB ισχύει ότι

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ και } y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου B έχουμε,

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Leftrightarrow 2x_M = x_A + x_B \Leftrightarrow x_B = 2x_M - x_A \Leftrightarrow x_B = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

και

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Leftrightarrow 2y_M = y_A + y_B \Leftrightarrow y_B = 2y_M - y_A \Leftrightarrow y_B = 2 \cdot 5 - 1 = 9$$

Επομένως το σημείο B είναι το B(5,9)

ii) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B ισούται με

$$\lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9 - 1}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2$$

Η ζητούμενη ευθεία διέρχεται από το σημείο A(1,1) και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 2$. Επομένως έχει εξίσωση,

$$y - y_A = \lambda_e (x - x_A) \Leftrightarrow y - 1 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = 2x - 2 \Leftrightarrow y = 2x - 1$$

β) Αφού το σημείο K βρίσκεται πάνω στον άξονα x'x θα έχει συντεταγμένες $K(x_K, 0)$. Ισχύει ότι $(KA) = (KB)$

Επομένως

$$\begin{aligned} (KA) = (KB) &\Leftrightarrow \sqrt{(x_A - x_K)^2 + (y_A - y_K)^2} = \sqrt{(x_B - x_K)^2 + (y_B - y_K)^2} \Leftrightarrow \\ \sqrt{(1 - x_K)^2 + (1 - 0)^2} &= \sqrt{(5 - x_K)^2 + (9 - 0)^2} \Leftrightarrow (1 - x_K)^2 + (1 - 0)^2 = (5 - x_K)^2 + (9 - 0)^2 \Leftrightarrow \\ (1 - x_K)^2 + 1 &= (5 - x_K)^2 + 81 \Leftrightarrow 1 - 2 \cdot x_K + x_K^2 + 1 = 25 - 10 \cdot x_K + x_K^2 + 81 \Leftrightarrow \\ 8 \cdot x_K &= 104 \Leftrightarrow x_K = \frac{104}{8} \Leftrightarrow x_K = 13 \end{aligned}$$

Άρα K(13,0).

★Παρόμοιες Ασκήσεις Σχολικού : Παράγραφος 2.3 / Α' Ομάδα / Άσκηση 4

ΑΣΚΗΣΗ Β14 (18600)

Θεωρούμε την ευθεία ε_1 που τέμνει τους άξονες x'x και y'y στα σημεία A(3,0) και B(0,6) αντίστοιχα.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1

(Μονάδες 8)

β) Αν ε_2 είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ε_1 , τότε να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ε_2

(Μονάδες 9)

ii) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε_1 και ε_2

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε_1 που διέρχεται από τα σημεία A και B

$$\text{ισούται με } \lambda_{\varepsilon_1} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6 - 0}{0 - 3} = -\frac{6}{3} = -2.$$

Η ευθεία ε_1 διέρχεται από το σημείο A(3,0) και έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{\varepsilon_1} = -2.$$

Επομένως έχει εξίσωση,

$$y - y_A = \lambda_{\varepsilon_1} (x - x_A) \Leftrightarrow y - 0 = -2(x - 3) \Leftrightarrow y = -2x + 6$$

Άρα η ευθεία ε_1 έχει εξίσωση $\varepsilon_1 : 2x + y - 6 = 0$

β) i) Αφού η ευθεία ε_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση της μορφής $\varepsilon_2 : y = \lambda_{\varepsilon_2} \cdot x$. Επίσης οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης τους ισούται με -1 . Δηλαδή,

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_2} = \frac{-1}{\lambda_{\varepsilon_1}} \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_2} = \frac{-1}{-2} \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_2} = \frac{1}{2}$$

Επομένως η ευθεία ε_2 έχει εξίσωση $\varepsilon_2 : y = \lambda_{\varepsilon_2} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot x$

ii) Έστω $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 . Για να βρούμε το σημείο

$$\text{τομής } \Gamma \text{ αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων } \begin{cases} 2x + y - 6 = 0 & (\varepsilon_1) \\ y = \frac{1}{2} \cdot x & (\varepsilon_2) \end{cases}$$

Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ y = \frac{1}{2} \cdot x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{1}{2} \cdot x - 6 = 0 \\ y = \frac{1}{2} \cdot x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + x - 12 = 0 \\ y = \frac{1}{2} \cdot x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{5} \\ y = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Συνεπώς η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = \left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$ που είναι οι

συντεταγμένες του σημείου Γ .

★Παρόμοιες Ασκήσεις Σχολικού : -

★Παρόμοιες Ασκήσεις Τράπεζας : 20072

ΑΣΚΗΣΗ Β15 (22506)

Θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$, όπου $\alpha \cdot \beta > 0$ και $\alpha \neq \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $AB: y = -\frac{\beta}{\alpha}x + \beta$

Μονάδες 7

β) Αν ε είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M(\alpha, \beta)$ και είναι κάθετη προς την ευθεία AB , τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση ε

Μονάδες 9

ii) αν η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο K και τον άξονα $y'y$ στο σημείο Λ , να αποδείξετε ότι $(OK\Lambda) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{2\alpha\beta}$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι: $\lambda_{AB} = \frac{\beta - 0}{0 - \alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$

Επομένως η ευθεία έχει εξίσωση

$$\varepsilon_{AB}: y - 0 = -\frac{\beta}{\alpha}(x - \alpha) \Leftrightarrow y = -\frac{\beta}{\alpha}x + \beta$$

β) i) $\varepsilon \perp AB \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} \cdot \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = \frac{\alpha}{\beta}$

άρα η ευθεία ε έχει εξίσωση

$$\varepsilon: y - \beta = \frac{\alpha}{\beta}(x - \alpha) \Leftrightarrow y - \beta = \frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\alpha^2}{\beta} \Leftrightarrow y = \frac{\alpha}{\beta}x + \beta - \frac{\alpha^2}{\beta} \Leftrightarrow y = \frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta}$$

ii) Έχουμε

$$\begin{cases} \varepsilon: y = \frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta} \\ x'x: y = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = \frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta} \Rightarrow 0 = \alpha x + \beta^2 - \alpha^2 \Rightarrow \alpha x = \alpha^2 - \beta^2 \Rightarrow x = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha}$$

άρα

$$K\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha}, 0\right)$$

Όμοια για τις συντεταγμένες του σημείου Λ .

$$\begin{cases} \varepsilon: y = \frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta} \\ y'y: x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{\alpha}{\beta} \cdot 0 + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta} \Rightarrow y = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta}$$

Επομένως

$$\Lambda\left(0, \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta}\right).$$

Τέλος,

$$(\text{OK}) = \left| \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha} \right| \text{ και } (\text{ΟΛ}) = \left| \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta} \right|$$

άρα

$$\begin{aligned} (\text{ΟΚΛ}) &= \frac{1}{2} \cdot (\text{OK}) \cdot (\text{ΟΛ}) = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha} \right| \cdot \left| \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\alpha^2 - \beta^2|}{|\alpha|} \cdot \frac{|\beta^2 - \alpha^2|}{|\beta|} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{|\alpha^2 - \beta^2|^2}{|\alpha\beta|} \stackrel{\alpha\beta > 0}{=} \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{2\alpha\beta} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β16 (22517)

Θεωρούμε τα σημεία $A(6, \mu)$ και $B(\mu + 2, \mu + 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$, τα σημεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους και να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα A και B .

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του μ , το σημείο $\Gamma(4, 2)$ περιέχεται στην ευθεία AB .

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι τα σημεία A και B ταυτίζονται, τότε

$$\begin{cases} 6 = \mu + 2 \\ \mu = \mu + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 4 \\ 0 \cdot \mu = 1, \text{ αδύνατο} \end{cases}$$

Άρα τα σημεία A και B είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

Η ευθεία (ε) που διέρχεται από τα AB θα έχει τη μορφή : $(\varepsilon_1): y - y_0 = \lambda_{AB}(x - x_0)$

$$\text{Αν } \mu \neq 4 \text{ τότε έχουμε } \lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\mu + 1 - \mu}{\mu + 2 - 6} = \frac{1}{\mu - 4} \text{ και}$$

$$A(6, \mu) \in (\varepsilon_1): y - \mu = \frac{1}{\mu - 4}(x - 6) \Leftrightarrow (\varepsilon_1): y = \frac{1}{\mu - 4}x - \frac{6}{\mu - 4} + \mu$$

Αν $\mu = 4$ τότε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(6, 4)$ και $B(6, 5)$ θα έχει τη μορφή $(\varepsilon_2): x = 6$.

β) Αν $\mu \neq 4$, τότε το $\Gamma(4, 2)$ ανήκει στην ευθεία (ε_1) αν και μόνο αν

$$2 = \frac{1}{\mu-4} 4 - \frac{6}{\mu-4} + \mu \Leftrightarrow 2 - \mu = \frac{-2}{\mu-4} \Leftrightarrow (2-\mu)(\mu-4) = -2$$

$$\Leftrightarrow 2\mu - 8 - \mu^2 + 4\mu = -2 \Leftrightarrow \mu^2 - 6\mu + 6 = 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 36 - 24 = 12, \mu_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(3 \pm \sqrt{3})}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$$

Επομένως για $\mu_1 = 3 + \sqrt{3}$ και $\mu_2 = 3 - \sqrt{3}$ το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία ΑΒ

Αν $\mu = 4$ τότε το σημείο Γ δεν ανήκει στην ευθεία (ε_2): $x = 6$

ΑΣΚΗΣΗ Β17 (22520)

Έστω Α(-1, 1), Β(2, 0) και Γ(-1, 3) τρία σημεία του επιπέδου.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x, y) ώστε :

$$3\overline{AM}^2 - 5\overline{BM}^2 + 2\overline{GM}^2 = 0 \text{ είναι η ευθεία } \varepsilon: 5x - 3y + 1 = 0$$

Μονάδες 13

β) Να βρείτε ευθεία κάθετη στην (ε) που διέρχεται από το μέσο Κ του τμήματος ΑΓ

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε :

$$\overline{AM}^2 = \sqrt{(x - (-1))^2 + (y - 1)^2}^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1$$

$$= x^2 + 2x + y^2 - 2y + 2$$

$$\overline{BM}^2 = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 0)^2}^2 = (x-2)^2 + y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2$$

$$\overline{GM}^2 = \sqrt{(x - (-1))^2 + (y - 3)^2}^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9$$

$$= x^2 + 2x + y^2 - 6y + 10$$

Οπότε :

$$3\overline{AM}^2 - 5\overline{BM}^2 + 2\overline{GM}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 + 2x + y^2 - 2y + 2) - 5(x^2 - 4x + 4 + y^2) + 2(x^2 + 2x + y^2 - 6y + 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 3y^2 - 6y + 6 - 5x^2 + 20x - 20 - 5y^2 + 2x^2 + 4x + 2y^2 - 12y + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow 30x - 18y + 6 = 0 \Leftrightarrow 5x - 3y + 1 = 0$$

β) Έχουμε :

$$x_K = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} = \frac{-1 + (-1)}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ και } y_K = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} = \frac{1 + 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Οπότε το μέσο του ΑΓ είναι το Κ(-1, 2). Έστω (δ) : $y - y_0 = \lambda_\delta (x - x_0)$ η ευθεία που είναι κάθετη στην (ε) και διέρχεται από το σημείο Κ.

$$\text{Επειδή } \varepsilon \perp \delta, \text{ ισχύει } \lambda_\delta \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta \cdot \frac{5}{3} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = -\frac{3}{5}.$$

Επίσης

$$Κ(-1, 2) \in (\delta) : y - 2 = -\frac{3}{5} (x + 1)$$

$$\Leftrightarrow y - 2 = -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5} \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5} + 2 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x + \frac{7}{5}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β18 (22525)

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οι πλευρές του ΑΒ και ΑΔ βρίσκονται πάνω στις ευθείες εξισώσεις ε₁: $2x + y + 2 = 0$ και ε₂: $x - 2y + 6 = 0$ αντίστοιχα. Αν το κέντρο του είναι το σημείο Κ(-1, -2), τότε:

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α και να αποδείξετε ότι Γ(0, -6).

Μονάδες 12

β) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΓΔ και τις συντεταγμένες της κορυφής Δ.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Το σημείο Α είναι το σημείο τομής των πλευρών ΑΒ και ΑΔ. Για να το βρούμε λύνουμε το σύστημα,

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x - 2y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 2 \\ x + 4x + 4 + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases} \text{ άρα } Α(-2, 2)$$

Θα βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου Γ. Το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι Κ(-1, -2), άρα

$$x_K = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} \Rightarrow -1 = \frac{-2 + x_\Gamma}{2} \Rightarrow x_\Gamma = 0$$

$$y_K = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} \Rightarrow -2 = \frac{2 + y_\Gamma}{2} \Rightarrow y_\Gamma = -6$$

άρα Γ(0, -6)

β) Έχουμε,

$$\lambda_{\Gamma\Delta} = \lambda_{AB} \Rightarrow \lambda_{\Gamma\Delta} = -2$$

άρα η εξίσωση της ευθείας ΓΔ είναι

$$y - (-6) = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x - 6$$

ΑΣΚΗΣΗ Β19 (22531)

Θεωρούμε την εξίσωση $(2\lambda - 1)x + (18 - 11\lambda)y + 9\lambda - 17 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, (1).

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, παριστάνει ευθεία.

Μονάδες 10

β) Αν $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για $\lambda = 1, \lambda = 2$ αντίστοιχα, να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Είναι : $A = 2\lambda - 1, B = 18 - 11\lambda$ και $\Gamma = 9\lambda - 17$

$$A = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \text{ και } B = 0 \Leftrightarrow 18 - 11\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{18}{11}.$$

Επειδή δεν υπάρχουν τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να μηδενίζονται ταυτόχρονα οι συντελεστές A και B , η εξίσωση (1) είναι εξίσωση ευθείας για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για $\lambda = 1$ έχουμε την ευθεία

$$\varepsilon_1 : x + 7y - 8 = 0$$

και για $\lambda = 2$ έχουμε την ευθεία

$$\varepsilon_2 : 3x - 4y + 1 = 0.$$

Θεωρούμε τα διανύσματα:

$$\delta_1 = (7, -1) // (\varepsilon_1) \text{ και } \delta_2 = (-4, -3) // (\varepsilon_2).$$

Τότε η οξεία γωνία θ των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι ίση ή παραπληρωματική της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2$.

Οπότε:

$$\cos(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1| \cdot |\vec{\delta}_2|} = \frac{7 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{7^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}} = \frac{-28 + 3}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{25}} = \frac{-25}{5\sqrt{2} \cdot 5} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

άρα

$$(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$$

οπότε η οξεία γωνία των ευθειών είναι η παραπληρωματική της δηλαδή

$$\vartheta = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

Δ Θέματα 2.1 – 2.2

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (18621)

Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon: 2\kappa x - (1 + \kappa)y + 1 - 3\kappa = 0 \text{ και } \zeta: (1 + 3\kappa)x + (\kappa - 1)y + 2 - 6\kappa = 0 \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του κ , ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες

Μονάδες 10

β) Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ)

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Για $\kappa \neq -1$ είναι

$$\lambda_{\varepsilon} = -\frac{A}{B} = -\frac{2\kappa}{-(1+\kappa)} = \frac{2\kappa}{\kappa+1}$$

Για $\kappa \neq 1$ είναι

$$\lambda_{\zeta} = -\frac{A}{B} = -\frac{1+3\kappa}{\kappa-1} = \frac{1+3\kappa}{1-\kappa}$$

Έτσι λοιπόν για $\kappa \neq 1$ και $\kappa \neq -1$ είναι

$$(\varepsilon) \parallel (\zeta) \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = \lambda_{\zeta} \Leftrightarrow \frac{2\kappa}{\kappa+1} = \frac{1+3\kappa}{1-\kappa} \Leftrightarrow 2\kappa - \kappa^2 = 3\kappa^2 + 3\kappa + \kappa + 1 \Leftrightarrow 4\kappa^2 + 2\kappa + 1 = 0$$

η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$$\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$$

άρα για κάθε $\kappa \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ είναι $(\varepsilon) \not\parallel (\zeta)$

- Αν $\kappa = 1$ τότε $(\varepsilon): 2x - 2y - 2 = 0$ και $(\zeta): 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ δηλαδή η (ζ) είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ αλλά η (ε) δεν είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ άρα $(\varepsilon) \not\parallel (\zeta)$
- Αν $\kappa = -1$ τότε $(\varepsilon): -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ και $(\zeta): -2x - 2y + 8 = 0$ δηλαδή η (ε) είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ αλλά η (ζ) δεν είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ άρα $(\varepsilon) \not\parallel (\zeta)$

Οπότε δεν υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε $(\varepsilon) \parallel (\zeta)$

β) Παίρνουμε,

$$\vec{\delta}_1 = (1 + \kappa, 2\kappa) \text{ και } \vec{\delta}_2 = (1 - \kappa, 1 + 3\kappa) \text{ με } \vec{\delta}_1 \parallel (\varepsilon) \text{ και } \vec{\delta}_2 \parallel (\zeta)$$

Είναι

$$\cos(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}) = \frac{|\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2|}{|\vec{\delta}_1| \cdot |\vec{\delta}_2|} = \frac{(1 + \kappa)(1 - \kappa) + 2\kappa(1 + 3\kappa)}{\sqrt{(1 + \kappa)^2 + 4\kappa^2} \cdot \sqrt{(1 - \kappa)^2 + (1 + 3\kappa)^2}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 - \kappa^2 + 2\kappa + 6\kappa^2}{\sqrt{1 + 2\kappa + \kappa^2 + 4\kappa^2} \cdot \sqrt{1 - 2\kappa + \kappa^2 + 1 + 6\kappa + 9\kappa^2}} = \\
 &= \frac{5\kappa^2 + 2\kappa + 1}{\sqrt{5\kappa^2 + 2\kappa + 1} \cdot \sqrt{10\kappa^2 + 4\kappa + 2}} = \frac{5\kappa^2 + 2\kappa + 1}{\sqrt{5\kappa^2 + 2\kappa + 1} \cdot \sqrt{2(5\kappa^2 + 2\kappa + 1)}} = \\
 &= \frac{5\kappa^2 + 2\kappa + 1}{\sqrt{5\kappa^2 + 2\kappa + 1}^2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\kappa^2 + 2\kappa + 1}{(5\kappa^2 + 2\kappa + 1) \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

Οπότε $(\widehat{\delta_1, \delta_2}) = 45^\circ$ άρα η οξεία γωνία των (ϵ) και (ζ) είναι 45° δηλαδή η αμβλεία γωνία τους θα είναι 135°

★Παρόμοιες Ασκήσεις Σχολικού: Παράγραφος 2.2 / Εφαρμογή 3, Παράγραφος 2.2,

★Παράγραφος 2.2 / Α' Ομάδα, Άσκηση 5, Παράγραφος 2.2 / Β' Ομάδα, Άσκηση 4

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (18610)

Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1 : 2x - y - 10\lambda + 16 = 0$ και $\epsilon_2 : 10x + y - 2\lambda - 4 = 0$ όπου

$\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 τέμνονται και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους M

Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ το σημείο M ανήκει στην ευθεία $\epsilon : 8x + y - 6 = 0$

Μονάδες 7

γ) Αν η ευθεία ϵ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και είναι παράλληλη προς την ευθεία AB

Μονάδες 5

ii) αν K είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ζ να αποδείξετε ότι $(KAB) = \frac{9}{4}$

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

α) Οι ϵ_1 και ϵ_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης αντίστοιχα $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = -10$

Επειδή $\lambda_1 \neq \lambda_2$ οι ϵ_1 και ϵ_2 τέμνονται.

Οι συντεταγμένες του σημείου τομής τους M είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 2x - y - 10\lambda + 16 = 0 \\ 10x + y - 2\lambda - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 10\lambda - 16 \\ 10x + y = 2\lambda + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x = 12\lambda - 12 \\ y = 2\lambda + 4 - 10x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = -8\lambda + 14 \end{cases}$$

Άρα $M(\lambda - 1, -8\lambda + 14)$

β) Είναι,

$$8x + y - 6 = 0 \Leftrightarrow 8(\lambda - 1) - 8\lambda + 14 - 6 = 0 \Leftrightarrow 8\lambda - 8 - 8\lambda + 14 - 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ που ισχύει}$$

Δηλαδή οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την εξίσωση $8x + y - 6 = 0$

Συνεπώς για κάθε τιμή της παραμέτρου λ το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία

$$\varepsilon: 8x + y - 6 = 0$$

γ) Για $y = 0$ είναι $8x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{8} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$ συνεπώς $A(\frac{3}{4}, 0)$

Για $x = 0$ είναι $y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = 6$ συνεπώς $B(0, 6)$

i) Η ευθεία AB έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = \frac{6 - 0}{0 - \frac{3}{4}} = \frac{6}{-\frac{3}{4}} = -8$$

Άρα η ευθεία ζ που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και είναι παράλληλη προς την ευθεία AB έχει εξίσωση $y = -8x$

ii) Για $x = \alpha$ είναι $y = -8\alpha$ συνεπώς $K(\alpha, -8\alpha)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας ζ

τότε $\overrightarrow{BK} = (\alpha, -8\alpha - 6)$ και $\overrightarrow{BA} = (\frac{3}{4}, -6)$

και

$$(KAB) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BA})| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \alpha & -8\alpha - 6 \\ \frac{3}{4} & -6 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-6\alpha + 6\alpha + \frac{9}{2}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{4}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (18612)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει γεωμετρικά δύο ευθείες γραμμές ε_1 και ε_2 οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους.

(Μονάδες 7)

β) Αν $\varepsilon_1: x + y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2: x + y - 4 = 0$, να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ε των ε_1 και ε_2 .

(Μονάδες 8)

γ) Αν Α είναι σημείο της ευθείας ε_1 με τεταγμένη το 2 και Β σημείο της ευθείας ε_2 με τεταγμένη το 1, τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β

(Μονάδες 2)

ii) να βρείτε τις συντεταγμένες δύο σημείων Γ και Δ της ευθείας ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο ΑΓΒΔ να είναι τετράγωνο.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε το πρώτο μέλος της (1) τριώνυμο με μεταβλητή x :

$$x^2 + (2y - 6)x + y^2 - 6y + 8 = 0$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2y - 6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (y^2 - 6y + 8) = 4y^2 - 24y + 36 - 4y^2 + 24y - 32 = 4 > 0$$

Επομένως, η εξίσωση θα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(2y - 6) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-(2y - 6) \pm 2}{2} \\ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2y + 6 + 2}{2} \\ x_2 = \frac{-2y + 6 - 2}{2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2y + 8}{2} \\ x_2 = \frac{-2y + 4}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -y + 4 \\ x_2 = -y + 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Συνεπώς, η (1) παριστάνει δύο ευθείες με εξισώσεις $\varepsilon_1 : y = -x + 4$ και

$$\varepsilon_2 : y = -x + 2$$

οι οποίες είναι παράλληλες, με συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή κλίση, $\lambda_{\varepsilon_1} = -1 = \lambda_{\varepsilon_2}$.

β) Αν ε η μεσοπαράλληλος των $\varepsilon_1 : y = -x + 2$ και $\varepsilon_2 : y = -x + 4$, τότε αυτή θα έχει εξίσωση της μορφής

$$y = -x + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\text{αφού } \varepsilon // \varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} = -1$$

Επιπλέον,

$$d(\varepsilon, \varepsilon_1) = d(\varepsilon, \varepsilon_2) = \frac{d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{2}$$

Είναι:

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = \frac{|2 - 4|}{\sqrt{1 + (-1)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

και

$$d(\varepsilon, \varepsilon_1) = \frac{|2 - k|}{\sqrt{1 + (-1)^2}} = \frac{|2 - k|}{\sqrt{2}} = \frac{|2 - k|\sqrt{2}}{2}$$

Οπότε,

$$d(\varepsilon, \varepsilon_1) = \frac{d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{2} \Leftrightarrow \frac{|2 - k|\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |2 - k| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - k = 1 \\ \text{ή} \\ 2 - k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ \text{ή} \\ k = 3 \end{cases}$$

Για $k=1$ η εξίσωση της ε θα είναι $y = -x + 1$

Για $k=3$ η εξίσωση της ε θα είναι $y = -x + 3$

$$\checkmark \quad \text{Αν } \varepsilon : y = -x + 1, \text{ τότε } d(\varepsilon, \varepsilon_1) = \frac{|2 - 1|}{\sqrt{1 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και}$$

$$d(\varepsilon, \varepsilon_2) = \frac{|4-1|}{\sqrt{1+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα, η $\varepsilon : y = -x + 1$ δεν είναι η μεσοπαράλληλος των ε_1 και ε_2 .

$$\checkmark \quad \text{Αν } \varepsilon : y = -x + 3, \text{ τότε } d(\varepsilon, \varepsilon_1) = \frac{|2-3|}{\sqrt{1+(-1)^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και}$$

$$d(\varepsilon, \varepsilon_2) = \frac{|4-3|}{\sqrt{1+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα, η $\varepsilon : y = -x + 3$ είναι η ζητούμενη ευθεία.

2^{ος} τρόπος

Έστω ένα σημείο Κ που ανήκει στην ε_1 και ένα σημείο Λ που ανήκει στην ε_2 . Για $x = 0$ στην ε_1 έχουμε $y = 4$. Άρα το Κ(0, 4) ανήκει στην ε_1 . Για $x = 0$ στην ε_2 έχουμε $y = 2$. Άρα το Λ(0, 2) ανήκει στην ε_2 . Βρίσκουμε το μέσο Μ του ΚΛ, που είναι

$$x_M = \frac{x_K + x_\Lambda}{2} = \frac{0+0}{2} = 0 \text{ και } y_M = \frac{y_K + y_\Lambda}{2} = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Οπότε έχουμε το Μ(0,3) που ανήκει στην μεσοπαράλληλη των ε_1 και ε_2 . Επίσης $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} = \lambda_{\varepsilon_3} = -1$.

Οπότε έχουμε την $\varepsilon : y - 3 = -1(x - 0) \Leftrightarrow y = -x + 3$

γ)

i. Για $y=2$ η εξίσωση της ε_1 δίνει:

$$2 = -x + 2 \Leftrightarrow x = 0, \text{ άρα, } A(0,2).$$

Για $x=1$ η εξίσωση της ε_2 δίνει:

$$y = -1 + 4 \Leftrightarrow y = 3, \text{ άρα, } B(1,3)$$

ii. Έστω Δ (κ, λ) σημείο της ευθείας (ε), τότε $\lambda = -\kappa + 3$ (2).

Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο αν και μόνο αν είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

Αφού είναι ορθογώνιο θα ισχύει:

$$\overrightarrow{ΑΔ} \perp \overrightarrow{ΔΒ} \Leftrightarrow (\kappa, \lambda - 2) \cdot (1 - \kappa, 3 - \lambda) = 0$$

$$\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} (\kappa, -\kappa + 1) \cdot (1 - \kappa, \kappa) = 0$$

$$\Leftrightarrow \kappa \cdot (1 - \kappa) + \kappa \cdot (-\kappa + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \kappa - \kappa^2 - \kappa^2 + \kappa = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\kappa - 2\kappa^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \kappa - \kappa^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \kappa \cdot (1 - \kappa) = 0$$

$$\Leftrightarrow \kappa = 0 \text{ ή } \kappa = 1$$

Οπότε,

- Για $\kappa=0$ είναι $\lambda=-0+3=3$
- Για $\kappa=1$ είναι $\lambda=-1+3=2$

Άρα, $\Delta(0, 3)$ ή $\Delta(1, 2)$. Αν $\Delta(0, 3)$,

τότε $\Gamma(1, 2)$ και αντίστροφα.

Επιπλέον,

$(AB) = (B\Gamma) = (\Gamma\Delta) = (\Delta A) = 1$, άρα

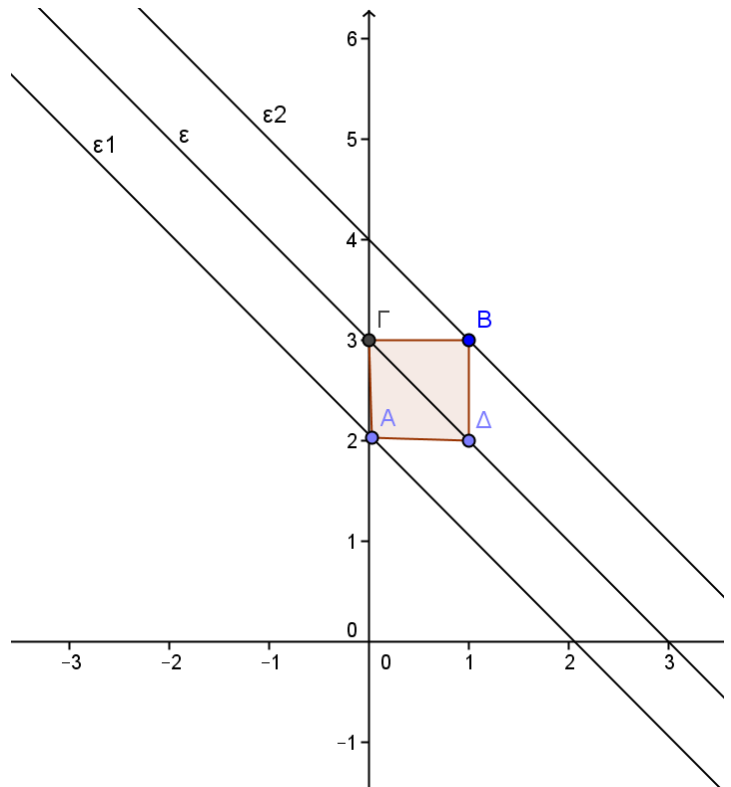
το $AB\Gamma\Delta$ είναι και ρόμβος και τελικά είναι τετράγωνο.

*Παρόμοιες Ασκήσεις Σχολικού:

Παράγραφος 2.2 / Β' Ομάδα /

Άσκηση 1, Παράγραφος 2.3 / Α'

Ομάδα / Άσκηση 6



ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (18613)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2xy - 3\lambda x + 3\lambda y + 2\lambda^2 = 0$, με λ διαφορετικό του 0.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει στο επίπεδο, δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, καθεμιά από τις οποίες έχει κλίση ίση με 1.

(Μονάδες 12)

β) Αν το εμβαδόν του τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες του ερωτήματος α) είναι ίσο με 2, να βρείτε την τιμή του λ .

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε το πρώτο μέλος της (1) τριώνυμο με μεταβλητή x :

$$x^2 - (2y + 3\lambda)x + y^2 + 3\lambda y + 2\lambda^2 = 0$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-(2y + 3\lambda)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (y^2 + 3\lambda y + 2\lambda^2) = (2y + 3\lambda)^2 - 4 \cdot (y^2 + 3\lambda y + 2\lambda^2) \\ &= 4y^2 + 12\lambda y + 9\lambda^2 - 4y^2 - 12\lambda y - 8\lambda^2 \\ &= \lambda^2 > 0 \end{aligned}$$

,αφού $\lambda \neq 0$

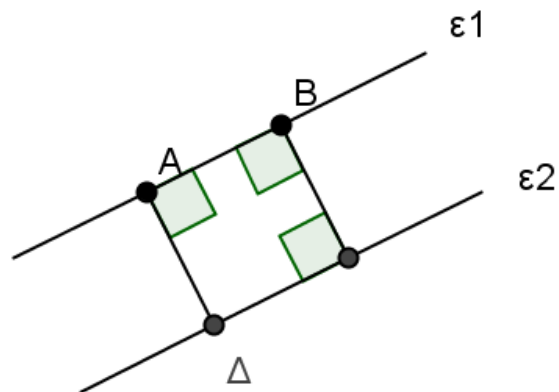
Άρα, η εξίσωση θα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-[-(2y + 3\lambda)] \pm \sqrt{\lambda^2}}{2 \cdot 1} = \frac{(2y + 3\lambda) \pm \lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{(2y+3\lambda)+\lambda}{2} \\ x_2 = \frac{(2y+3\lambda)-\lambda}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2y+4\lambda}{2} \\ x_2 = \frac{2y+2\lambda}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y+2\lambda \\ x_2 = y+\lambda \end{cases}$$

Συνεπώς, η (1) παριστάνει δύο ευθείες με εξισώσεις $\varepsilon_1 : y = x - 2\lambda$ και $\varepsilon_2 : y = x - \lambda$ οι οποίες είναι παράλληλες, με συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή κλίση, $\lambda_{\varepsilon_1} = 1 = \lambda_{\varepsilon_2}$.

β) Έστω ΑΒΓΔ τετράγωνο του οποίου οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ βρίσκονται στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Τότε,

$$(AB\Gamma\Delta) = (A\Delta)^2 \Leftrightarrow 2 = (A\Delta)^2 \\ \Leftrightarrow (A\Delta) = \sqrt{2}$$

και

$$(A\Delta) = d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|-2\lambda + \lambda|}{\sqrt{1+1^2}} = \frac{|-\lambda|}{\sqrt{2}} = \frac{|\lambda|}{\sqrt{2}}$$

Συνεπώς,

$$\frac{|\lambda|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |\lambda| = \sqrt{2}^2 \Leftrightarrow |\lambda| = 2 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$$

★Παρόμοιες Ασκήσεις Σχολικού: Παράγραφος 2.2 / Β' Ομάδα / Άσκηση 1

ΑΣΚΗΣΗ Δ5 (18611)

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : x - 4y - 7 = 0$ και τα σημεία $A(-2, 4)$ και $B(2, 6)$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου Μ της ευθείας ε το οποίο ισαπέχει από τα σημεία Α και Β

Μονάδες 7

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ

Μονάδες 8

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x, y)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = (MAB)$

ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: $x - 2y - 5 = 0$ και $x - 2y + 25 = 0$

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Έστω $M(x_0, y_0)$ σημείο της ευθείας $\varepsilon : x - 4y - 7 = 0$, τότε ισχύει

$$x_0 - 4y_0 - 7 = 0 \quad (1)$$

Αφού το Μ ισαπέχει από τα σημεία Α και Β ισχύει

$$MA = MB \Leftrightarrow \sqrt{(x_0 + 2)^2 + (y_0 - 4)^2} = \sqrt{(x_0 - 2)^2 + (y_0 - 6)^2} \Leftrightarrow$$

$$x_0^2 + 4x_0 + 4 + y_0^2 - 8y_0 + 16 = x_0^2 - 4x_0 + 4 + y_0^2 - 12y_0 + 36 \Leftrightarrow$$

$$8x_0 + 4y_0 - 20 = 0 \Leftrightarrow 2x_0 + y_0 - 5 = 0 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) έχουμε

$$\begin{cases} x_0 - 4y_0 - 7 = 0 \\ 2x_0 + y_0 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4y_0 + 7 \\ 8y_0 + 14 + y_0 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4y_0 + 7 \\ 9y_0 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

Άρα Μ(3, -1)

β) Είναι $\overrightarrow{AM} = (5, -5)$ και $\overrightarrow{AB} = (4, 2)$

τότε

$$(MAB) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |10 + 20| = 15$$

γ) Είναι $\overrightarrow{AK} = (x + 2, y - 4)$ και $\overrightarrow{AB} = (4, 2)$ τότε

$$(KAB) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AB})| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x+2 & y-4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |2x + 4 - 4y + 16| = |x - 2y + 10|$$

Ισχύει

$$(KAB) = (MAB) \Leftrightarrow |x - 2y + 10| = 15$$

$$\Leftrightarrow x - 2y + 10 = 15 \quad \text{ή} \quad x - 2y + 10 = -15$$

$$\Leftrightarrow x - 2y - 5 = 0 \quad \text{ή} \quad x - 2y + 25 = 0$$

★Παρόμοιες Ασκήσεις Σχολικού: Παράγραφος 2.3 / Α' Ομάδα / Άσκηση 4,

★Παράγραφος 2.3 / Β' Ομάδα / Άσκηση 10

ΑΣΚΗΣΗ Δ6 (20147)

Δίνονται τα σημεία $A(\lambda + 1, \lambda - 1)$, $B(2, 2)$ και $\Gamma(4, 6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την μεσοκάθετο του τμήματος ΒΓ.

(Μονάδες 7)

β) Αν το σημείο Α ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ, να βρείτε την τιμή του λ.

(Μονάδες 8)

γ) Για $\lambda = 4$, να βρείτε σημείο Δ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΔΓ να είναι ρόμβος.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ δίνεται από τον τύπο,

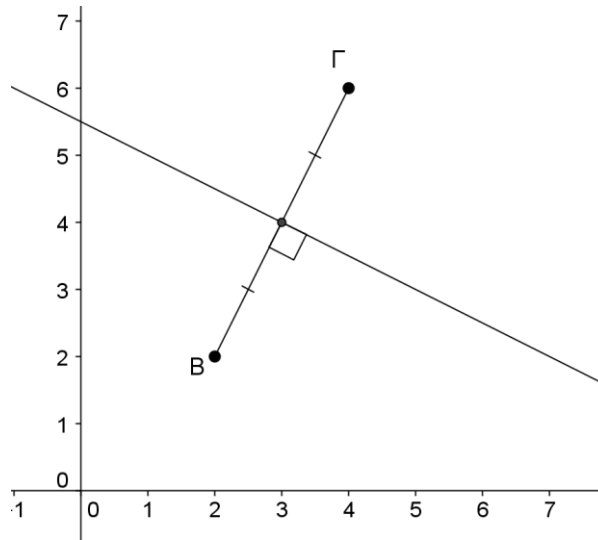
$$M\left(\frac{x_B + x_\Gamma}{2}, \frac{y_B + y_\Gamma}{2}\right) \text{ δηλαδή } M\left(\frac{2+4}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = (3, 4)$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ είναι,

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{6-2}{4-2} = \frac{4}{2} = 2,$$

επειδή η μεσοκάθετος και η πλευρά ΒΓ τέμνονται κάθετα ισχύει,

$$\lambda_\mu \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Rightarrow \lambda_\mu \cdot 2 = -1 \Rightarrow \lambda_\mu = -\frac{1}{2}$$



Η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ είναι,

$$\begin{aligned} y - 4 &= -\frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow 2y - 8 = -x + 3 \\ &\Rightarrow x + 2y - 11 = 0 \end{aligned}$$

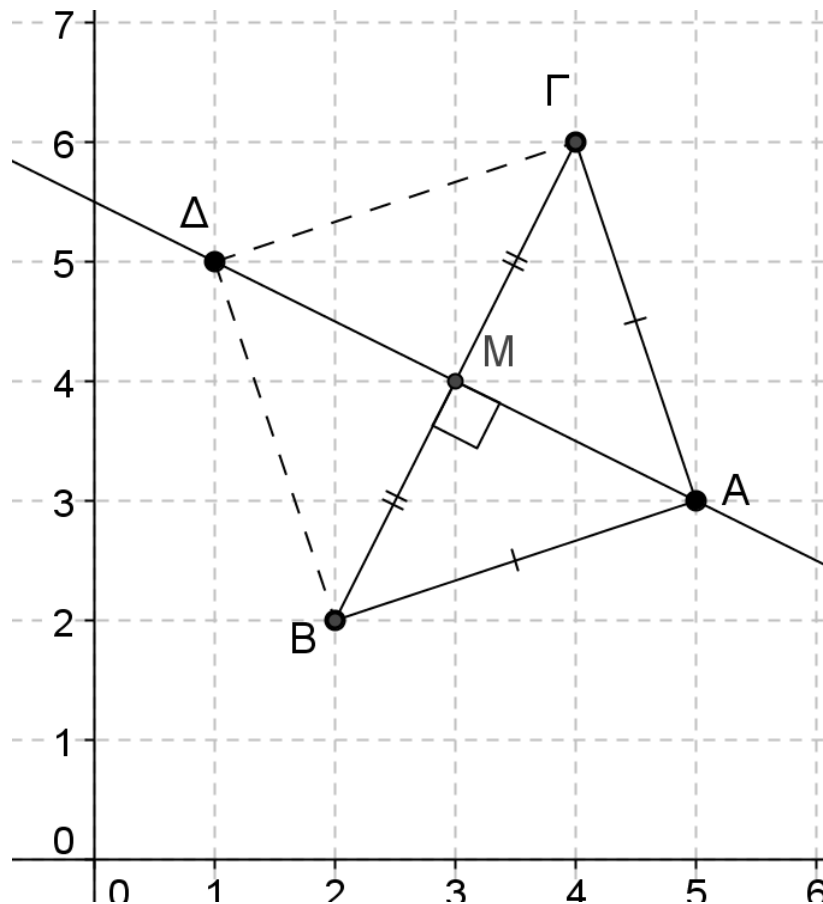
β) Επειδή το Α ισαπέχει από τα σημεία Β, Γ, σημαίνει ότι ανήκει στην μεσοκάθετο του ΒΓ, άρα ανήκει στην ευθεία $x + 2y - 11 = 0$, οπότε οι συντεταγμένες του θα την επαληθεύουν, δηλαδή

$$\lambda + 1 + 2(\lambda - 1) - 11 = 0 \Rightarrow 3\lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 4,$$

άρα Α(5,3)

γ) Έστω $\Delta(x_\Delta, y_\Delta)$ οι συντεταγμένες του σημείου Δ, τότε το Μ είναι και μέσο του ΑΔ, οπότε

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_\Delta}{2} \Rightarrow 3 = \frac{5 + x_\Delta}{2} \Rightarrow x_\Delta = 1 \\ \text{και} \\ y_M &= \frac{y_A + y_\Delta}{2} \Rightarrow 4 = \frac{3 + y_\Delta}{2} \Rightarrow 8 = 3 + y_\Delta \Rightarrow y_\Delta = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta(1, 5)$$



ΑΣΚΗΣΗ Δ7 (22562)

Θεωρούμε τα σημεία $A(-2t + 6, 0)$, $B(0, 4t - 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του AB .

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι το M κινείται σε ευθεία την οποία να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $(AB) = d$, να αποδείξετε ότι $d^2 \geq 20$ και κατόπιν να βρείτε τα A, B ώστε η απόσταση (AB) να είναι ελάχιστη.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Αφού το M είναι μέσο του AB έχουμε

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{-2t+6}{2} \\ y_M = \frac{4t-2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = -t+3 \\ y_M = 2t-1 \end{cases}$$

Έτσι λοιπόν $M(-t+3, 2t-1)$ με $t \in \mathbb{R}$

β) Έστω $M(x, y)$ οπότε

$$\begin{cases} x = -t+3 \\ y = 2t-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3-x \\ y+1 = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3-x \\ t = \frac{y+1}{2} \end{cases}$$

Έτσι λοιπόν $\frac{y+1}{2} = 3-x \Rightarrow y+1 = -2x+6 \Rightarrow y = -2x+5$

Αρα το M κινείται στην ευθεία $(\varepsilon): y = -2x+5$

$$\begin{aligned} \gamma) (AB) &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-2t+6)^2 + (4t-2)^2} = \\ &= \sqrt{(6-2t)^2 + (4t-2)^2} = \sqrt{36-24t+4t^2+16t^2-16t+4} = \\ &= \sqrt{20t^2-40t+40} \end{aligned}$$

$$\text{Αφού } (AB) = d \Leftrightarrow d = \sqrt{20t^2-40t+40}$$

$$\text{Έτσι λοιπόν } d^2 = 20t^2 - 40t + 40$$

Η d^2 είναι συνάρτηση ως προς t

$$\text{Αρα έχουμε } d^2(t) = 20t^2 - 40t + 40 \text{ με } t \in \mathbb{R}$$

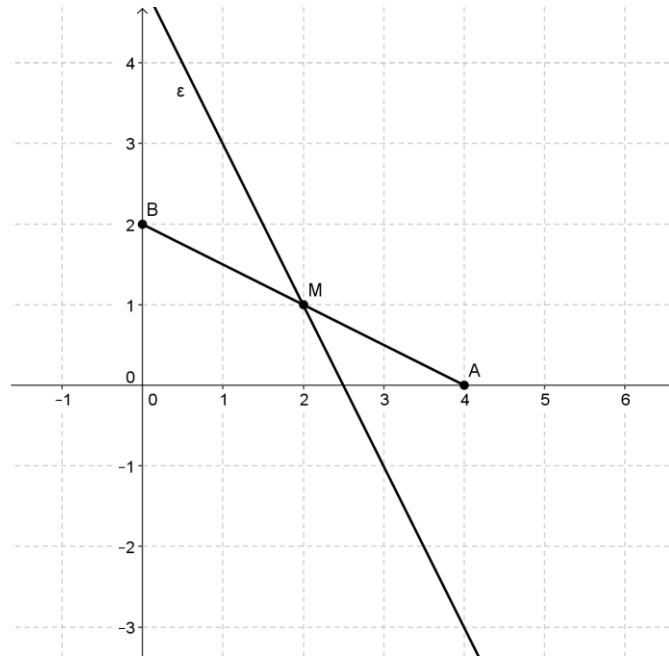
Η συνάρτηση $d^2(t)$ έχει την ελάχιστη τιμή της για

$$t_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-40}{2 \cdot 20} = 1$$

Η ελάχιστη τιμή της $d^2(t)$ είναι

$$d^2(1) = 20 - 40 + 40 = 20$$

Αρα $d^2 \geq 20$ με $d^2 = 20$ για $t=1$ οπότε $A(4, 0)$, $B(0, 2)$

**ΑΣΚΗΣΗ Δ8 (22564)**

Θεωρούμε τις εξισώσεις

$$\varepsilon_{\lambda}: (\lambda - 1)x + (\lambda - 2)y - \lambda + 3 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι καθεμιά από τις (ε_{λ}) παριστάνει ευθεία και κατόπιν ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο.

Μονάδες 10

β) Έστω $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq 2$. Αν η (ε_{λ}) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $A(a, 0)$ και $B(0, \beta)$ αντίστοιχα, τότε:

i. Να εκφράσετε τα a, β συναρτήσει του λ .

Μονάδες 5

ii. Να βρείτε την ευθεία της παραπάνω μορφής ώστε να ισχύει $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{\beta^2} = 2$

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$A = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ και } B = 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Άρα δεν υπάρχει καμία πραγματική τιμή του λ που να μηδενίζει ταυτόχρονα τα A και B , άρα η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθείες (οικογένεια ευθειών) για τις διάφορες τιμές του λ .

Εύρεση σταθερού σημείου της ευθείας (ε_{λ}) .

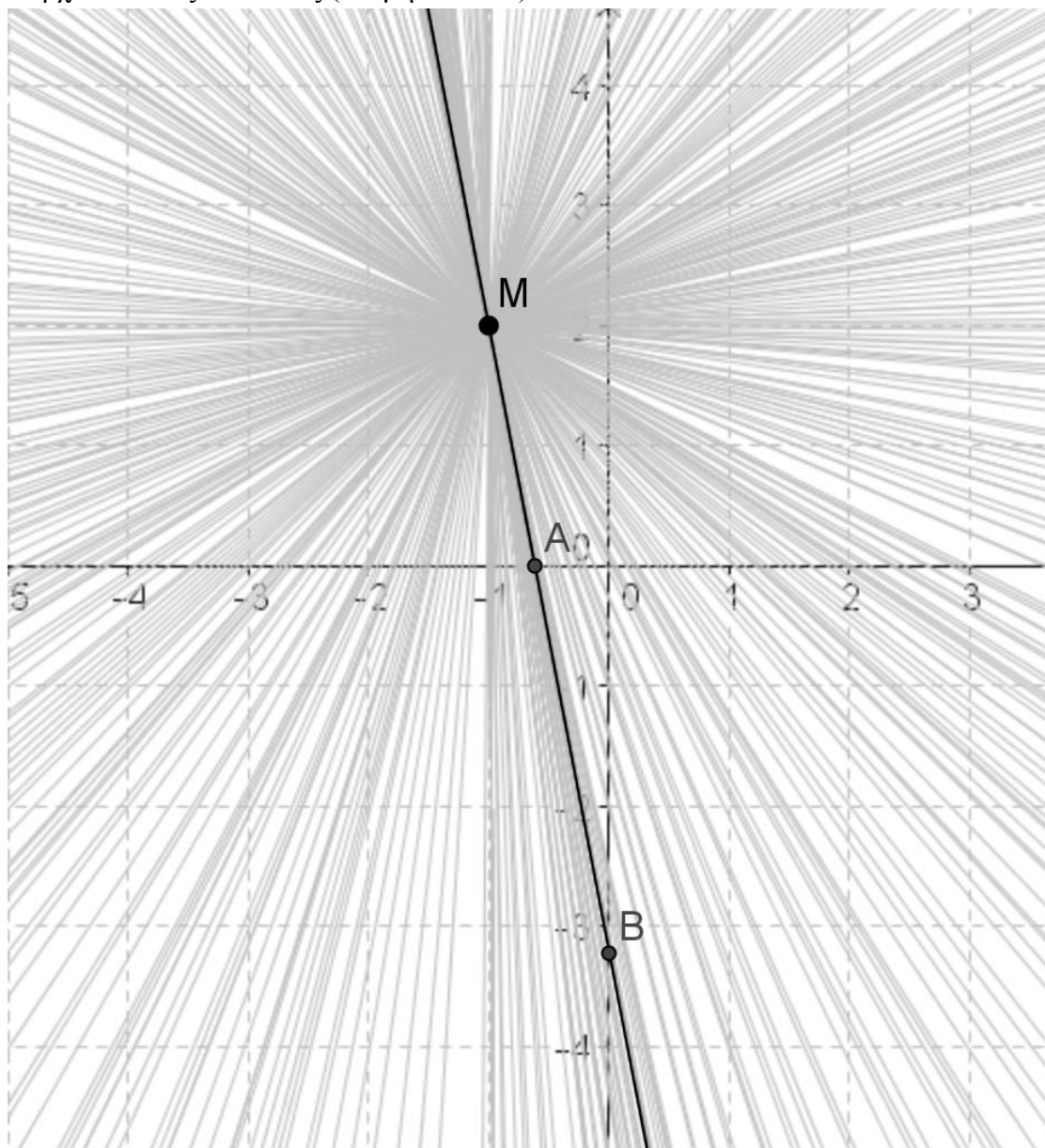
- Για $\lambda = 1$ βρίσκουμε την ευθεία: $-y - 1 + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 2$
- Για $\lambda = 2$ βρίσκουμε την ευθεία: $x - 2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Οι ευθείες αυτές τέμνονται στο σημείο $M(-1, 2)$. Θα αποδείξουμε ότι το σημείο αυτό ανήκει σε όλες τις ευθείες (ε_λ), άρα είναι το σταθερό σημείο που διέρχονται οι ευθείες.

Για $x = -1$ και $y = 2$ γίνεται η αρχική εξίσωση:

$$(\lambda - 1)(-1) + (\lambda - 2) \cdot 2 - \lambda + 3 = -\lambda + 1 + 2\lambda - 4 - \lambda + 3 = 0$$

Άρα την επαληθεύει, οπότε το σημείο $M(-1, 2)$ είναι το σταθερό σημείο που διέρχονται όλες οι ευθείες (δέσμη ευθειών).



β) i) Η εξίσωση $(\lambda - 1)x + (\lambda - 2)y - \lambda + 3 = 0$ γίνεται για

- $x = 0,$

$$(\lambda - 1) \cdot 0 + (\lambda - 2)y - \lambda + 3 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)y = \lambda - 3 \Rightarrow y = \frac{\lambda - 3}{\lambda - 2} \text{ άρα } \beta = \frac{\lambda - 3}{\lambda - 2}$$

- $y = 0,$

$$(\lambda - 1)x + (\lambda - 2) \cdot 0 - \lambda + 3 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)x = \lambda - 3 \Rightarrow x = \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1} \text{ άρα } \alpha = \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1}$$

$$\text{ii) } \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{\lambda - 3}{\lambda - 1}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{\lambda - 3}{\lambda - 2}\right)^2} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{(\lambda - 3)^2}{(\lambda - 1)^2}} + \frac{1}{\frac{(\lambda - 3)^2}{(\lambda - 2)^2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\lambda - 1)^2}{(\lambda - 3)^2} + \frac{(\lambda - 2)^2}{(\lambda - 3)^2} = 2 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 + (\lambda - 2)^2 = 2(\lambda - 3)^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 + \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 2(\lambda^2 - 6\lambda + 9)$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 2\lambda^2 - 12\lambda + 18$$

$$\Leftrightarrow -6\lambda + 12\lambda = 18 - 5 \Leftrightarrow 6\lambda = 13 \Leftrightarrow \lambda = \frac{13}{6}$$

Για $\lambda = \frac{13}{6}$ η αρχική εξίσωση γίνεται:

$$\left(\frac{13}{6} - 1\right)x + \left(\frac{13}{6} - 2\right)y - \frac{13}{6} + 3 = 0 \Rightarrow \frac{7}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{6} = 0 \Rightarrow 7x + y + 5 = 0 \Rightarrow y = -7x - 5$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ9 (23341)

Θεωρούμε σημεία $M(\alpha, \alpha + 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι κινούνται στην ευθεία $y = x + 1$

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το συμμετρικό $M'(\alpha', \beta')$ του M ως προς την ευθεία $x - 2y = 2$

(Μονάδες 10)

γ) Να δείξετε ότι το M' κινείται, για τις διάφορες τιμές του α , στην ευθεία

$$x - 7y - 17 = 0$$

(Μονάδες 5)

δ) Να εξετάσετε αν οι τρεις ευθείες συντρέχουν και κατόπιν να αιτιολογήσετε το αποτέλεσμα, αφού πρώτα σχεδιάσετε τις τρεις ευθείες.

(Μονάδες 5)

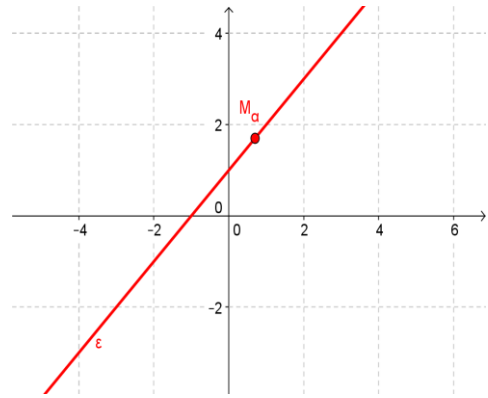
ΛΥΣΗ

α) Έστω $M(x, y)$ οπότε έχουμε

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y - 1 = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow y - 1 = x \Leftrightarrow y = x + 1$$

Οπότε τα σημεία $M(\alpha, \alpha + 1)$ κινούνται

στην ευθεία $(\varepsilon): y = x + 1$



β) Από το $M(\alpha, \alpha + 1)$ φέρνουμε ευθεία (κ) κάθετη στην ευθεία $(\zeta): x - 2y = 2$ (1)

Βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας (κ)

Είναι

$$\lambda_{\zeta} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2} \text{ και αφού } (\kappa) \perp (\zeta) \Rightarrow \lambda_{\kappa} = -\frac{1}{\lambda_{\zeta}} \Leftrightarrow \lambda_{\kappa} = -2$$

Οπότε,

$$y - y_M = \lambda_{\kappa} (x - x_M) \Leftrightarrow y - \alpha - 1 = -2(x - \alpha) \Leftrightarrow y = -2x + 2\alpha + \alpha + 1 \Leftrightarrow y = -2x + 3\alpha + 1 \quad (2)$$

Βρίσκουμε το σημείο τομής της (κ) με τη (ζ) λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων τους των σχέσεων (1) και (2),

$$x - 2(-2x + 3\alpha + 1) = 2 \Leftrightarrow x + 4x - 6\alpha - 2 = 2 \Leftrightarrow 5x = 6\alpha + 4 \Leftrightarrow x = \frac{6\alpha + 4}{5}$$

Για $x = \frac{6\alpha + 4}{5}$ η (2) γίνεται,

$$y = -2 \frac{6\alpha + 4}{5} + 3\alpha + 1 \Leftrightarrow y = \frac{-12\alpha - 8}{5} + 3\alpha + 1 \Leftrightarrow y = \frac{-12\alpha - 8 + 15\alpha + 5}{5} \Leftrightarrow y = \frac{3\alpha - 3}{5}$$

Άρα η (κ) και η (ζ) τέμνονται στο σημείο $K\left(\frac{6\alpha + 4}{5}, \frac{3\alpha - 3}{5}\right)$

Έτσι λοιπόν το $M'(\alpha', \beta')$ θα είναι το συμμετρικό του M ως προς το K , άρα το K είναι μέσο του MM' άρα

$$\begin{cases} x_K = \frac{x_M + x_{M'}}{2} \\ y_K = \frac{y_M + y_{M'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6\alpha + 4}{5} = \frac{\alpha + x_{M'}}{2} \\ \frac{3\alpha - 3}{5} = \frac{\alpha + 1 + y_{M'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12\alpha + 8 = 5\alpha + 5x_{M'} \\ 6\alpha - 6 = 5\alpha + 5 + 5y_{M'} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7\alpha + 8 = 5x_{M'} \\ \alpha - 11 = 5y_{M'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7\alpha + 8}{5} = x_{M'} \\ \frac{\alpha - 11}{5} = y_{M'} \end{cases}$$

δηλαδή $M' \left(\frac{7\alpha + 8}{5}, \frac{\alpha - 11}{5} \right)$

γ) Έστω $M'(x, y)$ άρα

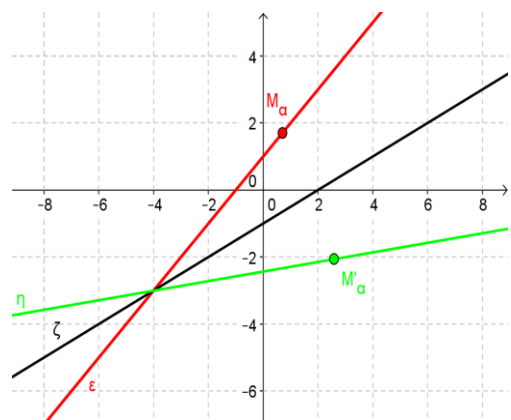
$$\begin{cases} x = \frac{7\alpha + 8}{5} \\ y = \frac{\alpha - 11}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 7\alpha + 8 \\ 5y = \alpha - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 8 = 7\alpha \\ 5y + 11 = \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x - 8}{7} = \alpha \\ 5y + 11 = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x - 8}{7} = \alpha \\ 5y + 11 = \alpha \end{cases}$$

άρα,

$$\frac{5x - 8}{7} = 5y + 11 \Leftrightarrow 5x - 8 = 35y + 77$$

$$\Leftrightarrow 5x - 35y - 85 = 0 \Leftrightarrow x - 7y - 17 = 0: (\eta)$$



δ) Βρίσκουμε το σημείο τομής των (ε) και (ζ)

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x + 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x - 2(x + 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x - 2x - 2 = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ -x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα η (ε) και η (ζ) τέμνονται στο σημείο $A(-4, -3)$

Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του A στην εξίσωση της ευθείας (η) έχουμε

$$-4 - 7(-3) - 17 = 0 \Leftrightarrow -4 + 21 - 17 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Οπότε και η (η) διέρχεται από το A

Οι ε και ζ τέμνονται στο σημείο A, το A έχει συμμετρικό ως προς τη ζ το A οπότε η συμμετρική ευθεία της ε ως προς τη ζ θα περνά κατ' ανάγκη από το A. Έτσι λοιπόν η (η) θα περνά κατ, ανάγκη από το A. Για αυτό το λόγο οι τρεις ευθείες συντρέχουν.

Β ΘΕΜΑΤΑ - 2.3

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (20062)

Δίνονται τα σημεία $A(1, -2)$ και $B(2, 3)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία A, B

Μονάδες 11

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $OK\Lambda$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων και K, Λ είναι τα σημεία τομής της ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα

Μονάδες 14

ΛΥΣΗ

Βρίσκουμε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα A, B .

$$\lambda_{\varepsilon} = \lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - (-2)}{2 - 1} = \frac{3 + 2}{1} = 5$$

Έχουμε λοιπόν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon} = 5$ και γνωστό σημείο $A(1, -2)$ οπότε η εξίσωση της (ε) είναι :

$$(\varepsilon): y - y_A = \lambda_{\varepsilon} (x - x_A)$$

$$\Leftrightarrow y - (-2) = 5(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow y + 2 = 5x - 5$$

$$\Leftrightarrow y = 5x - 7$$

Άρα: (ε) : $5x - y - 7 = 0$.

β) Σημεία τομής της (ε) με τους άξονες.

Για το K ((ε) με άξονα $x'x$) θέτω στην εξίσωση της (ε) όπου $y = 0$ και λύνω ως προς x

$$\Delta\eta\lambda.: 5x - 0 - 7 = 0 \Leftrightarrow 5x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}.$$

$$\text{Άρα: } K\left(\frac{7}{5}, 0\right)$$

Για το Λ ((ε) με άξονα $y'y$) θέτω στην εξίσωση της (ε) όπου $x = 0$ και λύνω ως προς y δηλαδή,

$$5 \cdot 0 - y - 7 = 0 \Leftrightarrow y = -7,$$

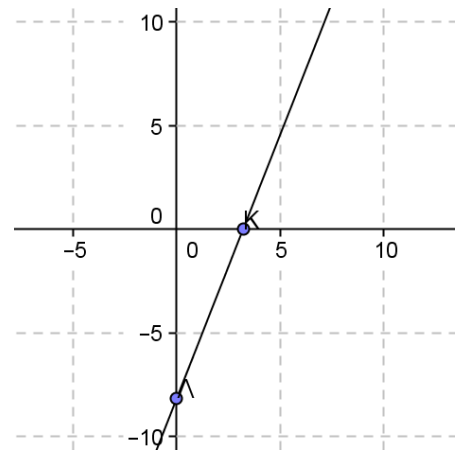
$$\text{άρα } \Lambda(0, -7)$$

Εύρεση Εμβαδόν Τριγώνου $OK\Lambda$

Έχουμε,

$$(OK\Lambda) = \frac{1}{2}(OK) \cdot (O\Lambda) = \frac{1}{2} \left| \frac{7}{5} \right| \cdot |-7| = \frac{49}{10} \text{ τ. μ.}$$

ή



$$(\text{OK}\Lambda) = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{\text{OK}}, \overrightarrow{\text{O}\Lambda}) \right| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left| -\frac{49}{5} \right| = \frac{49}{10}$$

★Παρόμοιες Ασκήσεις Σχολικού : Παράγραφος 2.3 / Α' Ομάδα / Άσκηση 7

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (20140)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(3, 2), Β(-3, 1), Γ(4, 0).

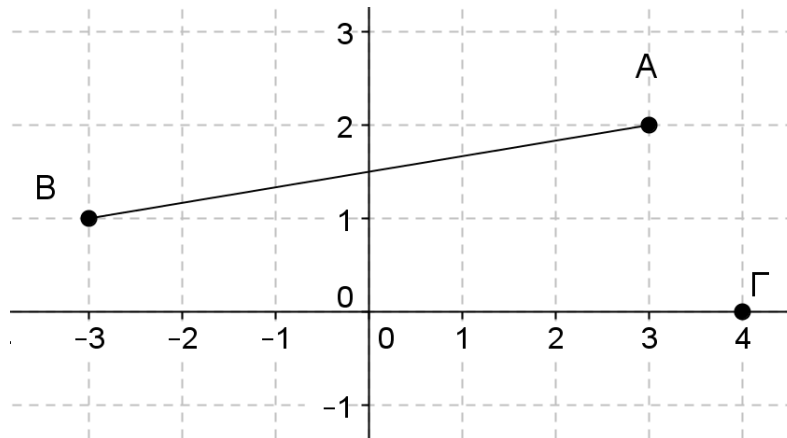
α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΒ.

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΓΔ καθώς και την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται αυτό.

(Μονάδες 16)

ΛΥΣΗ



α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της πλευράς ΑΒ είναι,

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 2}{-3 - 3} = \frac{1}{6}$$

άρα η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι,

$$y - 2 = \frac{1}{6}(x - 3) \Rightarrow 6y - 12 = x - 3 \Rightarrow x - 6y + 9 = 0$$

β) Αρχικά θα βρούμε την απόσταση του ύψους ΓΔ.

Έχουμε,

$$(\Gamma\Delta) = d(\Gamma, AB) = \frac{|Ax_\Gamma + By_\Gamma + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|1 \cdot 4 - 6 \cdot 0 + 9|}{\sqrt{1^2 + 6^2}} = \frac{13}{\sqrt{37}} = \frac{13\sqrt{37}}{37}$$

Εύρεση εξίσωση ευθείας του ύψους ΓΔ.

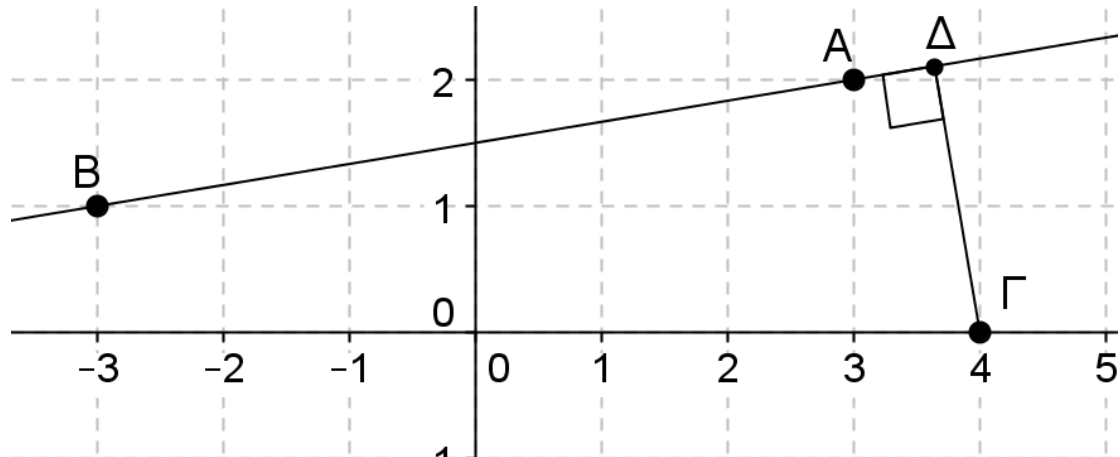
Επειδή $\Gamma\Delta \perp AB$ τότε

$$\lambda_{\Gamma\Delta} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Rightarrow \lambda_{\Gamma\Delta} \cdot \frac{1}{6} = -1 \Rightarrow \lambda_{\Gamma\Delta} = -6$$

άρα ο συντελεστής διεύθυνσης του ύψους ΓΔ είναι -6 .

Η εξίσωση της ευθείας ΓΔ είναι,

$$y - 0 = -6(x - 4) \Rightarrow y = -6x + 24$$



★Παρόμοιες Ασκήσεις Σχολικού:

★Παρόμοιες Ασκήσεις Τράπεζας: 20066

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (22522)

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$ και τα σημεία $A(2, 0)$ και $B(6, -3)$.

α) Να προσδιορίσετε σημείο Γ της ευθείας ε ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την $B\Gamma$.

Μονάδες 15

β) Έστω $\Gamma(1, 2)$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Έστω $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$. Αφού το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία ε θα επαληθεύει την εξίσωση της επομένως $y_\Gamma = x_\Gamma + 1$ (1) και άρα $\Gamma(x_\Gamma, x_\Gamma + 1)$. Για να είναι το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την $B\Gamma$ θα πρέπει να ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα δηλαδή

$$\begin{aligned} B\Gamma^2 &= AB^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow \sqrt{(6-x_\Gamma)^2 + (-3-y_\Gamma)^2}^2 = \\ &\sqrt{(6-2)^2 + (-3-0)^2}^2 + \sqrt{(2-x_\Gamma)^2 + (0-y_\Gamma)^2}^2 = \\ (6-x_\Gamma)^2 + (3+y_\Gamma)^2 &= (6-2)^2 + (-3-0)^2 + (2-x_\Gamma)^2 + y_\Gamma^2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$36 - 12x_{\Gamma} + x_{\Gamma}^2 + 9 + 6y_{\Gamma} + y_{\Gamma}^2 = 25 + 4x_{\Gamma} + x_{\Gamma}^2 - y_{\Gamma}^2 \Leftrightarrow 36 - 12x_{\Gamma} + 9 + 6y_{\Gamma} = 25 + 4x_{\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$16x_{\Gamma} + 16y_{\Gamma} = 20 \Leftrightarrow 4x_{\Gamma} + 4y_{\Gamma} = 5 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 4x_{\Gamma} + 4(x_{\Gamma} + 1) = 5 \Leftrightarrow 8x_{\Gamma} = 4 \Leftrightarrow x_{\Gamma} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Άρα } y_{\Gamma} = x_{\Gamma} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Επομένως το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

β) Έχουμε $\overrightarrow{AB} = (6 - 2, -3 - 0) = (4, -3)$ και $\overrightarrow{AG} = (1 - 2, 12 - 0) = (-1, 12)$. Το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ ισούται με

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 12 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (4 \cdot 12 - (-1)(-3)) = \frac{45}{2} \tau.μ.$$

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (22523)

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: y = x + \kappa - 1$ όπου κ θετικός ακέραιος μεγαλύτερος της μονάδας.

α) Να βρείτε με τη βοήθεια του κ τα σημεία τομής A, B της ευθείας με τους άξονες $x'x$, $y'y$ και το εμβαδόν του τριγώνου OAB.

Μονάδες 13

β) Αν ισχύει $(OAB) < 2$ να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία $\varepsilon: y = x + \kappa - 1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ για $y = 0$:

$$0 = x + \kappa - 1 \Rightarrow x = 1 - \kappa, \text{ άρα } A(1 - \kappa, 0)$$

Η ευθεία $\varepsilon: y = x + \kappa - 1$ τέμνει τον άξονα $y'y$ για $x = 0$:

$$y = 0 + \kappa - 1 \Rightarrow y = \kappa - 1, \text{ άρα } B(0, \kappa - 1)$$

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι:

$$(OAB) = \frac{1}{2} (OA)(OB) = \frac{1}{2} |\kappa - 1| |1 - \kappa| = \frac{(\kappa - 1)^2}{2}$$

β) Έχουμε,

$$(OAB) < 2 \Leftrightarrow \frac{(\kappa - 1)^2}{2} < 2 \Leftrightarrow (\kappa - 1)^2 < 4 \Leftrightarrow |\kappa - 1| < 2 \Leftrightarrow -2 < \kappa - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < \kappa < 3$$

Όμως ο κ είναι θετικός ακέραιος μεγαλύτερος της μονάδας, άρα $\kappa = 2$.

ΑΣΚΗΣΗ Β5 (22529)

Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y + 2 = 0$ και το σημείο $A(-2, 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το A δεν ανήκει στην (ε) και να βρείτε την απόστασή του από

αυτή.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε όλες τις ευθείες που είναι παράλληλες στην (ε) και απέχουν από το Α απόσταση ίση με 3 μονάδες..

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Θέτω στην εξίσωση της ευθείας (ε) όπου $x = -2$ και $y = 1$

$$3(-2) - 4 \cdot 1 + 2 = -6 - 4 + 2 = -8 \neq 0$$

οπότε $A \notin (ε)$ αφού οι συντεταγμένες του δεν επαληθεύουν τον τύπο της (ε).

$$d(A, ε) = \frac{|3(-2) - 4 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-6 - 4 + 2|}{\sqrt{25}} = \frac{|-8|}{5} = \frac{8}{5}$$

β) Επειδή $\lambda_ε = \frac{3}{4}$ όλες οι ευθείες (η) που είναι παράλληλες προς την (ε) έχουν

$$\lambda_η = \lambda_ε = \frac{3}{4} \text{ και θα είναι της μορφής : } (η): y = \frac{3}{4}x + \beta \text{ ή } (η): 3x - 4y + \beta = 0 \quad (1)$$

Δίνεται ότι: $d(A, η) = 3$ οπότε:

$$d(A, η) = 3 \Leftrightarrow \frac{|3 \cdot (-2) - 4 \cdot 1 + \beta|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{|-6 - 4 + \beta|}{5} = 3$$

$$\Leftrightarrow |\beta - 10| = 15 \Leftrightarrow \beta - 10 = \pm 15 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 25 \\ \beta = -5 \end{cases}$$

Άρα οι ζητούμενες ευθείες είναι :

$$(η_1): 3x - 4y + 25 = 0 \text{ ή } (η_2): 3x - 4y - 5 = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ Β6 (22532)

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων στο οποίο απεικονίζεται ο χάρτης του νομού Αρκαδίας. Τα χωριά Δόξα (Δ), Λευκοχώρι (Λ) και Κακουρέϊκα (Κ) έχουν αντίστοιχες συντεταγμένες $\Delta(-2, 2)$, $\Lambda(2, -1)$ και $K(-1, -10)$..

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα χωριά Δόξα (Δ) και Λευκοχώρι (Λ).

Μονάδες 8

β) Να βρείτε την απόσταση του Κ από την ευθεία (ε)..

Μονάδες 8

γ) Να εξετάσετε, με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, ποιο από τα χωριά Δόξα και Λευκοχώρι απέχει τη μικρότερη απόσταση από τα Κακουρέϊκα

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$\lambda_{\Delta\Lambda} = \frac{-1-2}{2-(-2)} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

οπότε η εξίσωση (ε) που διέρχεται από τα χωριά Δόξα και Λευκοχώρι είναι :

$$(\varepsilon): y-2 = -\frac{3}{4}(x-(-2)) \Leftrightarrow 4y-8 = -3x-6 \Leftrightarrow 3x+4y-2=0.$$

β) Έχουμε,

$$d(K, \varepsilon) = \frac{|3 \cdot (-1) + 4 \cdot (-10) - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-3 - 40 - 2|}{5} = 9$$

γ) Έχουμε,

$$(\Delta K) = \sqrt{(-1-(-2))^2 + (-10-2)^2} = \sqrt{(-1+2)^2 + (-12)^2} = \sqrt{1+144} = \sqrt{145}$$

$$(\Lambda K) = \sqrt{(-1-2)^2 + (-10-(-1))^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-10+1)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90}$$

Άρα το Λευκοχώρι είναι πιο κοντά στα Κακουρέϊκα από το χωριό Δόξα.

ΑΣΚΗΣΗ Β7 (22537)

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(\lambda-1, \lambda+2)$ και $B(\mu+3, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B κινούνται στις ευθείες $\varepsilon_1 : y = x + 3$ και $\varepsilon_2 : y = x - 3$ αντίστοιχα.

Μονάδες 12

β) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

Μεθοδολογία

Αν $\varepsilon_1 : y = \lambda x + \beta_1$ και $\varepsilon_2 : y = \lambda x + \beta_2$ δύο παράλληλες ευθείες, τότε η μεταξύ τους

απόσταση δίνεται από τον τύπο $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$.

α) Για το σημείο A έχουμε:

$$\begin{cases} x_A = \lambda - 1 \\ y_A = \lambda + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x_A + 1 \\ \lambda = y_A - 2 \end{cases} \Rightarrow x_A + 1 = y_A - 2 \Leftrightarrow x_A - y_A + 3 = 0$$

Δηλαδή, το σημείο A βρίσκεται στην ευθεία $\varepsilon_1 : x - y + 3 = 0$.

Για το σημείο B έχουμε:

$$\begin{cases} x_B = \mu + 3 \\ y_B = \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = x_B - 3 \\ \mu = y_B \end{cases} \Rightarrow x_B - 3 = y_B \Leftrightarrow x_B - y_B - 3 = 0$$

Δηλαδή, το σημείο B βρίσκεται στην ευθεία $\varepsilon_2 : x - y - 3 = 0$.

β) Έστω ε η μεσοπαράλληλος των ε_1 και ε_2 , τότε, $\varepsilon // \varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} = \lambda_{\varepsilon} = 1$

Συνεπώς, $\varepsilon : y = x + k$, $k \in \mathbb{R}$

Επιπλέον,

$$d(\varepsilon, \varepsilon_1) = \frac{d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{2} = d(\varepsilon, \varepsilon_2) \Rightarrow \frac{|k-3|}{\sqrt{1+1^2}} = \frac{|-3-3|}{2\sqrt{1+1^2}} \Leftrightarrow \frac{|k-3|}{\sqrt{2}} = \frac{|-6|}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow |k-3| = 3$$

$$\Leftrightarrow k-3=3 \text{ ή } k-3=-3 \Leftrightarrow k=6 \text{ ή } k=0$$

Για $k=6$ είναι $\varepsilon : y = x + 6$ και,

$$d(\varepsilon, \varepsilon_2) = \frac{|6+3|}{\sqrt{1+1^2}} = \frac{9}{\sqrt{2}} \text{ και } d(\varepsilon, \varepsilon_1) = \frac{|6-3|}{\sqrt{1+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Δηλαδή, η $\varepsilon : y = x + 6$ δεν ισαπέχει από τις ε_1 και ε_2 άρα, δεν είναι η μεσοπαράλληλος αυτών.

Για $k=0$ είναι $\varepsilon : y = x$ και,

$$d(\varepsilon, \varepsilon_2) = \frac{|3|}{\sqrt{1+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ και } d(\varepsilon, \varepsilon_1) = \frac{|-3|}{\sqrt{1+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Δηλαδή, η $\varepsilon : y = x$ ισαπέχει από τις ε_1 και ε_2 και άρα, είναι η μεσοπαράλληλος αυτών.

ΑΣΚΗΣΗ Β8 (22538)

Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$, $B(1, 5)$ και $\Gamma(t-1, 3t-2)$, $t \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

Μονάδες 7

β) Να δείξετε ότι η απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία AB καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ είναι ανεξάρτητα του t .

Μονάδες 18

ΛΥΣΗ

Μεθοδολογία

Ο συντελεστής διεύθυνσης ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και

$B(x_2, y_2)$ είναι $\lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, αν $x_1 \neq x_2$.

Η εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης λ που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

Η απόσταση σημείου $A(x_0, y_0)$ από ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$

$$\text{δίνεται από τον τύπο } d(A, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Το εμβαδόν τριγώνου με κορυφές A, B, Γ δίνεται από τον τύπο

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) \right|$$

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB θα είναι

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 2}{1 - 0} = \frac{3}{1} = 3$$

Άρα, η εξίσωση της ευθείας AB θα είναι

$$AB: y - y_A = \lambda_{AB}(x - x_A) \Leftrightarrow y - 2 = 3(x - 0) \Leftrightarrow y = 3x + 2$$

ή στην γενική της μορφή: $3x - y + 2 = 0$

β) Η απόσταση του σημείου $\Gamma(t - 1, 3t - 2)$ από την ευθεία AB δίνεται από τον τύπο

$$d(\Gamma, AB) = \frac{|3x_\Gamma - y_\Gamma + 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|3(t - 1) - (3t - 2) + 2|}{\sqrt{10}} = \frac{|3t - 3 - 3t + 2 + 2|}{\sqrt{10}} = \frac{|1|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

και είναι ανεξάρτητη του $t \in \mathbb{R}$.

Είναι,

$$\overrightarrow{AB} = (1 - 0, 5 - 2) = (1, 3) \text{ και } \overrightarrow{A\Gamma} = ((t - 1) - 0, (3t - 2) - 2) = (t - 1, 3t - 4)$$

Συνεπώς,

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ t - 1 & 3t - 4 \end{vmatrix} = 3t - 4 - 3(t - 1) = 3t - 4 - 3t + 3 = -1$$

Και άρα, το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ θα είναι:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) \right| = \frac{1}{2} |-1| = \frac{1}{2} \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

Δ Θέματα: 2.3

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (18614)

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 2y - 4 = 0$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών ε_1 και ε_2
(Μονάδες 5)

β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Β και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ, τότε:

i) να βρείτε εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Β και Γ
(Μονάδες 5)

ii) να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ
(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ (x,y) για τα οποία ισχύει $(ΚΒΓ) = (ΑΒΓ)$ ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.
(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεων τους:

$$\begin{cases} 3x + y = -3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \cdot (-3) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = -3 & (1) \\ -3x - 6y = -12 & (2) \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις (1) και (2) και έχουμε:

$$-5y = -15 \Leftrightarrow y = 3$$

Αντικαθιστούμε στην (1) και παίρνουμε:

$$3x + 3 = -3 \Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = -2$$

Η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (-2, 3)$, άρα Α(-2,3) το ζητούμενο σημείο.

β) (i) Για $x=0$ η εξίσωση της ε_1 δίνει: $y=-3$

Για $y=0$ η εξίσωση της ε_2 δίνει: $x=4$

Άρα, Β(0, -3) και Γ(4, 0).

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ είναι:

$$\lambda_{ΒΓ} = \frac{y_{\Gamma} - y_{\text{B}}}{x_{\Gamma} - x_{\text{B}}} = \frac{0 - (-3)}{4 - 0} = \frac{3}{4}$$

Η εξίσωση της ευθείας ΒΓ θα είναι:

$$y - y_{\text{B}} = \lambda_{ΒΓ} \cdot (x - x_{\text{B}}) \Leftrightarrow y - (-3) = \frac{3}{4} \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y + 3 = \frac{3}{4}x \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - 3$$

(ii) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από τον τύπο:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) \right|$$

όμως $\overrightarrow{AB} = (0+2, -3-3) = (2, -6)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (4+2, 0-3) = (6, -3)$

και $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 36 = 30$, άρα, $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |30| = 15$ τετραγωνικές μονάδες.

γ) Είναι

$$(KB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{B\Gamma}) \right|$$

όπου

$$\overrightarrow{KB} = (-x, -3-y) \text{ και } \overrightarrow{B\Gamma} = (4, 3)$$

και

$$\det(\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{B\Gamma}) = \begin{vmatrix} -x & -3-y \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -3x - 4(-3-y) = -3x + 12 + 4y = -3x + 4y + 12$$

Οπότε,

$$(KB\Gamma) = (AB\Gamma) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} |-3x + 4y + 12| = 15 \Leftrightarrow$$

$$|-3x + 4y + 12| = 30 \Leftrightarrow$$

$$-3x + 4y + 12 = 30 \text{ ή } -3x + 4y + 12 = -30 \Leftrightarrow$$

$$-3x + 4y - 18 = 0 \text{ ή } -3x + 4y + 42 = 0$$

άρα, τα σημεία $K(x, y)$ ανήκουν στις ευθείες

$$\varepsilon_1 : -3x + 4y - 18 = 0 \text{ και } \varepsilon_2 : -3x + 4y + 42 = 0$$

οι οποίες είναι παράλληλες, αφού $\lambda_{\varepsilon_1} = \frac{3}{4} = \lambda_{\varepsilon_2}$

★Παρόμοιες Ασκήσεις Σχολικού: Παράγραφος 2.3 / Α' Ομάδα / Άσκηση 7,

★Παράγραφος 2.3 / Β' Ομάδα / Άσκηση 10

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (18615)

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα AB που είναι παράλληλο προς την ευθεία $\varepsilon : y = x$, με $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $x_1 < x_2$.

Αν το σημείο $M(3,5)$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB και το γινόμενο των τετμημένων των σημείων A και B ισούται με 5, τότε:

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων A και B .

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $(OAB) = 4$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x,y)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = 2(OAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: $x - y - 2 = 0$ και $x - y + 6 = 0$

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Αφού το M είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος AB , θα ισχύει:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 3 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 6 \quad \text{και} \quad \frac{y_1 + y_2}{2} = 5 \Leftrightarrow y_1 + y_2 = 10 \quad (1)$$

Επιπλέον, δίνεται ότι $x_1 \cdot x_2 = 5$

Αν συμβολίσουμε με S το άθροισμα των x_1, x_2 και με P το γινόμενο τους, τότε τα x_1, x_2 θα είναι οι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $x^2 - Sx + P = 0$.

Είναι:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16 > 0$$

Άρα, οι άνισες πραγματικές ρίζες της εξίσωσης θα είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5 \end{cases}$$

αφού από υπόθεση έχουμε $x_1 < x_2$.

Έχουμε,

$$AB // \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{AB} = \lambda_{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 1 \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{5 - 1} = 1 \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{4} = 1 \Leftrightarrow y_2 - y_1 = 4 \quad (2)$$

Από τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} y_2 + y_1 = 10 \\ y_2 - y_1 = 4 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις παίρνουμε

$$2y_2 = 14 \Leftrightarrow y_2 = 7$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην (1) έχουμε:

$$7 + y_1 = 10 \Leftrightarrow y_1 = 3$$

Άρα, $A(1,3)$ και $B(5, 7)$ τα ζητούμενα σημεία.

$$\beta) \text{ Είναι } \overrightarrow{OA} = (1,3) \text{ και } \overrightarrow{OB} = (5,7) \text{ και } \det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 15 = -8$$

άρα, το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι:

$$(OAB) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-8| = 4 \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

$$\gamma) \overrightarrow{KA} = (1-x, 3-y) \text{ και } \overrightarrow{AB} = (5-1, 7-3) = (4, 4)$$

Οπότε,

$$\det \begin{pmatrix} \overrightarrow{KA}, \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & 3-y \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot (1-x) - 4(3-y) = 4 - 4x - 12 + 4y = -4x + 4y - 8$$

και

$$(KAB) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{KA}, \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-4x + 4y - 8| = \frac{1}{2} |-4(x - y + 2)| = \frac{4}{2} |x - y + 2| = 2|x - y + 2|$$

Συνεπώς,

$$(KAB) = 2(OAB) \Leftrightarrow 2|x - y + 2| = 2 \cdot 4 \Leftrightarrow |x - y + 2| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2 = 4 \\ \text{ή} \\ x - y + 2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ \text{ή} \\ x - y + 6 = 0 \end{cases}$$

Άρα, τα σημεία $K(x, y)$ ανήκουν στις ευθείες

$$\varepsilon_1: x - y - 2 = 0 \text{ και } \varepsilon_2: x - y + 6 = 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (18620)

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: (2\lambda - 1)x + y - 5 = 0$, $\varepsilon_2: (\lambda^2 + 3)x - y - 15 = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ και το σημείο $A(2, -1)$

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες τέμνονται

Μονάδες 7

β) Αν οι ευθείες τέμνονται στο σημείο A , να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$

Μονάδες 10

γ) Έστω $\lambda = 2$ και B, Γ τα σημεία που οι ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα $y'y$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

Μονάδες 8

Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι } \varepsilon_1: (2\lambda - 1)x + y - 5 = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)x + y = 5$$

$$\varepsilon_2: (\lambda^2 + 3)x - y - 15 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 3)x - y = 15$$

$$\text{Είναι } D = \begin{vmatrix} 2\lambda - 1 & 1 \\ \lambda^2 + 3 & -1 \end{vmatrix} = -(2\lambda - 1) - (\lambda^2 + 3) = -2\lambda + 1 - \lambda^2 - 3 = -\lambda^2 - 2\lambda - 2$$

$$\text{Έχουμε } \Delta = (-2)^2 - 4(-1)(-2) = 4 - 8 = -4 < 0$$

Άρα $-\lambda^2 - 2\lambda - 2 \neq 0 \Leftrightarrow D \neq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οπότε το σύστημα των εξισώσεων των ε_1 και ε_2 έχει μοναδική λύση δηλαδή οι ευθείες τέμνονται

$$\beta) D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 15 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 15 = -20$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2\lambda - 1 & 5 \\ \lambda^2 + 3 & 15 \end{vmatrix} = 15(2\lambda - 2) - 5(\lambda^2 + 3) \\ = 30\lambda - 15 - 5\lambda^2 - 15 \\ = -5\lambda^2 + 30\lambda - 30$$

Οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεων των ε_1 και ε_2 είναι

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-20}{-\lambda^2 - 2\lambda - 2} = \frac{20}{\lambda^2 + 2\lambda + 2}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-5\lambda^2 + 30\lambda - 30}{-\lambda^2 - 2\lambda - 2} = \frac{5\lambda^2 - 30\lambda + 30}{\lambda^2 + 2\lambda + 2}$$

Αφού το σημείο $A(2, -1)$ είναι το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 έχουμε

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{20}{\lambda^2 + 2\lambda + 2} \\ -1 = \frac{5\lambda^2 - 30\lambda + 30}{\lambda^2 + 2\lambda + 2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 10 \\ 5\lambda^2 - 30\lambda + 30 = -\lambda^2 - 2\lambda - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0 \\ 6\lambda^2 - 28\lambda + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0 & (1) \\ 3\lambda^2 - 14\lambda + 16 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Για την (1) έχουμε } \Delta = 4 + 32 = 36 \text{ άρα } \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$$

$$\text{Για την (2) έχουμε } \Delta = 196 - 192 = 4 \text{ άρα } \lambda_{1,2} = \frac{14 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 8 \\ \lambda_2 = 6 \end{cases}$$

Η κοινή λύση των (1) και (2) είναι $\lambda = 2$

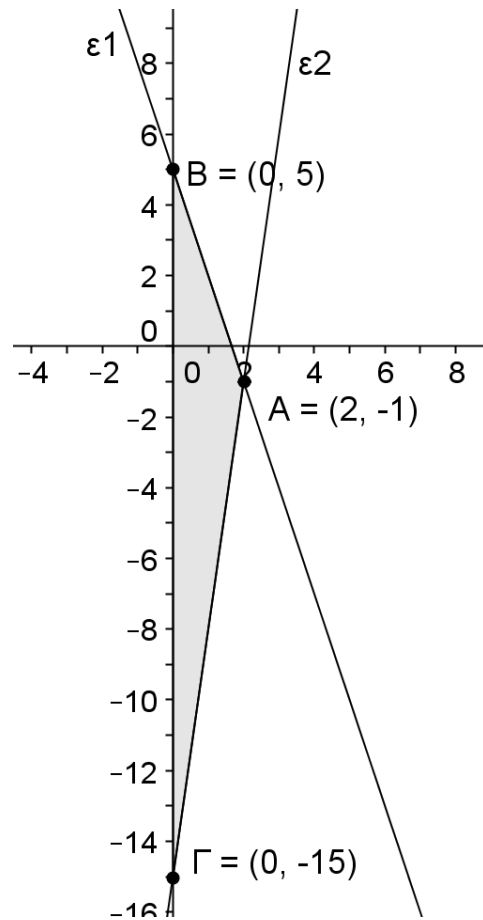
γ) Για $\lambda = 2$ η εξίσωση της ε_1 είναι $3x + y - 5 = 0$ (3) ενώ η εξίσωση της ε_2 είναι $7x - y - 15 = 0$ (4)

Για $x = 0$ η (3) $\Rightarrow y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = 5$ άρα η ε_1 τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $B(0, 5)$.

Για $x = 0$ η (4) $\Rightarrow -y - 15 = 0 \Leftrightarrow y = -15$ άρα η ε_2 τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, -15)$.

Έτσι λοιπόν είναι $\overrightarrow{AB} = (-2, 6)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (-2, -14)$

Οπότε



$$\begin{aligned}
 (AB\Gamma) &= \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} & \overrightarrow{A\Gamma} \end{pmatrix} \right| \\
 &= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & -14 \end{pmatrix} \right\| \\
 &= \frac{1}{2} |28 + 12| = 20 \text{ τ.μ.}
 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (18622)

Δίνονται τα σημεία $A\left(1, -\frac{3}{2}\right)$, $B(2, -1)$ και $\Gamma\left(\mu, \frac{\mu-4}{2}\right)$ όπου $\mu \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε την τιμή του μ έτσι, ώστε $\mu \overrightarrow{B\Gamma} = -\overrightarrow{AB}$

Μονάδες 6

δ) Για την τιμή του μ που βρήκατε στο ερώτημα γ), να αποδείξετε ότι $(OB\Gamma) = 1$ όπου O είναι η αρχή των αξόνων

Μονάδες 3

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$\overrightarrow{AB} = \left(2 - 1, -1 + \frac{3}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right) \text{ και } \overrightarrow{B\Gamma} = \left(\mu - 2, \frac{\mu - 4}{2} + 1\right) = \left(\mu - 2, \frac{\mu - 2}{2}\right)$$

β) Αρχικά βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία A και B . Ο συντελεστής διεύθυνσής της είναι:

$$\lambda_{\varepsilon} = \lambda_{\overrightarrow{AB}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

Οπότε

$$(\varepsilon): y - y_B = \lambda_{\varepsilon} (x - x_B) \Leftrightarrow y + 1 = \frac{1}{2}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 2 \quad (1)$$

$$\text{Για } y = y_{\Gamma} = \frac{\mu - 4}{2} \text{ και } x = x_{\Gamma} = \mu \text{ η (1)} \Rightarrow \frac{\mu - 4}{2} = \frac{1}{2}\mu - 2 \Leftrightarrow \mu - 4 = \mu - 4 \text{ που}$$

ισχύει

Άρα για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία (ε).

γ) Είναι

$$\mu \overrightarrow{B\Gamma} = -\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \mu \left(\mu - 2, \frac{\mu - 2}{2} \right) = - \left(1, \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \left(\mu^2 - 2\mu, \frac{\mu^2 - 2\mu}{2} \right) = \left(-1, -\frac{1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu^2 - 2\mu = -1 \\ \frac{\mu^2 - 2\mu}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu^2 - 2\mu = -1 \\ \mu^2 - 2\mu = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \mu^2 - 2\mu = -1$$

$$\Leftrightarrow \mu^2 - 2\mu + 1 = 0 \Leftrightarrow (\mu - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \mu - 1 = 0 \Leftrightarrow \mu = 1$$

δ) Για $\mu = 1$ είναι $\Gamma \left(1, -\frac{1}{2} \right)$ οπότε $\overrightarrow{OB} = (2, -1)$ και $\overrightarrow{O\Gamma} = \left(1, -\frac{3}{2} \right)$

Έτσι λοιπόν

$$\left(\overset{\Delta}{OB\Gamma} \right) = \frac{1}{2} \left| \det \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma} \right) \right| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} |-3 + 1| = 1 \text{ τ.μ.}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ5 (18623)

Δίνονται τα σημεία $A(3, 4)$, $B(5, 7)$ και $\Gamma(2\mu + 1, 3\mu - 2)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ και, στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του μ

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι:

i) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δεν εξαρτάται από το μ

Μονάδες 5

ii) για κάθε τιμή του μ το σημείο Γ ανήκει σε ευθεία ε , της οποίας να βρείτε την εξίσωση

Μονάδες 7

γ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από την τιμή του μ ;

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 3, 7 - 4) = (2, 3) \text{ και } \overrightarrow{A\Gamma} = (2\mu + 1 - 3, 3\mu - 2 - 4) = (2\mu - 2, 3\mu - 6)$$

άρα

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2\mu - 2 & 3\mu - 6 \end{vmatrix} = 2(3\mu - 6) - 3(2\mu - 2) = 6\mu - 12 - 6\mu + 6 = -6 \neq 0$$

Οπότε, $\overrightarrow{AB} \not\parallel \overrightarrow{A\Gamma}$ οπότε τα σημεία A , B , Γ δεν είναι συνευθειακά για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$

β) i) Έχουμε,

$$\left(\overset{\Delta}{AB\Gamma} \right) = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) \right| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2\mu - 2 & 3\mu - 6 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} |-6| = 3 \text{ τ.μ.}$$

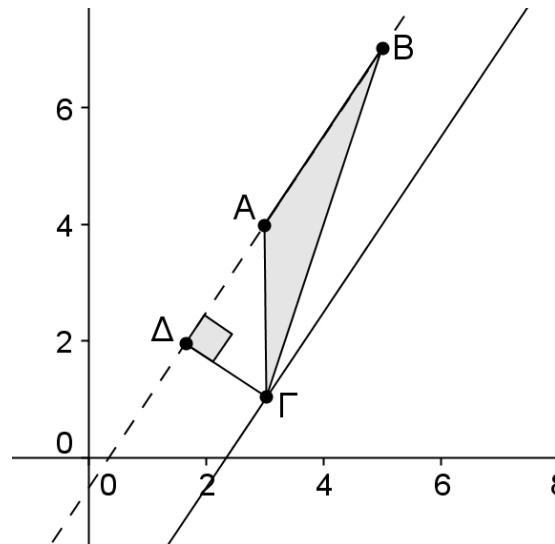
οπότε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ανεξάρτητο του μ .

ii) Έστω $\Gamma(x, y)$ οπότε

$$\begin{cases} x = 2\mu + 1 \\ y = 3\mu - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2\mu \\ y + 2 = 3\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \mu \\ \frac{y+2}{3} = \mu \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x - 3 = 2y + 4 \Leftrightarrow 2y = 3x - 7 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$$

Άρα το Γ ανήκει στην ευθεία $(\varepsilon): y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$



γ) Είναι $\lambda_{\overrightarrow{AB}} = \frac{3}{2} = \lambda_{\varepsilon}$ άρα $(\varepsilon) \parallel (\varepsilon_{AB})$

Έτσι λοιπόν $d(\varepsilon, \varepsilon_{AB}) = \text{σταθερή και ανεξάρτητη από την επιλογή του } \Gamma \text{ οπότε σε κάθε περίπτωση}$

$$\left(\overset{\Delta}{AB\Gamma} \right) = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) \right| = \frac{1}{2} (AB) d(\varepsilon, \varepsilon_{AB}) = \text{σταθερό και ανεξάρτητο του σημείου}$$

Γ άρα και του μ .

ΑΣΚΗΣΗ Δ6 (22563)

Θεωρούμε το σημείο $M(-3, -2)$ και ευθεία που διέρχεται από το M και τέμνει τους αρνητικούς ημιάξονες στα σημεία A, B .

α) Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας είναι αρνητικός.

(Μονάδες 10)

β) Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του τριγώνου OAB .

i. Να αποδείξετε ότι $E(\lambda) \geq 12$ για κάθε $\lambda < 0$.

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που σχηματίζει με τους ημιάξονες τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδόν.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι η ευθεία (ϵ) που διέρχεται από το $M(-3,-2)$ τέμνει τον αρνητικό ημιάξονα των x στο σημείο $A(x_A, 0)$ με $x_A < 0$ και τον αρνητικό ημιάξονα των y στο σημείο $B(0, y_B)$ με $y_B < 0$

$$\text{Οπότε } \lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{y_B}{x_A}$$

$$\text{Αφού } y_B < 0 \text{ και } x_A < 0 \text{ είναι } \frac{y_B}{x_A} > 0 \Rightarrow -\frac{y_B}{x_A} < 0 \Rightarrow \lambda < 0$$

β) i) Η εξίσωση της ευθείας (ϵ) που διέρχεται από το $M(-3,-2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ (από το α) ερώτημα) είναι:

$$(\epsilon): y - y_M = \lambda(x - x_M) \Rightarrow y + 2 = \lambda(x + 3) \Rightarrow y = \lambda x + 3\lambda - 2 \quad (1)$$

$$\text{Για } y = 0, (1) \Rightarrow -\lambda x = 3\lambda - 2 \Rightarrow x = \frac{3\lambda - 2}{-\lambda} \Rightarrow x = \frac{2 - 3\lambda}{\lambda}$$

$$\text{Άρα } A\left(\frac{2 - 3\lambda}{\lambda}, 0\right)$$

$$\text{Για } x = 0, (1) \Rightarrow y = 3\lambda - 2$$

$$\text{Άρα } B(0, 3\lambda - 2)$$

Έτσι λοιπόν

$$\begin{aligned} \left(\overset{\Delta}{OAB} \right) &= \frac{1}{2} (OA)(OB) = \frac{1}{2} \left| \frac{2 - 3\lambda}{\lambda} \right| |3\lambda - 2| = \frac{1}{2} \left| \frac{3\lambda - 2}{\lambda} \right| |3\lambda - 2| = \frac{1}{2} \frac{|3\lambda - 2|}{|\lambda|} |3\lambda - 2| \\ &= \frac{1}{2} \frac{|3\lambda - 2|^2}{|\lambda|} = \frac{1}{2} \frac{(3\lambda - 2)^2}{|\lambda|} \stackrel{\lambda < 0}{=} \frac{1}{2} \frac{(3\lambda - 2)^2}{-\lambda} = -\frac{(3\lambda - 2)^2}{2\lambda} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } E(\lambda) = -\frac{(3\lambda - 2)^2}{2\lambda} \text{ με } \lambda < 0$$

Έχουμε,

$$E(\lambda) \geq 12 \Leftrightarrow -\frac{(3\lambda-2)^2}{2\lambda} \geq 12 \Leftrightarrow -\frac{9\lambda^2-12\lambda+4}{2\lambda} \geq 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 9\lambda^2 + 12\lambda + 4 \Leftrightarrow 0 \leq (3\lambda+2)^2 \text{ που ισχύει για κάθε } \lambda < 0$$

ii) Στο προηγούμενο ερώτημα δείξαμε ότι $E(\lambda) \geq 12$ για κάθε $\lambda < 0$

Για να δείξουμε ότι η ελάχιστη τιμή του εμβαδού είναι 12 πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $\lambda < 0$ ώστε $E(\lambda) = 12$

Λύνουμε την εξίσωση

$$E(\lambda) = 12 \Leftrightarrow -\frac{(3\lambda-2)^2}{2\lambda} = 12 \Leftrightarrow -\frac{9\lambda^2-12\lambda+4}{2\lambda} = 12 \Leftrightarrow$$

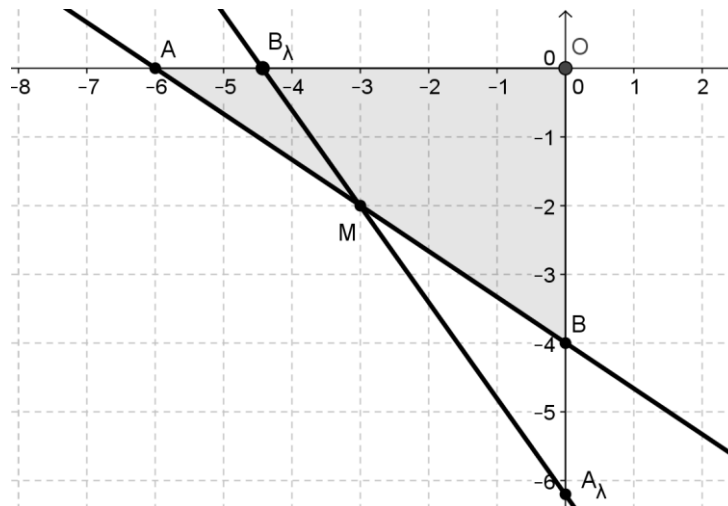
$$\Leftrightarrow 0 = 9\lambda^2 + 12\lambda + 4 \Leftrightarrow 0 = (3\lambda+2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\lambda+2=0 \Leftrightarrow 3\lambda=-2 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{2}{3} < 0$$

Άρα $\min E(\lambda) = 12$ για $\lambda = -\frac{2}{3}$

Τότε από τη σχέση (1) η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι

$$y = -\frac{2}{3}x + 3\left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x - 4$$



ΑΣΚΗΣΗ Δ7 (22565)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2(xy - 2x - 2y) + 3 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει δυο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους.

(Μονάδες 8)

Έστω $\varepsilon_1: x + y = 1$ και $\varepsilon_2: x + y = 3$ οι δυο ευθείες.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου που σχηματίζεται από τους άξονες και τις ευθείες.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή O και τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία A, B ώστε $(AB) = 2$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε

$$x^2 + y^2 + 2(xy - 2x - 2y) + 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 2xy) - 4(x + y) + 3 = 0$$

$$(x + y)^2 - 4(x + y) + 3 = 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 4(x + y) + 4 - 1 = 0$$

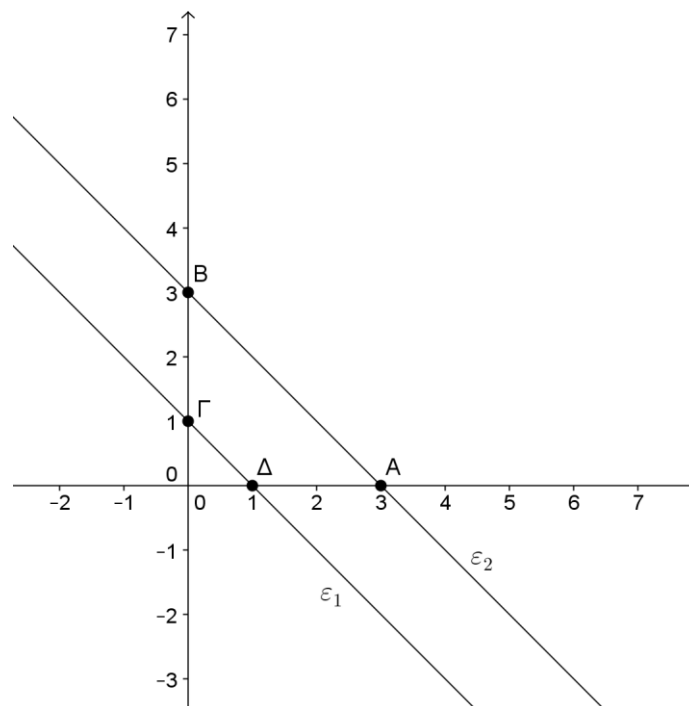
$$(x + y)^2 - 4(x + y) + 4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x + y - 2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x + y - 2 - 1)(x + y - 2 + 1) = 0$$

$$(x + y - 3)(x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0 \text{ ή } x + y - 1 = 0$$

Άρα προκύπτουν οι ευθείες με εξισώσεις $\varepsilon_1: y = -x + 1$ και $\varepsilon_2: y = -x + 3$ που είναι παράλληλες μεταξύ τους γιατί έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης ($\lambda_1 = \lambda_2 = -1$)

β) Η ε_1 τέμνει τους άξονες στα σημεία $\Gamma(0, 1)$ και $\Delta(1, 0)$ ενώ η ε_2 στα $A(3, 0)$ και $B(0, 3)$. Από το παρακάτω σχήμα φαίνεται ότι το ζητούμενο εμβαδό είναι το $(AB\Gamma\Delta)$ για το οποίο ισχύει

$$(AB\Gamma\Delta) = (OAB) - (O\Gamma\Delta) = \frac{3 \cdot 3}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2} = 4 \text{ τ.μ.}$$



γ) Από το $O(0,0)$ διέρχεται η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x=0$. Η ευθεία αυτή επαληθεύει τη υπόθεση του ερωτήματος γιατί τέμνει τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα σημεία Γ, B και είναι $(\Gamma B)=2$

Κάθε άλλη ευθεία ε που διέρχεται από το $O(0,0)$ έχει εξίσωση $\varepsilon: y=\lambda x, \lambda \neq -1$ (γιατί για $\lambda = -1$ η ε θα είναι παράλληλη με τις άλλες δύο ευθείες)

Για $y=\lambda x$, η ε_1 γράφεται $(\lambda+1)x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\lambda+1}$ και $y=\frac{\lambda}{\lambda+1}$. Άρα οι ευθείες $\varepsilon, \varepsilon_1$ τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$. Ομοίως βρίσκουμε ότι και οι ευθείες $\varepsilon, \varepsilon_2$ τέμνονται στο σημείο $B\left(\frac{3}{\lambda+1}, \frac{3\lambda}{\lambda+1}\right)$

Τότε

$$(AB)=2 \Rightarrow \sqrt{\frac{4}{(\lambda+1)^2} + \frac{4\lambda^2}{(\lambda+1)^2}} = 2 \Rightarrow \frac{4(\lambda^2+1)}{\lambda^2+2\lambda+1} = 4 \Rightarrow \lambda=0$$

Άρα, $\varepsilon: y=0$.

Επομένως οι ζητούμενες ευθείες είναι οι $\varepsilon: y=0$ και $\varepsilon': x=0$

ΑΣΚΗΣΗ Δ8 (22568)

Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy θεωρούμε τα σημεία $M(x, y)$, $A(-1, 3)$ και $B(2, -1)$ ώστε να σχηματίζουν τρίγωνο με εμβαδόν $(MAB)=4$.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του M είναι δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ παράλληλες μεταξύ τους.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την απόσταση των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα A, B είναι η μεσοπαράλληλη των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Πως αιτιολογείται γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό;

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{AM} = (x+1, y-3)$ και $\overrightarrow{AB} = (2+1, -1-3) = (3, -4)$, άρα

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x+1 & y-3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4(x+1) - 3(y-3) = -4x - 3y + 5$$

Και $(MAB) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})| = \frac{1}{2} |-4x - 3y + 5|$, αλλά

$$(MAB) = 4 \Rightarrow \frac{1}{2} |-4x - 3y + 5| = 4 \Rightarrow |4x + 3y - 5| = 8$$

$$\Rightarrow 4x + 3y - 5 = 8 \text{ ή } 4x + 3y - 5 = -8$$

άρα

$$4x + 3y - 13 = 0 \text{ ή } 4x + 3y + 3 = 0$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Μ είναι οι ευθείες με εξισώσεις

$\varepsilon_1 : 4x + 3y - 13 = 0$ και $\varepsilon_2 : 4x + 3y + 3 = 0$ που είναι παράλληλες αφού και οι δύο

έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{4}{3}$

β) Βρίσκω ένα τυχαίο σημείο πάνω στην $\varepsilon_2 : 4x + 3y + 3 = 0$.

Για $x=2$ είναι:

$$8 + 3y + 3 = 0 \Rightarrow 3y = -11 \Rightarrow y = -\frac{11}{3}$$

Άρα το $\Gamma\left(2, -\frac{11}{3}\right)$ είναι σημείο της ε_2 , τότε:

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(\Gamma, \varepsilon_1) = \frac{\left|4 \cdot 2 + 3 \cdot \left(-\frac{11}{3}\right) + (-13)\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|8 - 11 - 13|}{\sqrt{25}} = \frac{16}{5}$$

γ) Έστω ε η ευθεία που διέρχεται από τα Α, Β τότε

$$\lambda_\varepsilon = \frac{3 - (-1)}{-1 - 2} = -\frac{4}{3}$$

δηλαδή είναι παράλληλη προς τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αφού και οι τρεις έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Ακόμα

$$d(A, \varepsilon_1) = \frac{|-4 + 9 - 13|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{8}{5} = \frac{d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{2}$$

οπότε η ευθεία **ΑΒ** είναι μεσοπαράλληλη των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

Άρα $\varepsilon : y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$ Από $A(-1, 3)$ και $\lambda_\varepsilon = -\frac{4}{3}$ έχουμε

$$\text{Υπολογίζω την } d(A, \varepsilon_1) = \frac{|-4 + 9 + 3|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{8}{5} \text{ και } d(A, \varepsilon_2) = \frac{|-4 + 9 - 13|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{8}{5}.$$

Επειδή $\varepsilon \parallel \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και ένα σημείο της (ε) το Α ισαπέχει από τις ευθείες ε_1 και ε_2 τότε η

(ε) θα είναι η μεσοπαράλληλη των ευθειών ε_1 και ε_2

2^{ος} τρόπος

Η ευθεία ε που διέρχεται από τα A, B έχει εξίσωση

$$\varepsilon: y-3 = -\frac{4}{3} \cdot (x+1) \Rightarrow y-3 = -\frac{4}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow 3y-9 = -4x-4 \Rightarrow 3y+4x-5=0$$

Έστω M σημείο της μεσοπαράλληλης τότε θα ισχύει

$$d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2) \Leftrightarrow \frac{|4x+3y-13|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|4x+3y+3|}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

$$\Leftrightarrow |4x+3y-13| = |4x+3y+3|$$

$$\Leftrightarrow 4x+3y-13 = 4x+3y+3 \quad \text{ή} \quad 4x+3y-13 = -(4x+3y+3)$$

$$-13=3 \text{ αδύνατο} \quad \text{ή} \quad 8x+6y-10=0 \Leftrightarrow 4x+3y-5=0$$

Άρα η ευθεία που διέρχεται από τα A, B είναι όντως η μεσοπαράλληλη των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

ΑΣΚΗΣΗ Δ9 (22571)

Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$ και $\Gamma(2\lambda + 1, 1 - \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , τα A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο και το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σταθερό.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Γ κινείται σε ευθεία παράλληλη στην AB .

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ορθογώνιο με υποτεινούσα την $B\Gamma$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = (-4, 2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (2\lambda, -\lambda-1)$. Άρα,

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2\lambda & -\lambda-1 \end{vmatrix} = 4\lambda + 4 - 4\lambda = 4 \neq 0.$$

Άρα $\overrightarrow{AB}$ μη παράλληλο με $\overrightarrow{A\Gamma}$ δηλαδή τα A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

Ακόμα $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \text{ τ.μ.}$ Άρα το εμβαδόν του τριγώνου

$AB\Gamma$ είναι σταθερό.

β) Έστω $\Gamma(x, y)$. Τότε $x = 2\lambda + 1$ και $y = 1 - \lambda$.

Θα έχουμε $\lambda = 1 - y$ και $x = 2(1 - y) + 1$ ή $x + 2y - 3 = 0$.

Άρα το σημείο Γ κινείται στην ευθεία $\varepsilon: x + 2y - 3 = 0$.

Επίσης, $\lambda_{AB} = \frac{4-2}{-3-1} = -\frac{1}{2} = \lambda_{\varepsilon}$

Δηλαδή η ε είναι παράλληλη στην ευθεία AB.

γ) Επειδή τρίγωνο ABΓ ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΒΓ θα είναι $\hat{A} = 90^\circ$.

Άρα $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AG}$ οπότε

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Rightarrow -4 \cdot 2\lambda + 2(-\lambda - 1) = 0 \Rightarrow -8\lambda - 2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow -10\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{5}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ10 (22577)

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy θεωρούμε τις ευθείες

$$\varepsilon_\lambda: x + (\lambda + 2)y - \lambda + 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο M.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $d(O, \varepsilon_\lambda) \leq \sqrt{10}$

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε ποια από τις ευθείες της παραπάνω μορφής απέχει την μέγιστη απόσταση από το O.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$\varepsilon_\lambda: x + (\lambda + 2)y - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow x + \lambda y + 2y - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow x + 2y + 1 - \lambda(y - 1) = 0 \quad (1)$$

Για να δείξουμε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο, αρκεί να βρούμε ένα σημείο $M(x_0, y_0)$ του οποίου οι συντεταγμένες να επαληθεύουν την (1) για όλες τις τιμές του λ . το ζητούμενο σημείο είναι εκείνο του οποίου οι συντεταγμένες μηδενίζουν τις παραστάσεις $x + 2y + 1$ και $y - 1$, δηλαδή η λύση του συστήματος

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow (x, y) = (-3, 1)$$

Άρα όλες οι ευθείες της οικογένειας (1) διέρχονται από το $M(-3, 1)$.

β) Έχουμε $d(O, \varepsilon_\lambda) = \frac{|1 - \lambda|}{\sqrt{1 + (\lambda + 2)^2}}$ αρκεί να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{|1 - \lambda|}{\sqrt{1 + (\lambda + 2)^2}} \leq \sqrt{10} &\Leftrightarrow |1 - \lambda| \leq \sqrt{10} \sqrt{1 + (\lambda + 2)^2} \Leftrightarrow (1 - \lambda)^2 \leq 10[1 + (\lambda + 2)^2] \\ &\Leftrightarrow 1 + \lambda^2 - 2\lambda \leq 10 + 10(\lambda^2 + 4\lambda + 4) \Leftrightarrow 9\lambda^2 + 42\lambda + 49 \geq 0 \Leftrightarrow (3\lambda + 7)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

που ισχύει.

γ) Θα πρέπει $d(O, \varepsilon_\lambda) = \sqrt{10}$.

Άρα

$$\frac{|1 - \lambda|}{\sqrt{1 + (\lambda + 2)^2}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow (3\lambda + 7)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{7}{3}$$

Για $\lambda = -\frac{7}{3}$ η ευθεία έχει εξίσωση:

$$\varepsilon : x + \left(-\frac{7}{3} + 2\right)y + \frac{7}{3} + 1 = 0 \Rightarrow x - \frac{1}{3}y + \frac{10}{3} = 0 \Rightarrow 3x - y + 10 = 0$$



Β Θέματα

Συνδυαστικές ασκήσεις 1ου – 2ου Κεφαλαίου

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (20060)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -1)$ και $\vec{\beta} = (3, 0)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = 4\vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta}$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{\vec{u}^2}{5}$ και

διέρχεται από το σημείο $A(1, \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 2)$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$\vec{u} = 4\vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta} = 4 \cdot (1, -1) - \frac{1}{3}(3, 0) = (4, -4) - (1, 0) = (3, -4)$$

β) Είναι

$$\frac{\vec{u}^2}{5} = \frac{|\vec{u}|^2}{5} = \frac{\sqrt{3^2 + (-4)^2}^2}{5} = \frac{\sqrt{9+16}^2}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\text{Επίσης } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 = 3$$

Άρα θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης 5 και διέρχεται από το σημείο $A(1, 5)$.

Σύμφωνα με τη θεωρία η εξίσωση της θα είναι :

$$y - 5 = 5(x - 1) \Leftrightarrow y - 5 = 5x - 5 \Leftrightarrow y = 5x$$

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (20068)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-5, 4)$, $B(-1, 6)$, $\Gamma(4, 1)$ και σημείο Μ της πλευράς ΑΒ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ.

(Μονάδες 9)

γ) Αν το σημείο Μ έχει συντεταγμένες $\left(-4, \frac{9}{2}\right)$, να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Γ, Μ.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Είναι,

$$\overrightarrow{AB} = (-1 + 5, 6 - 4) = (4, 2).$$

β) Έχουμε

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} \quad \text{ή} \quad \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4} (4, 2) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

όμως,

$$\overrightarrow{AM} = (x_M + 5, y_M - 4),$$

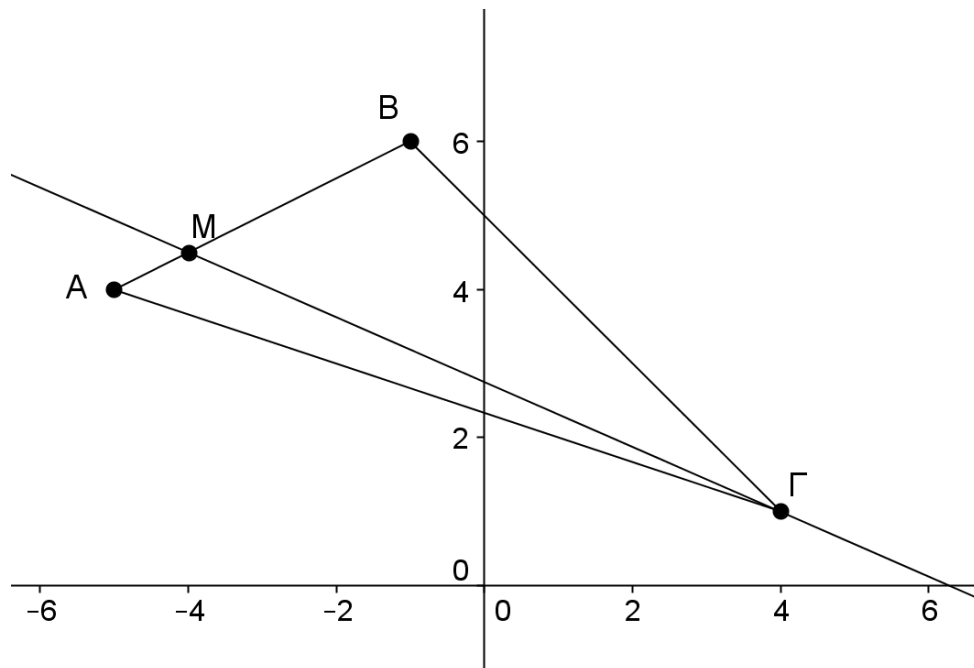
$$\text{άρα } x_M + 5 = 1 \Leftrightarrow x_M = -4 \quad \text{και} \quad y_M - 4 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y_M = \frac{9}{2}. \text{Επομένως, } M\left(-4, \frac{9}{2}\right).$$

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ΓΜ είναι

$$\lambda = \frac{\frac{9}{2} - 1}{-4 - 4} = \frac{\frac{7}{2}}{-8} = -\frac{7}{16}.$$

Άρα η εξίσωση της ΓΜ είναι:

$$y - 1 = -\frac{7}{16}(x - 4) \quad \text{ή} \quad 16y - 16 = -7x + 28 \quad \text{ή} \quad 7x + 16y + 44 = 0.$$



ΑΣΚΗΣΗ Β3 (22521)

Θεωρούμε τα σημεία $A(\lambda+1, 2\lambda)$, $B(2-\lambda, 4)$ και $\Gamma(-1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό λ , τα σημεία σχηματίζουν τρίγωνο.

Μονάδες 10

β) Έστω ότι για το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει $(AB\Gamma) = 3$.

i) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$ ή $\lambda = 2$.

Μονάδες 10

ii) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{\Gamma A}, \overrightarrow{\Gamma B}$ όταν $\lambda = 1$.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

α) Για να σχηματίζουν τα σημεία A, B, Γ τρίγωνο για κάθε πραγματικό αριθμό λ θα πρέπει να μην είναι συνευθειακά δηλαδή θα πρέπει τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$ να μην είναι παράλληλα επομένως να ισχύει $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) \neq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό λ . Είναι

$$\overrightarrow{AB} = (1-2\lambda, 4-2\lambda), \overrightarrow{A\Gamma} = (-2-\lambda, 2-2\lambda).$$

Επομένως,

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 1-2\lambda & 4-2\lambda \\ -2-\lambda & 2-2\lambda \end{vmatrix} = (1-2\lambda)(2-2\lambda) - (4-2\lambda)(-2-\lambda) =$$

$$2-2\lambda-4\lambda+4\lambda^2+8-4\lambda+4\lambda-2\lambda^2 = 2\lambda^2-6\lambda+10 = 2(\lambda^2-3\lambda+5)$$

Επομένως είναι $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = 2(\lambda^2-3\lambda+5) \neq 0$ αφού το τριώνυμο $\lambda^2-3\lambda+5$

διότι έχει διακρίνουσα $\Delta = 9-20 = -11 < 0$ και επομένως το τριώνυμο είναι ομόσημο του συντελεστή του λ^2 .

Επομένως $\lambda^2-3\lambda+5 > 0$ για κάθε πραγματικό λ . Συνεπώς τα σημεία A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο για κάθε πραγματικό αριθμό λ .

β) i) Είναι,

$$(AB\Gamma) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})| = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} |2\lambda^2-6\lambda+10| = 3 \Leftrightarrow |\lambda^2-3\lambda+5| = 3 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2-3\lambda+5=3 \text{ ή } \lambda^2-3\lambda+5=-3 \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0 \text{ ή } \lambda^2-3\lambda+8=0. \text{ Η εξίσωση}$$

$$\lambda^2-3\lambda+8=0 \text{ έχει } \Delta=1 > 0 \text{ άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες τις}$$

$\lambda=2$ ή $\lambda=1$. Ενώ η εξίσωση $\lambda^2-3\lambda+2=0$ έχει $\Delta=9-32=-23 < 0$ επομένως δεν έχει πραγματικές ρίζες. Επομένως είναι $\lambda=1$ ή $\lambda=2$.

ii) Για $\lambda=1$ είναι $A(2, 2), B(1, 4), \Gamma(-1, 2)$.

Επομένως

$$\overrightarrow{\Gamma\Lambda} = (2 - (-1), 2 - 2) = (3, 0), \overrightarrow{\Gamma\beta} = (1 - (-1), 4 - 2) = (2, 2).$$

Επίσης έχουμε

$$\overrightarrow{\Gamma\Lambda} \cdot \overrightarrow{\Gamma\beta} = |\overrightarrow{\Gamma\Lambda}| \cdot |\overrightarrow{\Gamma\beta}| \cdot \cos(\overrightarrow{\Gamma\Lambda}, \overrightarrow{\Gamma\beta}) \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{\Gamma\Lambda}, \overrightarrow{\Gamma\beta}) = \frac{\overrightarrow{\Gamma\Lambda} \cdot \overrightarrow{\Gamma\beta}}{|\overrightarrow{\Gamma\Lambda}| \cdot |\overrightarrow{\Gamma\beta}|} \Leftrightarrow$$

$$\cos(\overrightarrow{\Gamma\Lambda}, \overrightarrow{\Gamma\beta}) = \frac{\overrightarrow{\Gamma\Lambda} \cdot \overrightarrow{\Gamma\beta}}{|\overrightarrow{\Gamma\Lambda}| \cdot |\overrightarrow{\Gamma\beta}|} = \frac{3 \cdot 2 + 0 \cdot 2}{\sqrt{3^2 + 0^2} \sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{6}{3 \cdot \sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{2\sqrt{8}}{8} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Άρα } \cos(\overrightarrow{\Gamma\Lambda}, \overrightarrow{\Gamma\beta}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και επομένως η γωνία των διανυσμάτων } \overrightarrow{\Gamma\Lambda}, \overrightarrow{\Gamma\beta} \text{ ισούται με } \frac{\pi}{4}$$



Δ Θέματα

Συνδυαστικές ασκήσεις 1ου – 2ου Κεφαλαίου

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (18617)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ με μέτρα 2, 6 αντίστοιχα και $\varphi \in [0, \pi]$ η μεταξύ τους γωνία. Επίσης δίνεται η εξίσωση $(\vec{a}\vec{b} + 12)x + (\vec{a}\vec{b} - 12)y - 5 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\varphi \in [0, \pi]$.

(Μονάδες 3)

β) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, να αποδείξετε ότι $\vec{b} = 3\vec{a}$

(Μονάδες 7)

γ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $\vec{b} = -3\vec{a}$

(Μονάδες 7)

δ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στη διχοτόμο πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, να αποδείξετε ότι $\vec{b} \perp \vec{a}$

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση $(\vec{a}\vec{b} + 12)x + (\vec{a}\vec{b} - 12)y - 5 = 0$ (1), είναι εξίσωση της μορφής

$$Ax + By + \Gamma = 0 \text{ με } A = \vec{a}\vec{b} + 12, B = \vec{a}\vec{b} - 12 \text{ και } \Gamma = -5.$$

Για να παριστάνει αυτή η εξίσωση ευθεία γραμμή αρκεί να ισχύει πάντοτε

$$A \neq 0 \text{ ή } B \neq 0.$$

Παρατηρούμε ότι,

$$A = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -12 \text{ ενώ } B = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = +12$$

συνεπώς δεν ισχύει ποτέ ταυτόχρονα $A = 0$ και $B = 0$, αφού τότε θα έπρεπε να ισχύει $\vec{a} \cdot \vec{b} = -12$ και $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$, δηλαδή $-12 = 12$, που είναι προφανώς άτοπο.

Άρα ισχύει πάντοτε $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ που σημαίνει ότι η εξίσωση (1) παριστάνει πάντοτε ευθεία γραμμή.

β) Η ευθεία της εξίσωσης (1) είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ όταν

$$B = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 12 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = 12 \Leftrightarrow 2 \cdot 6 \cdot \cos \varphi = 12 \Leftrightarrow \cos \varphi = 1, \text{ οπότε } \varphi = 0$$

που σημαίνει ότι $\vec{a} \uparrow \vec{b}$.

Η τελευταία έπεται ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, τότε,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot (\lambda \vec{a}) = 12 \Leftrightarrow \lambda \vec{a}^2 = 12 \Leftrightarrow \lambda |\vec{a}|^2 = 12 \Leftrightarrow \lambda \cdot 2^2 = 12 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda = 12 \Leftrightarrow \lambda = \frac{12}{4} = 3,$$

συνεπώς

$$\vec{b} = \lambda \vec{a} \Rightarrow \vec{b} = 3\vec{a}.$$

γ) Η ευθεία της εξίσωσης (1) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ όταν

$$A = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -12 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = -12 \Leftrightarrow 2 \cdot 6 \cdot \cos \varphi = -12 \Leftrightarrow \cos \varphi = -1,$$

οπότε $\varphi = \pi$ που σημαίνει ότι $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$.

Η τελευταία έπεται ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < 0$ τέτοιο ώστε $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, τότε

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -12 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot (\lambda \vec{a}) = -12 \Leftrightarrow \lambda \vec{a}^2 = -12 \Leftrightarrow \lambda |\vec{a}|^2 = -12 \Leftrightarrow \lambda \cdot 2^2 = -12 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda = -12 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-12}{4} = -3,$$

συνεπώς

$$\vec{b} = \lambda \vec{a} \Rightarrow \vec{b} = -3\vec{a}.$$

δ) Η ευθεία της εξίσωσης (1) είναι παράλληλη στην διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων όταν έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1 \Leftrightarrow -\frac{A}{B} = 1$, οπότε

$$-\frac{\vec{a}\vec{b} + 12}{\vec{a}\vec{b} - 12} = 1 \Rightarrow \vec{a}\vec{b} + 12 = -(\vec{a}\vec{b} - 12) \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b} + 12 = -\vec{a}\vec{b} + 12 \Leftrightarrow 2\vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (18609)

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\overrightarrow{AB} = (\lambda, \lambda + 1)$ $\overrightarrow{A\Gamma} = (3\lambda, \lambda - 1)$ όπου $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -2$ και M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM} = (2\lambda, \lambda)$

Μονάδες 7

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι κάθετο στο

$$\text{διάνυσμα } \vec{a} = \left(\frac{2}{\lambda}, -\lambda \right)$$

Μονάδες 8

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG}}{2} = \frac{(\lambda, \lambda+1) + (3\lambda, \lambda-1)}{2} = \frac{(4\lambda, 2\lambda)}{2} = (2\lambda, \lambda)$$

β) Είναι

$$\overrightarrow{AM} \perp \vec{\alpha} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda \cdot \frac{2}{\lambda} + \lambda(-\lambda) = 0 \Leftrightarrow 4 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$$

αφού $\lambda \neq -2$ τότε $\lambda = 2$

γ) Για $\lambda = 2$ είναι $\overrightarrow{AB} = (2, 3)$ και $\overrightarrow{AG} = (6, 1)$ τότε

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |2 - 18| = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (22588)

Θεωρούμε τα σημεία $A(2, 2)$, $B(-1, 0)$ και $\Gamma(0, 2)$.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ ώστε

$$\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 - 2\overrightarrow{GM}^2 = 3 \text{ είναι η ευθεία } \varepsilon: x - 2y + 1 = 0.$$

Μονάδες 10

β) Να βρείτε:

i. Σημείο K στον άξονα $x'x$ ώστε το συμμετρικό του ως προς την ευθεία του ερωτήματος α) να είναι σημείο Λ του άξονα $y'y$.

Μονάδες 10

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $K\Lambda\Sigma$ όπου Σ είναι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

α) Υπολογίζουμε αρχικά τις συντεταγμένες των τριών διανυσμάτων και έχουμε:

$$\overrightarrow{AM} = (x-2, y-2), \quad \overrightarrow{BM} = (x+1, y), \quad \overrightarrow{GM} = (x, y-2)$$

$$\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 - 2\overrightarrow{GM}^2 = 3 \Leftrightarrow |\overrightarrow{AM}|^2 + |\overrightarrow{BM}|^2 - 2|\overrightarrow{GM}|^2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (x+1)^2 + y^2 - 2(x^2 + (y-2)^2) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{x^2} - 4x + \cancel{4} + \cancel{y^2} - 4y + \cancel{4} + \cancel{x^2} + 2x + 1 + \cancel{y^2} - \cancel{2x^2} - \cancel{2y^2} + 8y - \cancel{8} - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2x + 4y - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x - 2y + 1 = 0}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ είναι η ευθεία: $(\varepsilon): x - 2y + 1 = 0$

β) (i) Αφού το K ανήκει στον άξονα των x είναι της μορφής $K(\kappa, 0)$. Έστω Λ το συμμετρικό του K ως προς την (ε) του α) ερωτήματος. Όμως το Λ ανήκει στον άξονα των $y'y$ είναι της μορφής $\Lambda(0, \lambda)$.

Έστω $KM \perp \varepsilon$. Τότε το M είναι μέσο του KL , όποτε είναι: $M\left(\frac{\kappa}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$.

Έστω Δ το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα των x , επομένως θα πρέπει $\Delta(-1, 0)$.

Αφού το M ανήκει στην (ε) επαληθεύει την εξίσωση της, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\kappa}{2} - 2\frac{\lambda}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 2 \cdot (\lambda - 1)$$

επομένως

$$M\left(\lambda - 1, \frac{\lambda}{2}\right) \text{ και } K(2\lambda - 2, 0)$$

Έχουμε,

$$\overline{AM} \perp \overline{MK} \text{ ,όπου } \overline{AM} = \left(\lambda, \frac{\lambda}{2}\right) \text{ , } \overline{MK} = \left(\lambda - 1, -\frac{\lambda}{2}\right)$$

Επομένως,

$$\overline{AM} \cdot \overline{MK} = 0 \Leftrightarrow \frac{3\lambda^2}{4} - \lambda = 0 \Leftrightarrow 3\lambda^2 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot (3\lambda - 4) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{4}{3}} \text{ ή } \lambda = 0 \text{ απορ.}$$

Οπότε,

$$\kappa = 2 \cdot \left(\frac{4}{3} - 1\right) \Rightarrow \kappa = \frac{2}{3}$$

Έτσι έχουμε τις συντεταγμένες των σημείων:

$$K\left(\frac{2}{3}, 0\right) \text{ , } \Lambda\left(0, \frac{4}{3}\right) \text{ και } M\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

(ii) Αφού Σ είναι το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα των y είναι : $\Sigma\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Είναι

$$(K\Lambda\Sigma) = \frac{1}{2} \left| \det(\overline{K\Lambda}, \overline{K\Sigma}) \right| \text{ όπου } \overline{K\Lambda} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \text{ , } \overline{K\Sigma} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

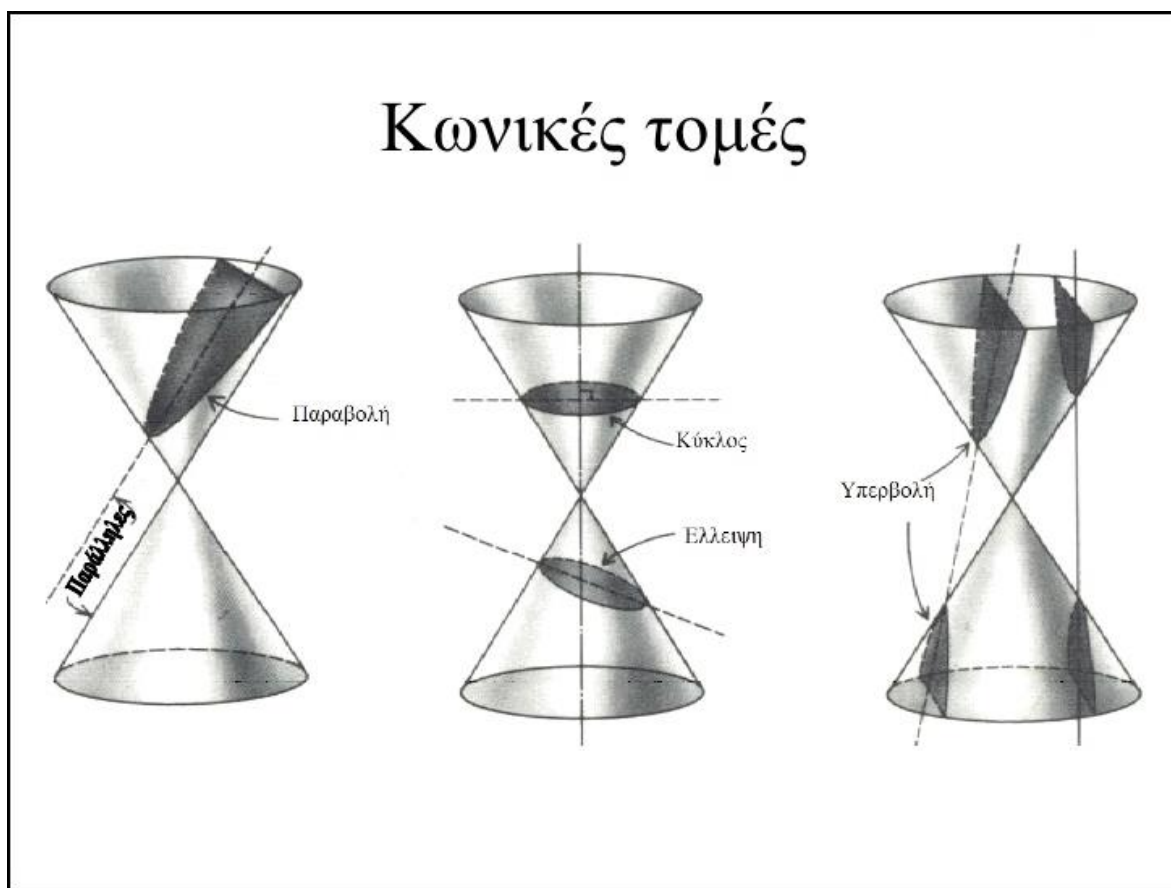
οπότε:

$$(K\Lambda\Sigma) = \frac{1}{2} \left| \det(\overline{K\Lambda}, \overline{K\Sigma}) \right| = \frac{1}{2} \left| -\frac{2}{3} + \frac{8}{9} \right| = \frac{5}{18} \text{ τ.μ.}$$

Μαθηματικά Προσανατολισμού

Β' Λυκείου

Κεφάλαιο 3ο: Κωνικές τομές



Β Θέματα: 3.1 (Κύκλος)

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (22507)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 + 10y + 16 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(0, -5)$ και ακτίνα $\rho = 3$.

Μονάδες 12

β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του παραπάνω κύκλου.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) 1^{ος} τρόπος

Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A = 0$, $B = 10$ και $\Gamma = 16$

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0^2 + 10^2 - 4 \cdot 16 = 100 - 64 = 36 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{0}{2}, -\frac{10}{2}\right)$ δηλ. $K(0, -5)$ και ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

2^{ος} τρόπος

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 10y = -16 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 5 + 5^2 = -16 + 25 \Leftrightarrow x^2 + (y + 5)^2 = 9$$

Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(0, -5)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{9} = 3$.

β) Όλες οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ είναι οι:

$$\varepsilon_1: x = 0(y' y)$$

$$d(K, \varepsilon_1) = 0 \neq \rho$$

επομένως η ε_1 δεν ικανοποιεί το ζητούμενο.

$$\varepsilon_2: y - 0 = \lambda(x - 0), \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - y = 0$$

Άρα,

$$d(K, \varepsilon_2) = \frac{|\lambda \cdot 0 + (-1) \cdot (-5) + 0|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$$

Επίσης,

$$d(K, \varepsilon_2) = \rho \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 3 \Leftrightarrow 3\sqrt{\lambda^2 + 1} = 5 \Leftrightarrow 9(\lambda^2 + 1) = 25 \Leftrightarrow 9\lambda^2 + 9 = 25 \Leftrightarrow$$

$$9\lambda^2 = 25 - 9 \Leftrightarrow 9\lambda^2 = 16 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{16}{9}} \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{4}{3}$$

Άρα οι ζητούμενες ευθείες είναι οι:

$$y = \frac{4}{3}x \text{ και } y = -\frac{4}{3}x$$

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (22508)

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε κύκλο C που διέρχεται από το σημείο A(3,10) και έχει κέντρο το K(4,8)

α) Να αποδείξετε ότι $C: (x-4)^2 + (y-8)^2 = 5$, και έπειτα να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία O και K.

Μονάδες 13

β) Από τα σημεία του κύκλου C να βρείτε τις συντεταγμένες:

i) του σημείου που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

ii) του σημείου που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$\rho = (KA) = \sqrt{(3-4)^2 + (10-8)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Επομένως

$$C: (x-4)^2 + (y-8)^2 = 5$$

$$\lambda_{OK} = \frac{8-0}{4-0} = \frac{8}{4} = 2 \text{ επομένως } \varepsilon: y-0 = 2(x-0) \Leftrightarrow y = 2x$$

β) Έχουμε,

$$\begin{cases} C: (x-4)^2 + (y-8)^2 = 5 \\ \varepsilon: y = 2x \end{cases}$$

οπότε

$$(x-4)^2 + (2x-8)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + 4x^2 - 32x + 64 = 5 \Leftrightarrow$$

$$5x^2 - 40x + 75 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4 \text{ και } x_{1,2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{10}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Για $x_1 = 5$ έχουμε $y_1 = 2 \cdot 5 = 10$ ενώ για $x_2 = 3$ έχουμε $y_2 = 2 \cdot 3 = 6$

Επομένως τα σημεία τομής της ευθείας ε και του κύκλου C είναι τα $M(5,10)$ και $N(3,6)$ με

$$(OM) = \sqrt{(5-0)^2 + (10-0)^2} = \sqrt{25+100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

και

$$(ON) = \sqrt{(3-0)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Αφού $(ON) < (OM)$ το σημείο που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι το N , ενώ το σημείο που απέχει την μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι το M .

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (22533)

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(x, y)$, $B(3, 2)$ και $\Gamma(1, 0)$. Αν τα σημεία αυτά σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα τη $B\Gamma$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το A κινείται στον κύκλο $C : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$.

Μονάδες 13

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του A , ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι και ισοσκελές.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) έχουμε:

$$\begin{aligned} (AB)^2 + (A\Gamma)^2 &= (B\Gamma)^2 \Leftrightarrow \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 + (x-1)^2 + y^2 &= (3-1)^2 + (2-0)^2 \Leftrightarrow \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 + x^2 - 2x + 1 + y^2 &= 4 + 4 \Leftrightarrow \\ 2x^2 - 8x + 2y^2 - 4y &= -6 \Leftrightarrow \\ x^2 - 4x + y^2 - 2y &= -3 \Leftrightarrow \\ (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) &= -3 + 4 + 1 \Leftrightarrow \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 &= 2 \end{aligned}$$

δηλαδή, το σημείο A ανήκει στο κύκλο $C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$ (1).

β) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές αν επιπλέον $(AB) = (A\Gamma)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} (AB)^2 &= (A\Gamma)^2 \Leftrightarrow \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 &= (x-1)^2 + y^2 \Leftrightarrow \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 \Leftrightarrow \\ -4x - 4y + 12 &= 0 \Leftrightarrow \\ -x - y + 3 &= 0 \Leftrightarrow y = -x + 3 \quad (2) \end{aligned}$$

Οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν:

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + (-x+2)^2 &= 2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (x-2)^2 = 2 \Leftrightarrow 2(x-2)^2 = 2 \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 &= 1 \Leftrightarrow |x-2| = 1 \Leftrightarrow x-2 = 1 \text{ ή } x-2 = -1 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = 1\end{aligned}$$

- Για $x = 3$ η σχέση (2) δίνει $y = -3 + 3 = 0$
- Για $x = 1$ η σχέση (2) δίνει $y = -1 + 3 = 2$

Άρα, $A(3, 0)$ ή $A(1, 2)$ το ζητούμενο σημείο.

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (22534)

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $K(2, -1)$ και $A(-6, 5)$.

α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο K που διέρχεται από το A , έχει εξίσωση
 $C : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 100$

Μονάδες 12

β) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που εφάπτεται εσωτερικά στον κύκλο C στο σημείο A και έχει ακτίνα ίση με το μισό της ακτίνας του C .

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(2, -1)$ που διέρχεται από το σημείο $A(-6, 5)$ έχει ακτίνα

$$\rho = (KA) = \sqrt{(2+6)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

Άρα, η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου C θα είναι:

$$C : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 10^2$$

β) Έστω $\Lambda(x_0, y_0)$ το κέντρο του ζητούμενου κύκλου C' και R η ακτίνα του.

Τότε,

$$R = \frac{\rho}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

και

$$(K\Lambda) = \rho - R = 10 - 5 = 5$$

η διάκεντρος των εσωτερικά εφαπτόμενων κύκλων.

Συνεπώς,

$$\sqrt{(x_0-2)^2 + (y_0+1)^2} = 5 \Leftrightarrow (x_0-2)^2 + (y_0+1)^2 = 5^2 \quad (1)$$

Επιπλέον,

$$(\Lambda A) = 5 \Leftrightarrow (\Lambda A)^2 = 5^2 \Leftrightarrow (x_0+6)^2 + (y_0-5)^2 = 5^2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε

$$\begin{aligned}(x_0-2)^2 + (y_0+1)^2 &= (x_0+6)^2 + (y_0-5)^2 \Leftrightarrow \\ x_0^2 - 4x_0 + 4 + y_0^2 + 2y_0 + 1 &= x_0^2 + 12x_0 + 36 + y_0^2 - 10y_0 + 25 \Leftrightarrow \\ -4x_0 + 2y_0 + 5 &= 12x_0 - 10y_0 + 61 \Leftrightarrow \\ 16x_0 - 12y_0 + 56 &= 0 \Leftrightarrow \\ 4x_0 - 3y_0 + 14 &= 0 \Rightarrow y_0 = \frac{4}{3}x_0 + \frac{14}{3} \quad (3)\end{aligned}$$

Οι σχέσεις (1) και (3) δίνουν:

$$(1), (3) \Rightarrow (x_0 - 2)^2 + \left(\frac{4}{3}x_0 + \frac{17}{3}\right)^2 = 5^2 \Leftrightarrow$$

$$(x_0 - 2)^2 + \frac{1}{9}(4x_0 + 17)^2 = 25 \Leftrightarrow$$

$$9(x_0^2 - 4x_0 + 4) + (16x_0^2 + 136x_0 + 289) = 225 \Leftrightarrow$$

$$9x_0^2 - 36x_0 + 36 + 16x_0^2 + 136x_0 + 289 = 225 \Leftrightarrow$$

$$25x_0^2 + 100x_0 + 100 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_0^2 + 4x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x_0 + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_0 = -2$$

$$\text{Άρα, } (3) \Rightarrow y_0 = -\frac{8}{3} + \frac{14}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Συνεπώς, το κέντρο του ζητούμενου κύκλου C' είναι $\Lambda(-2, 2)$ και η εξίσωσή του είναι

$$C': (x+2)^2 + (y-2)^2 = 5^2$$

ΑΣΚΗΣΗ Β5 (22536)

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία A(1, 0), B(3, -2) και την ευθεία $\varepsilon: x+y+1=0$. Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της μεσοκάθετης του τμήματος AB.

Μονάδες 10

β) Την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A, B και έχει το κέντρο του στην ευθεία ε .

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

Μεθοδολογία

Η εξίσωση κύκλου με κέντρο $O(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ είναι $C: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$

α) Έστω M το μέσον του τμήματος AB και ζ η μεσοκάθετός του.

$$\text{Τότε, } x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ και } y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0-2}{2} = -1$$

Άρα, $M(2, -1)$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-0}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\text{Άρα, } \zeta \perp AB \Leftrightarrow \lambda_\zeta \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\zeta = 1$$

και συνεπώς, η εξίσωση της ζ είναι

$$\zeta : y - y_M = \lambda_\zeta (x - x_M) \Leftrightarrow y + 1 = 1 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow x - y - 3 = 0$$

β) Έστω C ο ζητούμενος κύκλος. Αν $O(x_0, y_0)$ το κέντρο του, τότε,

$$O \in \varepsilon \Leftrightarrow x_0 + y_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow y_0 = -x_0 - 1 \quad (1)$$

Άρα, $O(x_0, -x_0 - 1)$ και

$$\begin{aligned} A, B \in C &\Leftrightarrow (OA) = (OB) \Leftrightarrow (OA)^2 = (OB)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 0)^2 = (x_0 - 3)^2 + (y_0 + 2)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2 = x_0^2 - 6x_0 + 9 + y_0^2 + 4y_0 + 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2x_0 + 1 = -6x_0 + 9 + 4y_0 + 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x_0 - 4y_0 = 12 \Leftrightarrow x_0 - y_0 = 3 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x_0 + x_0 + 1 = 3 \Leftrightarrow \\ &2x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 1 \end{aligned}$$

Άρα, $(1) \Rightarrow y_0 = -2$

Επομένως $O(1, -2)$ το κέντρο του C και $\rho = \sqrt{(1-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ η ακτίνα του.

Τελικά, $C : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 2^2$ η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου.

Δ Θέματα: 3.1 (κύκλος)

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (22557)

Έστω η εξίσωση: $(x - \lambda + 6)^2 + (y - 2\lambda)^2 = -\lambda^2 + 8\lambda - 12$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Τι παριστάνει γεωμετρικά σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy η εξίσωση (1) όταν $\lambda = 2$ και τι όταν $\lambda = 6$;

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ από το διάστημα (2,6) η εξίσωση (1) στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy παριστάνει κύκλο.

(Μονάδες 8)

γ) Καθώς το λ μεταβάλλεται στο διάστημα (2, 6), να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων οι οποίοι προκύπτουν από την εξίσωση (1) ανήκουν σε ένα ευθύγραμμο τμήμα από το οποίο εξαιρούνται τα άκρα του.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Όταν $\lambda = 2$ τότε η (1) γίνεται:

$$(x+4)^2 + (y-4)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 4 \end{cases}$$

Άρα η (1) παριστάνει σημείο με συντεταγμένες (-4, 4).

Όταν $\lambda = 6$ τότε η (1) γίνεται:

$$x^2 + (y-12)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 12 \end{cases}$$

Άρα η (1) παριστάνει πάλι σημείο με συντεταγμένες (0, 12).

β) Έχουμε από την (1):

$$\begin{aligned} (x - \lambda + 6)^2 + (y - 2\lambda)^2 &= -\lambda^2 + 8\lambda - 12 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + \lambda^2 + 36 - 2\lambda x + 12x - 12\lambda + y^2 - 4\lambda y + 4\lambda^2 + \lambda^2 - 8\lambda + 12 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + (12 - 2\lambda)x - 4\lambda y + 6\lambda^2 - 20\lambda + 48 &= 0 \end{aligned}$$

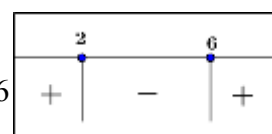
Για να παριστάνει κύκλο πρέπει:

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 - 4\Gamma &> 0 \Leftrightarrow (12 - 2\lambda)^2 + (-4\lambda)^2 - 4(6\lambda^2 - 20\lambda + 48) > 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 12 &< 0 \Leftrightarrow 2 < \lambda < 6 \end{aligned}$$

αφού,

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 64 - 48 = 16$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \begin{cases} 6 \\ 2 \end{cases}$$



γ) Άρα αφού για $\lambda \in (2, 6)$ παριστάνει κύκλο η εξίσωση (1), τότε το κέντρο του είναι:

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \text{ ή } K\left(-\frac{12-2\lambda}{2}, -\frac{-4\lambda}{2}\right) \text{ ή } K(\lambda-6, 2\lambda)$$

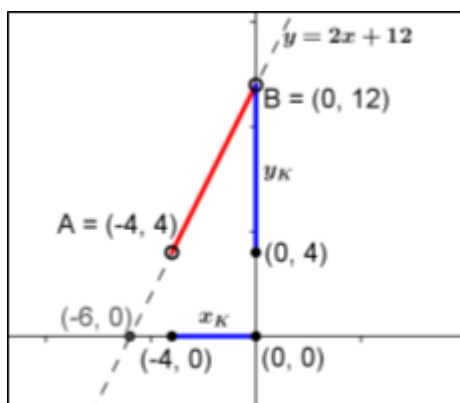
Άρα

$$\begin{cases} x_K = \lambda - 6 \\ y_K = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = x_K + 6 \\ y_K = 2(x_K + 6) \end{cases} \Rightarrow y_K = 2x_K + 12$$

Οπότε τα κέντρα των κύκλων ανήκουν στην ευθεία $y = 2x + 12$. Όμως

$$2 < \lambda < 6 \Rightarrow \begin{cases} 2 < x_K + 6 < 6 \\ 2 < \frac{y_K}{2} < 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 < x_K < 0 \\ 4 < y_K < 12 \end{cases}$$

Άρα τα κέντρα K των κύκλων ανήκουν στο ευθύγραμμο τμήμα AB , χωρίς τα άκρα $A(-4, 4)$ και $B(0, 12)$.



ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (22558)

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τον κύκλο $C_1: x^2 + y^2 = 4$ και μία τυχούσα διάμετρό του AB με $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί ισχύει $x_2 = -x_1$ και $y_2 = -y_1$;

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $N(\kappa, \lambda)$ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 5$ είναι ο κύκλος $C_2: x^2 + y^2 = 9$.

(Μονάδες 12)

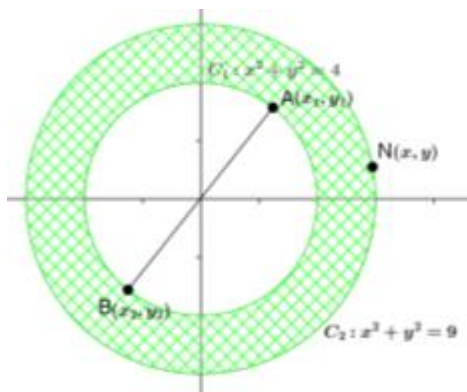
γ) Στο καρτεσιανό επίπεδο να προσδιορίσετε τη θέση των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει: $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Τα αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου $C_1: x^2 + y^2 = 4$ είναι συμμετρικά ως προς το $O(0, 0)$ επειδή ο παραπάνω κύκλος έχει κέντρο του το $O(0, 0)$. Άρα και τα σημεία

$A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ ως σημεία μιας τυχαίας διαμέτρου του θα είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο των αξόνων. Άρα $x_2 = -x_1$ και $y_2 = -y_1$ (1).



β) Έστω $N(\kappa, \lambda)$ σημείο του επιπέδου. Τότε:

$$\overrightarrow{NA} = (\kappa - x_1, \lambda - y_1) \text{ και } \overrightarrow{NB} = (\kappa - x_2, \lambda - y_2).$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 \stackrel{(1)}{=} x_1 \cdot (-x_1) + y_1 \cdot (-y_1) = -x_1^2 - y_1^2 = -4 \quad (2).$$

Άρα

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 5 &\Leftrightarrow (\kappa - x_1) \cdot (\kappa - x_2) + (\lambda - y_1) \cdot (\lambda - y_2) = 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \kappa^2 + \lambda^2 - \kappa(x_1 + x_2) - \lambda(y_1 + y_2) + x_1 x_2 + y_1 y_2 = 5 \Leftrightarrow \\ &\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \kappa^2 + \lambda^2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 = 5 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \kappa^2 + \lambda^2 - x^2 - y^2 = 5 \Leftrightarrow \kappa^2 + \lambda^2 = 9 \end{aligned}$$

Οπότε ο γ. τ. των σημείων N είναι ο κύκλος $C_2: x^2 + y^2 = 9$.

B' τρόπος

Επειδή Ο μέσο AB έχουμε:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 5 &\Rightarrow (\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OB}) = 5 \Rightarrow (\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{NO} - \overrightarrow{OA}) = 5 \Rightarrow \\ \overrightarrow{NO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 &= 5 \Rightarrow |\overrightarrow{NO}|^2 - 2^2 = 5 \Rightarrow |\overrightarrow{NO}|^2 = 9 \Rightarrow |\overrightarrow{NO}| = 3 \end{aligned}$$

Οπότε ο γ. τ. των σημείων N είναι ο κύκλος $C_2: x^2 + y^2 = 9$.

γ) Επειδή ισχύει ότι:

$$4 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3 \Rightarrow 2 \leq (OM) \leq 3 \Rightarrow R_1 \leq (OM) \leq R_2$$

τότε τα σημεία $M(x, y)$ αποτελούν την περιοχή ανάμεσα στους κύκλους C_1 και C_2 συμπεριλαμβανομένων και των κύκλων αυτών.

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (22581)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 8)

β) Ο κύκλος C εφάπτεται στον άξονα $x'x$ και να προσδιορίσετε το σημείο επαφής τους.

(Μονάδες 7)

γ) Το σημείο $M(2, -1)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον κύκλο σε δυο σημεία A, B ώστε η χορδή AB του κύκλου να έχει μέσο το M .

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) α' τρόπος

Η εξίσωση, $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ παριστάνει κύκλο C αν,

$$(-2)^2 + 4^2 - 4 \cdot 1 > 0 \Leftrightarrow 4^2 > 0$$

που είναι αληθής, με κέντρο $K\left(-\frac{-2}{2}, -\frac{4}{2}\right)$ δηλαδή $K(1, -2)$ και ακτίνα $R = \frac{\sqrt{4^2}}{2} = 2$

Β' τρόπος

Έχουμε,

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 + y^2 + 4y + 4 = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 2^2$$

Δηλαδή η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1, -2)$ και ακτίνα $R = 2$

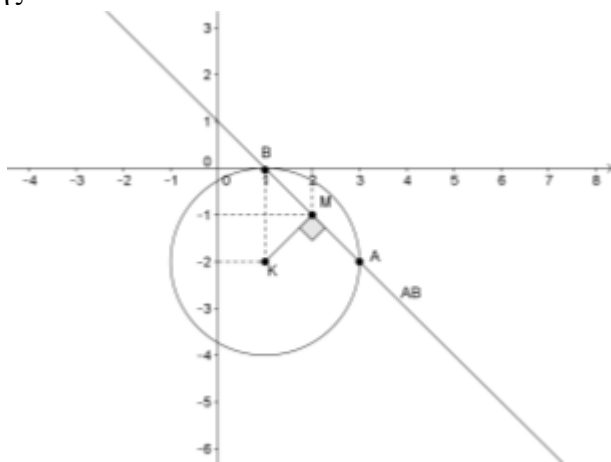
β) Ο κύκλος C εφάπτεται στο άξονα $x'x$ αφού είναι $|y_K| = |-2| = 2 = R$

και το σημείο επαφής είναι για $y = 0$,

$$(x-1)^2 + (0+2)^2 = 2^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

δηλαδή το σημείο $N(1, 0)$

γ) Αν $M(2, -1)$ είναι μέσον της χορδής AB του κύκλου, τότε KM θα είναι το απόστημα της χορδής.



Άρα έχουμε,

$$KM \perp AB \Rightarrow \lambda_{KM} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Rightarrow$$

$$\frac{-2+1}{1-2} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Rightarrow 1 \cdot \lambda_{AB} = -1 \Rightarrow \lambda_{AB} = -1$$

και η AB διέρχεται του M, άρα έχει εξίσωση,

$$AB: y - 2 = -1 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = -x + 1$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (22584)

Δίνονται οι εξισώσεις

$$(x + y - 1)(x + y + 1) = 2xy \quad (1) \text{ και } (\lambda - 1)x + (2\lambda + 3)y + 2\lambda - 5 = 0 \quad (2) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία. Κατόπιν να αποδείξετε ότι οι ευθείες που προκύπτουν από την (2) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

γ) Έστω A και B τα σημεία τομής του κύκλου C με τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy αντίστοιχα. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ , ώστε η ευθεία AB να προκύπτει από την εξίσωση (2).

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η (1) ισοδύναμα,

$$(x + y)^2 - 1^2 = 2xy \Leftrightarrow (x + y)^2 - 2xy = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Άρα παριστάνει κύκλο C με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνας $R=1$ (μοναδιαίος κύκλος)

β) Είναι,

$$\begin{cases} \lambda - 1 = 0 \\ 2\lambda + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Δηλαδή οι συντελεστές των x, y της ευθείας δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα, άρα η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

α' τρόπος

Η (2) ισοδύναμα,

$$\lambda x - x + 2\lambda y + 3y + 2\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda(x + 2y + 2) + (-x + 3y - 5) = 0 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή ως πολυώνυμο του λ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, άρα πρέπει,

$$\begin{cases} x+2y+2=0 \\ -x+3y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow (+) \begin{cases} x=-2y-2 \\ 5y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2\frac{3}{5}-2 \\ y=\frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-16}{5} \\ y=\frac{3}{5} \end{cases}$$

Άρα το σημείο $M\left(\frac{-16}{5}, \frac{3}{5}\right)$ είναι το σημείο που διέρχονται όλες οι ευθείες της (2) αφού την επαληθεύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β' τρόπος

Για $\lambda=1$ η (2): $5y-3=0 \Leftrightarrow y=\frac{3}{5}$

και για $\lambda=\frac{-3}{2}$ η (2): $\frac{-5}{2}x-8=0 \Leftrightarrow x=\frac{-16}{5}$

Άρα το σημείο $M\left(\frac{-16}{5}, \frac{3}{5}\right)$ είναι το σημείο που διέρχονται όλες οι ευθείες της (2)

αφού την επαληθεύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} (\lambda-1)\left(\frac{-16}{5}\right) + (2\lambda+3) \cdot \frac{3}{5} + 2\lambda-5 &= 0 \Leftrightarrow \\ -16\lambda+16+6\lambda+9+10\lambda-25 &= 0 \Leftrightarrow 0=0 \end{aligned}$$

γ) α' τρόπος

Τα σημεία που ο C τέμνει τους άξονες είναι $A(1,0)$ και $B(0,1)$

Αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η AB να προκύπτει από τη (2), πρέπει να επαληθεύεται για το ίδιο λ από τα A και B.

Δηλαδή,

$$\text{για } x=1, y=0 \text{ η (2): } \lambda-1+2\lambda-5=0 \Rightarrow \lambda=2$$

$$\text{και για } x=0, y=1 \text{ η (2): } 2\lambda+3+2\lambda-5=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}$$

Άρα δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η AB να προκύπτει από τη (2).

β' τρόπος

Η AB έχει εξίσωση,

$$y-0=\frac{1-0}{0-1}(x-1) \Rightarrow y=-x+1$$

Έστω ότι η AB ορίζεται από τη (2).

Οι ευθείες που ορίζονται από τη (2) διέρχονται από το σημείο $M\left(\frac{-16}{5}, \frac{3}{5}\right)$

άρα και από την ΑΒ, δηλαδή, $\frac{3}{5} = -\left(\frac{-16}{5}\right) + 1 \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{21}{5}$ που είναι **άτοπο**.

Άρα δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ΑΒ να προκύπτει από τη (2).

ΑΣΚΗΣΗ Δ5 (22586)

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε την εξίσωση

$$x^2 + y^2 - (3\alpha + 2)x + \alpha^2 - 4 = 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση παριστάνει κύκλο. Κατόπιν, να βρείτε για ποιες τιμές του α, ο κύκλος διέρχεται από την αρχή Ο.

(Μονάδες 10)

β) Έστω C ο κύκλος που προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση όταν $\alpha = 2$ και $y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}$ μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο C σε σημείο Α διαφορετικό από το Ο.

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Α συναρτήσει του λ.

(Μονάδες 10)

ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο Μ του τμήματος ΟΑ κινείται σε κύκλο σταθερής ακτίνας ο οποίος διέρχεται από το Ο.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση $x^2 + y^2 - (3\alpha + 2)x + \alpha^2 - 4 = 0$ θα παριστάνει κύκλο αν,

$$(3\alpha + 2)^2 + 0^2 - 4(\alpha^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow 9\alpha^2 + 12\alpha + 4 - 4\alpha^2 + 16 > 0 \Leftrightarrow$$

$$5\alpha^2 + 12\alpha + 20 > 0 \text{ αληθής για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}$$

αφού το τριώνυμο $5\alpha^2 + 12\alpha + 20$ έχει $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 5 \cdot 20 = -256 < 0$

Άρα παριστάνει κύκλο C κέντρου $K\left(\frac{3\alpha + 2}{2}, 0\right)$ και ακτίνας $R = \frac{\sqrt{5\alpha^2 + 12\alpha + 20}}{2}$

Ακόμη ο C θα διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν ($\Gamma=0$)

$$\alpha^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = \pm 2$$

β) i. Για $\alpha = 2$ ο $C: x^2 + y^2 - 8x = 0$ έχει κέντρο $K(4, 0)$ και ακτίνα $R = 4$ και από το α)

ερώτημα διέρχεται από το $O(0, 0)$,

Τα σημεία τομής της ευθείας $\varepsilon: y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}$ και του κύκλου C έχουν συντεταγμένες τις λύσεις του συστήματος,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x = 0 \\ y = \lambda x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (\lambda x)^2 - 8x = 0 \\ y = \lambda x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x[(1 + \lambda^2)x - 8] = 0 \\ y = \lambda x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \text{ ή } x = \frac{8}{1 + \lambda^2} \\ y = \lambda x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = \frac{8}{1 + \lambda^2} \\ y = \frac{8\lambda}{1 + \lambda^2} \end{cases}$$

Επειδή το Α είναι διαφορετικό από το Ο η λύση $(x, y) = (0, 0)$ απορρίπτεται.

$$\text{Άρα } A\left(\frac{8}{1+\lambda^2}, \frac{8\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

ii. Το μέσον Μ του ΟΑ θα έχει συντεταγμένες $\left(\frac{\frac{8}{1+\lambda^2}+0}{2}, \frac{\frac{8\lambda}{1+\lambda^2}+0}{2}\right)$ δηλαδή είναι

$$M\left(\frac{4}{1+\lambda^2}, \frac{4\lambda}{1+\lambda^2}\right) \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

Έστω ,

$$\begin{cases} x = \frac{4}{1+\lambda^2} \neq 0 & (1) \\ y = \frac{4\lambda}{1+\lambda^2} & (2) \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{x} = \lambda$$

τότε η (1) ισοδύναμα,

$$x = \frac{4}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \Rightarrow x + x \frac{y^2}{x^2} = 4 \Rightarrow$$

$$x + \frac{y^2}{x} = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow$$

$$x + \frac{y^2}{x} = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x + y^2 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 2^2$$

Άρα το σημείο Μ ανήκει σε κύκλο κέντρου $\Lambda(2, 0)$ και ακτίνας $\rho = 2$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων αφού για $x = 0, y = 0$ είναι $(0-2)^2 + 0^2 = 2^2 \Leftrightarrow 4 = 4$ αληθής.

ΑΣΚΗΣΗ Δ6 (22587)

Σε καρτεσιανό σύστημα Oxy , θεωρούμε τα σημεία $M(x, y)$, $A(-25, 0)$ και $B(-1, 0)$ για τα οποία ισχύει $|\overline{AM}| = 5|\overline{BM}|$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει στον κύκλο $C_2 : x^2 + y^2 = 25$.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε το σημείο $\Sigma(7, 1)$.

i. Να εξετάσετε αν το σημείο Σ βρίσκεται στο εσωτερικό ή το εξωτερικό του κύκλου C .

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες, από το σημείο Σ προς τον κύκλο, είναι μεταξύ τους κάθετες.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Υπολογίζουμε αρχικά τα μέτρα των δυο διανυσμάτων και έχουμε:

$$|\overline{AM}| = \sqrt{(x+25)^2 + y^2} \quad \text{και} \quad |\overline{BM}| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

αντικαθιστούμε στη δοθείσα σχέση και έχουμε:

$$|\overline{AM}| = 5|\overline{BM}| \Rightarrow \sqrt{(x+25)^2 + y^2} = 5\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$(x+25)^2 + y^2 = 25((x+1)^2 + y^2) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 50x + 625 + y^2 = 25x^2 + 50x + 25 + 25y^2 \Leftrightarrow$$

$$24x^2 + 24y^2 = 600 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$$

β) i. Υπολογίζουμε την απόσταση του σημείου Σ από το κέντρο του κύκλου και τη συγκρίνουμε με την ακτίνα του.

$$|\overline{OS}| = \sqrt{(7-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} > 5$$

επομένως το σημείο Σ βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου.

ii. Έστω (x_1, y_1) σημείο του κύκλου, τότε η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου θα δίνεται από την εξίσωση $x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = 25$, την οποία το σημείο Σ(7,1) την επαληθεύει. Επομένως,

$$x_1 \cdot 7 + y_1 \cdot 1 = 25 \Leftrightarrow \boxed{y_1 = -7x_1 + 25}$$

Το σημείο (x_1, y_1) επαληθεύει την εξίσωση του κύκλου, επομένως θα ισχύει:

$$x_1^2 + y_1^2 = 25 \Leftrightarrow x_1^2 + (-7x_1 + 25)^2 = 25 \Leftrightarrow x_1^2 + 49x_1^2 - 350x_1 + 625 - 25 = 0 \Leftrightarrow$$

$$50x_1^2 - 350x_1 + 600 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 7x_1 + 12 = 0$$

από τη λύση της δευτεροβάθμιας βρίσκουμε :

$$x_1 = 4 \quad \text{ή} \quad x_1 = 3$$

επομένως έχουμε αντίστοιχα:

$$y_1 = -7 \cdot 4 + 25 \Leftrightarrow \boxed{y_1 = -3} \quad \text{ή} \quad y_1 = -7 \cdot 3 + 25 \Leftrightarrow \boxed{y_1 = 4}$$

Επομένως οι δυο εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το σημείο Σ θα είναι οι:

$$\boxed{\varepsilon_1 : 4 \cdot x - 3 \cdot y = 25} \quad \text{και} \quad \boxed{\varepsilon_2 : 3x + 4 \cdot y = 25}$$

από όπου βρίσκουμε ότι οι αντίστοιχοι συντελεστές διεύθυνσης είναι:

$$\lambda_1 = -\frac{4}{-3} \Leftrightarrow \boxed{\lambda_1 = \frac{4}{3}}, \quad \boxed{\lambda_2 = -\frac{3}{4}}$$

από όπου βρίσκουμε ότι:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -1$$

άρα οι δυο εφαπτόμενες είναι μεταξύ τους κάθετες.

ΑΣΚΗΣΗ Δ7 (22589)

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $M(x, y)$, $A(-2, 0)$ και $B(2, 0)$ ώστε να ισχύει $\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 3\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι ο κύκλος

$$C : x^2 + y^2 = 20$$

(Μονάδες 10)

β) Έστω Γ, Δ σημεία του κύκλου C ώστε $\left(\frac{\Gamma\Delta}{4}\right)^2 = 5$

i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ και η αρχή των αξόνων O , είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

ii. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{M\Gamma} \cdot \overrightarrow{M\Delta}$ όταν το M κινείται στον κύκλο.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

(α) Υπολογίζουμε αρχικά τις συντεταγμένες των δυο διανυσμάτων και έχουμε:

$$\overrightarrow{AM} = (x+2, y), \quad \overrightarrow{BM} = (x-2, y)$$

και στη συνέχεια το εσωτερικό γινόμενο των δυο διανυσμάτων

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (x+2)(x-2) + y^2 = x^2 - 4 + y^2$$

Η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 3\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow |\overrightarrow{AM}|^2 + |\overrightarrow{BM}|^2 = 3\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow$$

$$(x+2)^2 + y^2 + (x-2)^2 + y^2 = 3(x^2 - 4 + y^2) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 = 20$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ είναι ο κύκλος με κέντρο το $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 2\sqrt{5}$

β) (i) Ισχύει:

$$\left(\frac{\Gamma\Delta}{4}\right)^2 = 5 \Leftrightarrow \frac{(\Gamma\Delta)^2}{16} = 5 \Leftrightarrow (\Gamma\Delta)^2 = 80 \Leftrightarrow (\Gamma\Delta) = 4\sqrt{5}$$

Παρατηρούμε ότι $(\Gamma\Delta) = 2\rho$ και με δεδομένο το ότι τα Γ, Δ είναι σημεία του κύκλου, έχουμε ότι τα Γ και Δ είναι αντιδιαμετρικά. Επομένως τα σημεία Γ, O, Δ είναι συνευθειακά.

(ii) Έστω $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, $\Delta(x_\Delta, y_\Delta)$ και $M(x, y)$. Από (i) τα Γ και Δ αντιδιαμετρικά, επομένως O μέσο του $\Gamma\Delta$. Έτσι:

$$x_\Gamma + x_\Delta = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_\Delta = -x_\Gamma} \quad \text{και} \quad y_\Gamma + y_\Delta = 0 \Leftrightarrow \boxed{y_\Delta = -y_\Gamma}$$

επομένως $\Delta(-x_\Gamma, -y_\Gamma)$

Είναι:

$$\overrightarrow{M\Gamma} = (x_\Gamma - x, y_\Gamma - y) \text{ και } \overrightarrow{M\Delta} = (-x_\Gamma - x, -y_\Gamma - y)$$

Αφού Γ σημείο του κύκλου ισχύει η σχέση: $x_\Gamma^2 + y_\Gamma^2 = 20$

Είναι:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M\Gamma} \cdot \overrightarrow{M\Delta} &= (x_\Gamma - x) \cdot (-x_\Gamma - x) + (y_\Gamma - y) \cdot (-y_\Gamma - y) \\ &= -(x_\Gamma^2 - x^2) - (y_\Gamma^2 - y^2) = -(x_\Gamma^2 + y_\Gamma^2) + (x^2 + y^2) = -20 + 20 = 0 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ8 (22590)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - (\lambda - 1)x - (\lambda - 7)y + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του λ , με $\lambda \neq 5$, παριστάνει κύκλο. Κατόπιν να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση, όταν $\lambda = 5$.

(Μονάδες 12)

β) Έστω C_1 , C_2 οι κύκλοι που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση όταν $\lambda = 3$ και $\lambda = 9$ αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το σημείο επαφής των κύκλων.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$A = -(\lambda - 1), B = -(\lambda - 7), \Gamma = \lambda$$

άρα

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (\lambda - 1)^2 + (\lambda - 7)^2 - 4\lambda = 2\lambda^2 - 20\lambda + 50 = 2(\lambda^2 - 10\lambda + 25) = 2(\lambda - 5)^2$$

οπότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{5\}$ παριστάνει κύκλο, με κέντρο

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(\frac{\lambda - 1}{2}, \frac{\lambda - 7}{2}\right)$$

και ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{|\lambda - 5| \cdot \sqrt{2}}{2}$$

Για $\lambda = 5$, έχουμε,

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ και } y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ και } y = -1$$

δηλαδή είναι το σημείο (2, -1).

β) Ο κύκλος C_1 για $\lambda = 3$ έχει κέντρο $K_1(1, -2)$ και ακτίνα $\rho_1 = \sqrt{2}$, ενώ ο κύκλος C_2 για $\lambda = 9$ έχει κέντρο $K_2(4, 1)$ και ακτίνα $\rho_2 = 2\sqrt{2}$.

i) Θα δείξουμε ότι: $(K_1K_2) = \rho_1 + \rho_2$

Έχουμε,

$$(K_1K_2) = \sqrt{(4-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \rho_1 + \rho_2$$

ii) Έχουμε,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 2y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0 \\ x^2 - x^2 + y^2 - y^2 - 8x + 2x - 2y - 4y + 9 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0 \\ -6x - 6y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (-x+1)^2 - 2x + 4(-x+1) + 3 = 0 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + 8 = 0 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

άρα το σημείο τομής των δύο κύκλων είναι το $(2, -1)$.

B Θέματα: 3.2 Παραβολή

ΑΣΚΗΣΗ B1 (22511)

Θεωρούμε την παραβολή $C: y^2 = 4x$ και την κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon: x = \frac{p}{2}$, όπου p η παράμετρος της παραβολής C .

α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.

Μονάδες 10

β) Αν η ευθεία ε τέμνει την παραβολή C στα σημεία B και Γ , τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των B και Γ , καθώς και τις εξισώσεις των εφαπτόμενων ε_1 και ε_2 της παραβολής C στα σημεία της αυτά αντίστοιχα.

Μονάδες 10

ii) να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 ανήκει στη διευθετούσα της C .

Μονάδες 5

παρόμοια με 4 Α' ομάδα σελ. 27

ΛΥΣΗ

α) Η παραβολή με τύπο: $y^2 = 2px$ έχει εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα $(\delta): x = -\frac{p}{2}$

Είναι:

$$C: y^2 = 4x \text{ άρα } 2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$$

Οπότε η εστία είναι

$$E\left(\frac{2}{2}, 0\right), \text{ άρα } \boxed{E(1, 0)}$$

Και η διευθετούσα είναι

$$(\delta): x = -\frac{2}{2}, \text{ άρα } \boxed{(\delta): x = -1}$$

β) i) Είναι:

$$\varepsilon: x = \frac{p}{2} \xrightarrow{p=2} x = \frac{2}{2} \Rightarrow x = 1$$

Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{4} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Άρα τα σημεία τομής είναι το $\boxed{B(1, -2)}$ και $\boxed{\Gamma(1, 2)}$

Η εξίσωση της εφαπτόμενης σ' ένα σημείο $A(x_1, y_1)$ δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{y \cdot y_1 = p \cdot (x + x_1)}$$

Άρα, στο $B(1, -2)$, η εξίσωση της εφαπτόμενης είναι:

$$\varepsilon_1: y \cdot (-2) = 2 \cdot (x + 1) \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_1: x + y + 1 = 0}$$

Άρα, στο $\Gamma(1, 2)$, η εξίσωση της εφαπτόμενης είναι:

$$\varepsilon_2: y \cdot 2 = 2 \cdot (x + 1) \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_2: x - y + 1 = 0}$$

ii) Για να βρούμε το σημείο τομής των δύο ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους, δηλαδή

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$$

Για $x = -1$, με αντικατάσταση προκύπτει ότι:

$$x + y = -1 \xrightarrow{x=-1} -1 + y = -1 \Leftrightarrow y = 0$$

Άρα, το σημείο τομής των δύο εφαπτόμενων είναι:

$$\boxed{K(-1, 0)} \text{ που ανήκει στην διευθετούσα } \boxed{(\delta): x = -1}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (22512)

Δίνεται η εξίσωση: $y^4 - 16x^2 = 0$, (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παραβολές $C_1: y^2 = 4x$ και $C_2: y^2 = -4x$ και να βρείτε για κάθε μία από αυτές την εστία και τη διευθετούσα της.

Μονάδες 13

β) Αν E_1 και E_2 είναι οι εστίες των παραβολών C_1 και C_2 αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα E_1E_2 .

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\begin{aligned} y^4 - 16x^2 = 0 &\Leftrightarrow y^4 - (4x)^2 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 4x) \cdot (y^2 + 4x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^2 - 4x = 0 \quad \text{ή} \quad y^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^2 = 4x \quad \text{ή} \quad y^2 = -4x \end{aligned}$$

Άρα, η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παραβολές, τις $C_1: y^2 = 4x$ και $C_2: y^2 = -4x$

Η παραβολή με τύπο: $y^2 = 2px$ έχει εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα $(\delta): x = -\frac{p}{2}$

Είναι: $C_1: y^2 = 4x$ άρα $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$

Οπότε η εστία είναι $E_1\left(\frac{2}{2}, 0\right)$, άρα $\boxed{E_1(1, 0)}$

Και η διευθετούσα είναι $(\delta_1): x = -\frac{2}{2}$, άρα $\boxed{(\delta_1): x = -1}$

Είναι: $C_2: y^2 = -4x$ άρα $2p = -4 \Leftrightarrow p = -2$

Οπότε η εστία είναι $E_2\left(\frac{-2}{2}, 0\right)$, άρα $\boxed{E_2(-1, 0)}$

Και η διευθετούσα είναι $(\delta_2): x = -\frac{-2}{2}$, άρα $\boxed{(\delta_2): x = 1}$

β) Το κέντρο K του κύκλου θα βρίσκεται στο μέσο του E_1E_2 . Έχουμε,

$$x_K = \frac{x_{E_1} + x_{E_2}}{2} \Leftrightarrow x_K = \frac{1 + (-1)}{2} \Leftrightarrow x_K = 0$$

$$y_K = \frac{y_{E_1} + y_{E_2}}{2} \Leftrightarrow y_K = \frac{0 + 0}{2} \Leftrightarrow y_K = 0$$

Άρα, το κέντρο του κύκλου είναι η αρχή των αξόνων $O(0, 0)$

Και θα έχει ακτίνα:

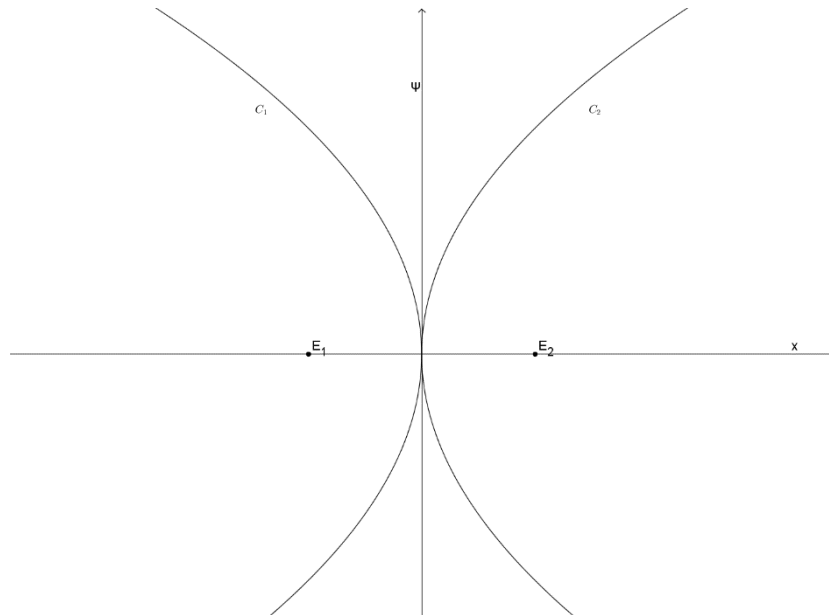
$$\rho = \frac{(E_1 E_2)}{2} \Leftrightarrow \rho = \frac{\sqrt{(1 - (-1))^2 + (0 - 0)^2}}{2} \Leftrightarrow \rho = \frac{\sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow \rho = \frac{2}{2} \Leftrightarrow \rho = 1$$

$$\text{Άρα, } C : x^2 + y^2 = \rho^2 \stackrel{\rho=1}{\Leftrightarrow} \boxed{C : x^2 + y^2 = 1}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (2_22514)

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται οι παραβολές $C_1 : y^2 = -2px$ και $C_2 : y^2 = 2px$ οι οποίες έχουν εστίες τα σημεία E_1 και E_2 αντίστοιχα.

Η απόσταση των σημείων E_1 και E_2 είναι ίση με 4 μονάδες.



α) Να βρείτε την εστία, τη διευθετούσα και την εξίσωση καθεμιάς από τις παραβολές C_1 και C_2 .

Μονάδες 15

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα $E_1 E_2$.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Η παραβολή με τύπο: $C_1 : y^2 = -2px$ έχει εστία $E_1 \left(-\frac{p}{2}, 0 \right)$

Η παραβολή με τύπο: $C_2 : y^2 = 2px$ έχει εστία $E_2 \left(\frac{p}{2}, 0 \right)$

Επειδή η C_2 έχει εστία στο ημιάξονα Ox άρα $p > 0$

$$(E_1E_2) = 4 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{p}{2} - \left(-\frac{p}{2}\right)\right)^2 + (0-0)^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{p^2} = 4 \stackrel{p>0}{\Leftrightarrow} p = 4$$

Οπότε για $p = 4$ είναι:

$$E_1\left(-\frac{4}{2}, 0\right) \text{ άρα } \boxed{E_1(-2, 0)}$$

$$E_2\left(\frac{4}{2}, 0\right) \text{ άρα } \boxed{E_2(2, 0)}$$

Η παραβολή με τύπο: $C_1: y^2 = -2px$ έχει διευθετούσα $(\delta_1): x = -\frac{p}{2} \stackrel{p=4}{\Leftrightarrow} \boxed{(\delta_1): x = 2}$

Η παραβολή με τύπο: $C_2: y^2 = 2px$ έχει διευθετούσα $(\delta_2): x = \frac{p}{2} \stackrel{p=4}{\Leftrightarrow} \boxed{(\delta_2): x = -2}$

Για $p = 4$ είναι: $\boxed{C_1: y^2 = -8x}$ και $\boxed{C_2: y^2 = 8x}$

β) Το κέντρο K του κύκλου θα βρίσκεται στο μέσο του E_1E_2 . Έχουμε,

$$x_K = \frac{x_{E_1} + x_{E_2}}{2} \Leftrightarrow x_K = \frac{(-2) + 2}{2} \Leftrightarrow x_K = 0$$

$$y_K = \frac{y_{E_1} + y_{E_2}}{2} \Leftrightarrow y_K = \frac{0 + 0}{2} \Leftrightarrow y_K = 0$$

Άρα, το κέντρο του κύκλου είναι η αρχή των αξόνων $O(0, 0)$

Και θα έχει ακτίνα:

$$\rho = \frac{(E_1E_2)}{2} \Leftrightarrow \rho = \frac{4}{2} \Leftrightarrow \rho = 2$$

Άρα,

$$C: x^2 + y^2 = \rho^2 \stackrel{\rho=2}{\Leftrightarrow} \boxed{C: x^2 + y^2 = 4}$$

Δ Θέματα: 3.2 Παραβολή

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (22559)

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο C_1 ο οποίος έχει το κέντρο του στην ευθεία

$\varepsilon: x - y - 1 = 0$ Έστω επίσης $A(5, 3)$ και $B(1, 5)$ δύο σημεία του κύκλου C_1

α) Να αποδείξετε ότι $C_1: (x - 1)^2 + y^2 = 25$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C_2 που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και εστία το κέντρο του κύκλου C_1

(Μονάδες 7)

γ) Αν M_1 και M_2 είναι τα σημεία τομής των C_1 και C_2 , τότε:

i) να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της παραβολής C_2 στα σημεία αυτά.

(Μονάδες 5)

ii) να αποδείξετε ότι οι ε_1 και ε_2 τέμνονται σε σημείο που ανήκει στον κύκλο C_1

(Μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

α) Έστω $K(x_1, y_1) \in \varepsilon$, οπότε θα ισχύει: $x_1 - y_1 - 1 = 0$ (1).

Επίσης ισχύει:

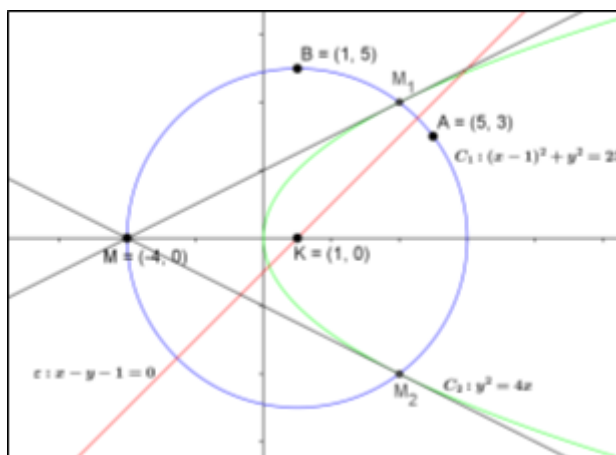
$$(KA) = (KB) \Rightarrow \sqrt{(x_1 - 5)^2 + (y_1 - 3)^2} = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (y_1 - 5)^2} \Rightarrow 2x_1 - y_1 - 2 = 0 \quad (2).$$

$$(1), (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - y_1 - 1 = 0 \\ 2x_1 - y_1 - 2 = 0 \end{cases} \stackrel{(-)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

Άρα το $K(1, 0)$ αποτελεί κέντρο του κύκλου, ενώ ακτίνα αυτού είναι:

$$\rho = (KA) = \sqrt{(1 - 5)^2 + (0 - 3)^2} = 5$$

Οπότε ο ζητούμενος κύκλος είναι $C_1: (x - 1)^2 + y^2 = 25$.



β) Επειδή η εστία της παραβολής συμπίπτει με το κέντρο του κύκλου, δηλαδή $E(1, 0)$ και η κορυφή της είναι στην αρχή των αξόνων, τότε θα έχει εξίσωση της μορφής: $y^2 = 2px$ με $p = 2$.

Η ομάδα του lisari (Έκδοση: 01 - 03 - 15)

Άρα η παραβολή θα έχει εξίσωση: $C_2: y^2 = 4x$.

γ) Εφόσον τα M_1 και M_2 αποτελούν τα κοινά σημεία των C_1 και C_2 αντίστοιχα, τότε:

$$\left. \begin{array}{l} (x-1)^2 + y^2 = 25 \\ y^2 = 4x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (x-1)^2 + 4x = 25 \\ y^2 = 4x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + 2x - 24 = 0 \\ y^2 = 4x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x_{1,2} = \begin{cases} 4 \\ -6 \text{ απορ.} \end{cases} \\ y^2 = 4x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = 4 \\ y = \pm 4 \end{array} \right\}$$

Άρα θα έχουμε $M_1(4, 4)$ και $M_2(4, -4)$.

i) Η εφαπτομένη ε_1 της $C_2: y^2 = 4x$ στο $M_1(4, 4)$ έχει εξίσωση:

$$yy_1 = 4(x + x_1) \xrightarrow{x_1=4, y_1=4} 4y = 4(x + 4) \Rightarrow x - y + 4 = 0.$$

Όμοια η εφαπτομένη ε_2 της $C_2: y^2 = 4x$ στο $M_2(4, -4)$ έχει εξίσωση:

$$yy_1 = 4(x + x_1) \xrightarrow{x_1=4, y_1=-4} -4y = 4(x + 4) \Rightarrow x + y + 4 = 0.$$

ii) Οι ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο M του οποίου οι συντεταγμένες είναι:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 4 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = -4 \\ y = 0 \end{array} \right\}$$

Άρα το σημείο τομής των παραπάνω ευθειών είναι το $M(-4, 0)$. Εξετάζουμε αν το σημείο αυτό ανήκει στον $C_1: (x-1)^2 + y^2 = 25$ αντικαθιστώντας τις τιμές των συντεταγμένων x και y . Οπότε θα έχουμε: $(-4-1)^2 + 0^2 = 25 \Leftrightarrow 25 = 25$. Άρα το σημείο τομής των εφαπτομένων είναι σημείο του παραπάνω κύκλου.

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (22560)

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο C που διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$, $B(-2,4)$ και $\Gamma(0,6)$.

α) Να αποδείξετε ότι $C: x^2 + (y-4)^2 = 4$.

(Μονάδες 10)

β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του κύκλου C .

(Μονάδες 9)

γ) Αν M_1 και M_2 είναι τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες του ερωτήματος β), να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα σημεία M_1 και M_2

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Έστω $K(x_K, y_K)$ το κέντρο του κύκλου C . Τότε θα ισχύει:

[Η ομάδα του lisari](#) (Έκδοση: 01 - 03 - 15)

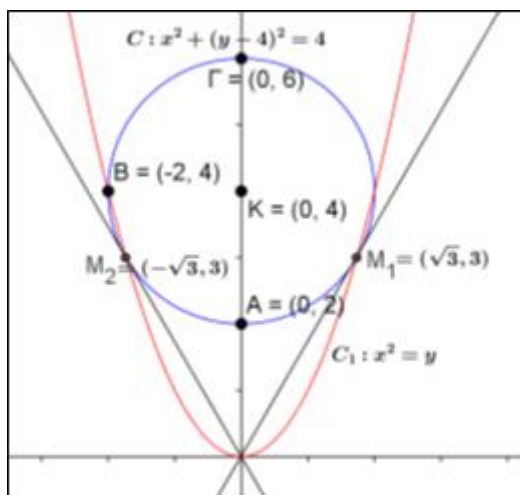
$$(KA) = (KB) = (K\Gamma) \Leftrightarrow \sqrt{x_K^2 + (y_K - 2)^2} = \sqrt{(x_K + 2)^2 + (y_K - 4)^2} = \sqrt{x_K^2 + (y_K - 6)^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_K^2 + (y_K - 2)^2 = x_K^2 + (y_K - 6)^2 \\ x_K^2 + (y_K - 2)^2 = (x_K + 2)^2 + (y_K - 4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_K - 2 = \pm (y_K - 6) \\ 4y_K - 4x_K = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_K = 4 \\ x_K = 0 \end{cases}$$

Άρα το κέντρο του κύκλου είναι το $K(0,4)$ και η ακτίνα του είναι:

$$\rho = (KA) = \sqrt{0^2 + (4-2)^2} = 2$$

Οπότε ο κύκλος θα έχει εξίσωση: $C: x^2 + (y-4)^2 = 4$



β) Εφόσον οι εφαπτόμενες του κύκλου που αναζητούμε είναι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων, τότε θα πρέπει να είναι της μορφής $y = \lambda x$ (η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x=0$ δεν είναι εφαπτόμενη του κύκλου γιατί διέρχεται από το κέντρο του).

Επίσης αυτές οι ευθείες θα έχουν ένα κοινό σημείο με τον κύκλο C , οπότε:

$$\begin{cases} y = \lambda x \\ x^2 + (y-4)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + (\lambda x - 4)^2 = 4 \Leftrightarrow (1 + \lambda^2)x^2 - 8\lambda x + 12 = 0$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (-8\lambda)^2 - 4(1 + \lambda^2) \cdot 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt{3}$$

Άρα

$$4x^2 \pm 8\sqrt{3}x + 12 = 0 \quad \text{με} \quad \Delta = (\pm 8\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 4 \cdot 12 = 0$$

Οπότε

$$x_{1,2} = \frac{\pm 8\sqrt{3}}{8} = \pm \sqrt{3} \quad \text{και} \quad (\pm \sqrt{3})^2 + (y-4)^2 = 4 \Leftrightarrow (y-4)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y - 4 = \pm 1 \Leftrightarrow y = \begin{cases} 5 \text{ απορ. διότι στο } (\sqrt{3}, 5) \text{ η εφ / νη δεν διέρχεται από το } (0,0) \\ 3 \end{cases}$$

Άρα

$$M_1(\sqrt{3}, 3) \quad \text{και} \quad M_2(-\sqrt{3}, 3)$$

Άρα οι εφαπτόμενες του C που διέρχονται από την αρχή των αξόνων είναι:

$$\varepsilon_1: y = \sqrt{3}x \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: y = -\sqrt{3}x.$$

γ) Εφόσον τα M_1 και M_2 είναι συμμετρικά ως προς τον $y'y$ και αποτελούν σημεία της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, τότε η εξίσωσή της θα είναι της μορφής: $C_1: x^2 = 2py$

όμως

$$M_1 \in C_1, \text{ τότε } (\sqrt{3})^2 = 2p \cdot 3 \Rightarrow p = \frac{1}{2}.$$

Οπότε

$$C_1: x^2 = y$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (23321)

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -2)$, $B(0, -4)$, την παραβολή $y^2 = 4x$ και έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της παραβολής.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(MAB) = \frac{1}{4}(y^2 + 4y + 16)$

ii. $(MAB) \geq 3$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του M ώστε το εμβαδόν (MAB) του τριγώνου MAB να γίνεται ελάχιστο.

(Μονάδες 5)

γ) Έστω ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν $M(1, -2)$. Να εξετάσετε αν η εφαπτομένη της παραβολής στο M είναι παράλληλη στην πλευρά AB του τριγώνου MAB.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) i. Αν $M(x, y)$ σημείο της παραβολής $C: y^2 = 4x \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} = x$ τότε

$$M\left(\frac{y^2}{4}, y\right), y \in \mathbb{R}$$

Ακόμη, $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{y^2}{4} + 2, y + 2\right)$ και $\overrightarrow{AB} = (2, -2)$ οπότε,

$$(MAB) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \frac{y^2}{4} + 2 & y + 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right\|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left| -2 \left(\frac{y^2}{4} + 2 \right) - 2(y+2) \right| = \frac{1}{2} \left| -2 \left| \frac{y^2}{4} + 2 + y + 2 \right| \right| \\
&= \left| \frac{1}{4} (y^2 + 4y + 16) \right| = \frac{1}{4} (y^2 + 4y + 16)
\end{aligned}$$

Αφού,

$$y^2 + 4y + 16 = y^2 + 4y + 4 + 12 = (y+2)^2 + 12 > 0 \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R}$$

ii. α' τρόπος

Από το α) i ερώτημα,

$$(MAB) = \frac{1}{4} [(y+2)^2 + 12] = \frac{(y+2)^2}{4} + 3 \geq 3, \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R}$$

και το = ισχύει μόνο για $y = -2$

β' τρόπος

Το τριώνυμο, $f(y) = y^2 + 4y + 16$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $y_0 = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2$

$$\text{το } f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 16 = 12$$

Άρα για κάθε $y \in \mathbb{R}$ είναι

$$(MAB) = \frac{1}{4} (y^2 + 4y + 16) = \frac{1}{4} f(y) \geq \frac{1}{4} f(-2) = \frac{1}{4} 12 = 3$$

(Η κορυφή της παραβολής $\alpha y^2 + \beta y + \gamma$ είναι στο σημείο $y_0 = \frac{-\beta}{2 \cdot \alpha}$)

β) α' τρόπος

Το ελάχιστο εμβαδόν του τριγώνου MAB είναι 3, άρα

$$(MAB) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{4} (y^2 + 4y + 16) = 3 \Leftrightarrow$$

$$y^2 + 4y + 16 = 12 \Leftrightarrow y^2 + 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$$

Άρα για $y = -2$ είναι $M(1, -2)$

β' τρόπος

Το (MAB) γίνεται ελάχιστο όταν το τριώνυμο $f(y) = y^2 + 4y + 16$ γίνεται ελάχιστο, που γίνεται για $y = -2$. Οπότε $M(1, -2)$

γ) Η εφαπτομένη της παραβολής $C: y^2 = 4x$, με σταθερά $p = 2$, στο σημείο της

$M(1, -2)$ έχει εξίσωση,

$$\varepsilon: y(-2) = 2(x+1) \Rightarrow y = -x - 1$$

και η AB έχει εξίσωση,

$$AB: y - (-2) = \frac{-4 - (-2)}{0 - (-2)} (x - (-2)) \Rightarrow y = -x - 4$$

και είναι $\lambda_\varepsilon = -1 = \lambda_{AB}$ άρα $\varepsilon // AB$

Β Θέματα: Έλλειψη (3.3)

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (22509)

Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: x^2 + 4y^2 = 20$ και $C_2: 4x^2 + y^2 = 20$

α) Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις C_1 και C_2 έχουν την ίδια εκκεντρότητα.

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ελλείψεων C_1 και C_2 ανήκουν στον κύκλο $C: x^2 + y^2 = 8$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$C_1: x^2 + 4y^2 = 20 \Leftrightarrow \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1 \text{ με εκκεντρότητα } \varepsilon_1 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Και

$$C_2: 4x^2 + y^2 = 20 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{20} = 1 \text{ με εκκεντρότητα } \varepsilon_2 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Άρα οι ελλείψεις C_1 και C_2 έχουν την ίδια εκκεντρότητα.

β) Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των δύο ελλείψεων:

$$\begin{cases} C_1: x^2 + 4y^2 = 20 \\ C_2: 4x^2 + y^2 = 20 \end{cases} \cdot (-4) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 - 16y^2 = -80 \\ 4x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

Επομένως

$$-15y^2 = -60 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$$

Για $y_1 = 2$ έχουμε

$$x_1^2 + 4 \cdot 2^2 = 20 \Leftrightarrow x_1^2 + 16 = 20 \Leftrightarrow x_1^2 = 4 \Leftrightarrow x_1 = \pm 2$$

Για $y_2 = -2$ έχουμε

$$x_2^2 + 4 \cdot (-2)^2 = 20 \Leftrightarrow x_2^2 + 16 = 20 \Leftrightarrow x_2^2 = 4 \Leftrightarrow x_2 = \pm 2$$

Άρα τα σημεία τομής των ελλείψεων C_1 και C_2 είναι

$$K(2, 2), \Lambda(-2, 2), M(2, -2), N(-2, -2)$$

τα οποία επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 8$.

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (22510)

Δίνονται ο κύκλος $C_1: x^2 + y^2 = 20$, η έλλειψη $C_2: \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ και η κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon: x = 4$

[Η ομάδα του lisari](#) (Έκδοση: 01 - 03 - 15)

Αν Γ και Δ είναι τα σημεία του πρώτου τεταρτημορίου στα οποία η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2 αντίστοιχα, τότε:

α) να βρείτε τις συντεταγμένες των Γ και Δ .

Μονάδες 11

β) να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C_1 στο σημείο Γ και της έλλειψης C_2 στο σημείο της Δ , καθώς και το σημείο τομής των εφαπτομένων αυτών.

Μονάδες 14

ΛΥΣΗ

α) Για να βρούμε τις συντεταγμένες του Γ λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} \begin{cases} C_1 : x^2 + y^2 = 20 \\ \varepsilon : x = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4^2 + y^2 = 20 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 + y^2 = 20 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 20 - 16 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{4} \\ x = 4 \end{cases} \stackrel{y>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = 2 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\Gamma(4, 2)} \end{aligned}$$

Για να βρούμε τις συντεταγμένες του Δ λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} \begin{cases} C_2 : \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1 \\ \varepsilon : x = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{20} \cdot \frac{4^2}{\cancel{20}} + \frac{y^2}{5} = 20 \cdot 1 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 + 4y^2 = 20 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 = 20 - 16 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 = 4 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{1} \\ x = 4 \end{cases} \stackrel{y>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = 1 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\Delta(4, 1)} \end{aligned}$$

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων

$C : x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο $A(x_1, y_1)$ δίνεται από τον τύπο:

$$\varepsilon : x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$$

Άρα, η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου C_1 στο σημείο Γ είναι:

$$\varepsilon_1 : x \cdot 4 + y \cdot 2 = 20 \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_1 : 2x + y = 10}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $C : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο $A(x_1, y_1)$

δίνεται από τον τύπο:

$$\varepsilon : \frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} + \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$$

Άρα, η εξίσωση εφαπτομένης της έλλειψης C_2 στο σημείο Δ είναι:

$$\varepsilon_2 : \frac{x \cdot 4}{20} + \frac{y \cdot 1}{5} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_2 : x + y = 5}$$

Για να βρούμε το σημείο τομής των δύο ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους, δηλαδή

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 10 \\ -x - y = -5 \end{cases}$$

$$x = 5$$

Για $x = 5$, με αντικατάσταση προκύπτει ότι:

$$x + y = 5 \xrightarrow{x=5} 5 + y = 5 \Leftrightarrow y = 0$$

Άρα, το σημείο τομής των δύο εφαπτόμενων είναι:

$$\boxed{K(5,0)}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (22516)

Θεωρούμε την έλλειψη με εστίες τα σημεία $E'(-\sqrt{5}, 0)$, $E(\sqrt{5}, 0)$ και μεγάλο άξονα μήκους 6 μονάδων

α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης.

(Μονάδες 10)

β) Αν M είναι σημείο της έλλειψης για το οποίο ισχύει $ME' = 2 \cdot ME$, τότε :

i) να βρείτε τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων ME' και ME

(Μονάδες 9)

ii) να αποδείξετε ότι η γωνία $E'ME$ είναι ορθή

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$c = \sqrt{5} \text{ και } 2a = 6 \Leftrightarrow a = 3.$$

Επίσης

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3^2 - \sqrt{5}^2} = \sqrt{9 - 5} = \sqrt{4} = 2$$

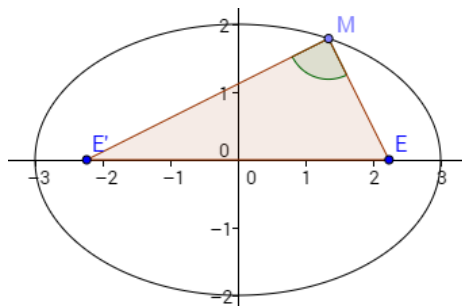
Οι εστίες βρίσκονται στον άξονα $x'x$ άρα η έλλειψη θα έχει τη μορφή

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \text{ ή } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

β) Ξέρουμε ότι ένα σημείο M του επιπέδου είναι σημείο έλλειψης αν και μόνο αν

$$ME' + ME = 2a.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $ME' = 2ME$ οπότε



$$ME' + ME = 2a \Leftrightarrow 2ME + ME = 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 3ME = 6 \Leftrightarrow ME = 2.$$

Επίσης

$$ME' = 2 \cdot 2 = 4.$$

Άρα

$$ME = 2 \text{ και } ME' = 4$$

γ) Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$(EE')^2 = (2\sqrt{5})^2 = 4 \cdot 5 = 20 \text{ και } (ME)^2 + (ME')^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20 .$$

Άρα το τρίγωνο $E'ME$ είναι ορθογώνιο και η γωνία $E'ME$ είναι ορθή

Δ Θέματα: Έλλειψη (3.3)

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (22592)

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει η ισότητα $\overline{AM} \cdot \overline{BM} + \frac{16}{9}(\overline{OA} \cdot \overline{OB}) = 0$, όπου $A(-3, 0)$ και $B(3, 0)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία M ανήκουν στον κύκλο $C_1 : x^2 + y^2 = 25$ (Μονάδες 11)

β) Αν Γ και Δ είναι τα σημεία τομής του κύκλου C_1 με τον άξονα $x'x$, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C_2 η οποία έχει μεγάλο άξονα το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ και εστίες τα σημεία A και B . (Μονάδες 10)

ii) να παραστήσετε γραφικά τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2 . (Μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$\overline{AM} = (x+3, y), \overline{BM} = (x-3, y), \overline{OA} = (-3, 0), \overline{OB} = (3, 0)$$

άρα η δεδομένη σχέση γίνεται,

$$\begin{aligned} \overline{AM} \cdot \overline{BM} + \frac{16}{9}(\overline{OA} \cdot \overline{OB}) &= 0 \Rightarrow (x+3, y) \cdot (x-3, y) + \frac{16}{9} \cdot (-3, 0) \cdot (3, 0) = 0 \\ &\Rightarrow (x+3)(x-3) + y \cdot y + \frac{16}{9}(-3 \cdot 3 + 0 \cdot 0) = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - 9 + y^2 - 16 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 = 25 \end{aligned}$$

β) Για $y = 0$ έχουμε $x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$, άρα τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ είναι $\Gamma(5, 0)$ και $\Delta(-5, 0)$.

i) Έχουμε,

$$\Gamma\Delta = 2\alpha \Rightarrow 2\alpha = 10 \Rightarrow \alpha = 5$$

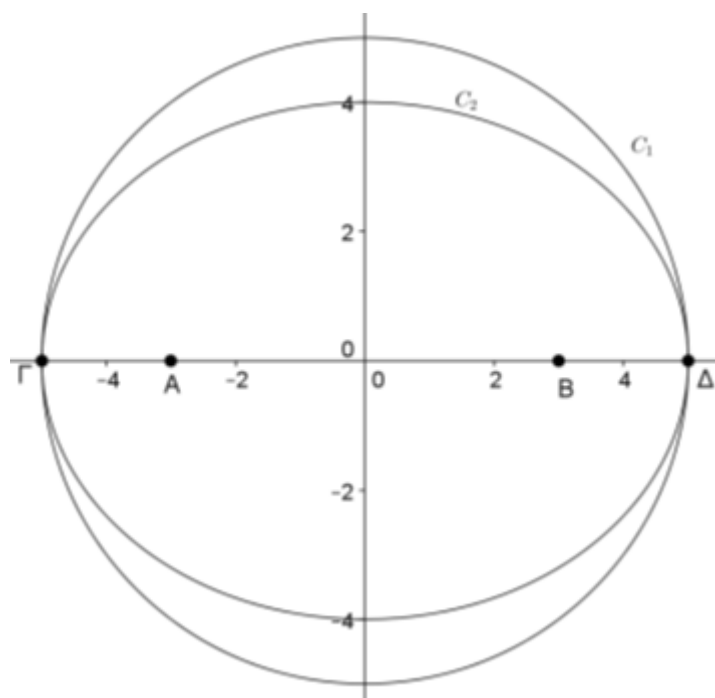
Όμως,

$$\gamma = 3 \Rightarrow \gamma^2 = 9 \Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 9 \Rightarrow \beta^2 = 25 - 9 \Rightarrow \beta^2 = 16 \Rightarrow \beta = 4$$

άρα η εξίσωση της έλλειψης είναι,

$$C_2 : \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

ii) Η γραφική παράσταση του κύκλου C_1 και της έλλειψης C_2 φαίνεται παρακάτω,



B Θέματα: Υπερβολή (3.4)

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (22515)

Μία έλλειψη C_1 έχει εκκεντρότητα ίση με $\frac{4}{5}$ και τις ίδιες εστίες με την υπερβολή

$$C_2 : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $C_2 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Μονάδες 15

β) Να παραστήσετε γραφικά την έλλειψη C_1 και την υπερβολή C_2 σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy .

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Η υπερβολή

$$C : \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$$

έχει εστίες

$$E'(-\gamma, 0), \quad E(\gamma, 0)$$

Άρα

$$C_2 : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

έχει

$$\sqrt{12} = \sqrt{\gamma^2 - 4} \Leftrightarrow 12 = \gamma^2 - 4 \Leftrightarrow \gamma^2 = 16 \Leftrightarrow \gamma = 4$$

με εστίες

$$E'(-4, 0), \quad E(4, 0)$$

Η εκκεντρότητα της έλλειψης δίνεται από τον τύπο: $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$

άρα

$$\frac{4}{5} = \frac{4}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = 5$$

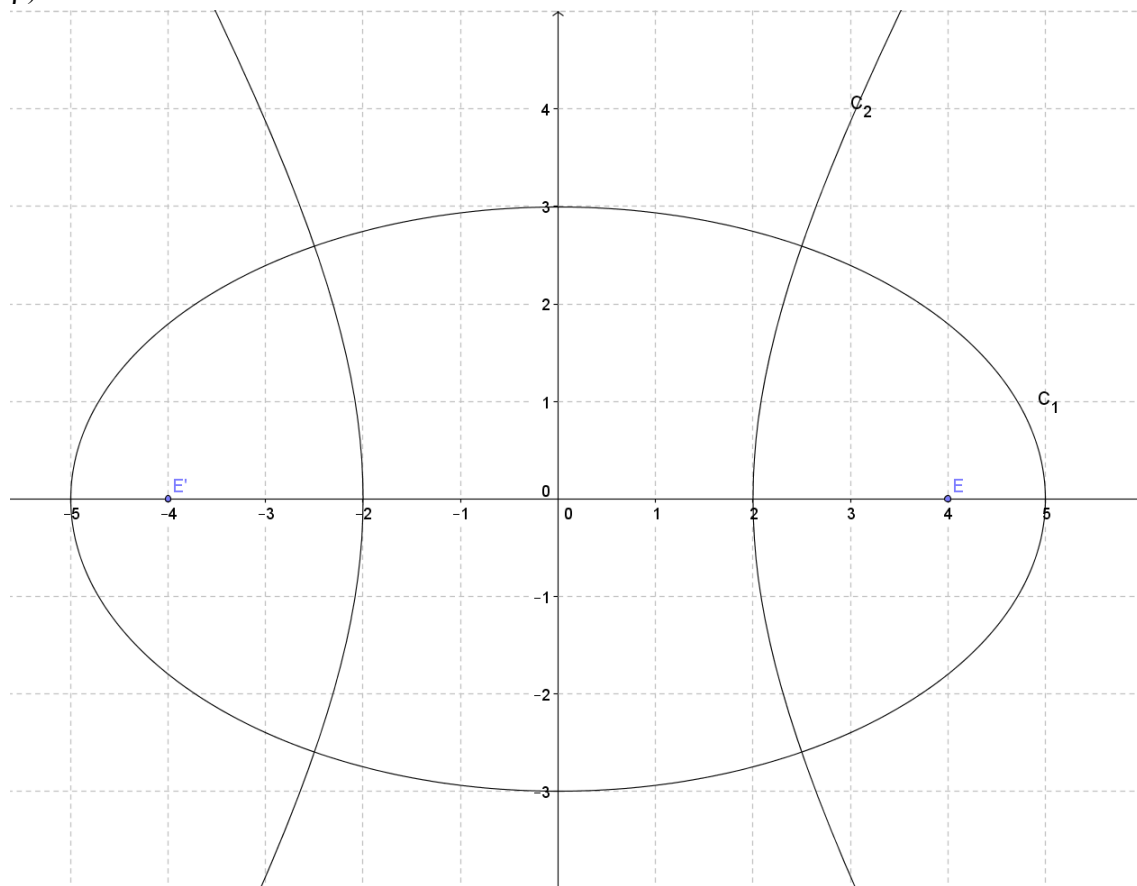
επομένως,

$$\beta = \sqrt{5^2 - 4^2} \Leftrightarrow \beta = \sqrt{25 - 16} \Leftrightarrow \beta = \sqrt{9} \Leftrightarrow \beta = 3,$$

πότε

$$C_2 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{C_2 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1}$$

β)



Δ Θέματα: Υπερβολή (3.4)

ΑΣΚΗΣΗ Δ1(22591)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της υπερβολής που τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία

$A'(-2,0)$, $A(2,0)$ και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(2\sqrt{5}, 2)$ είναι η $C_1: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_2 με διάμετρο το τμήμα $A'A$.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι οι μοναδικές κοινές εφαπτόμενες της υπερβολής C_1 και του κύκλου C_2 είναι οι ευθείες $\varepsilon_1: x = -2$ και $\varepsilon_2: x = 2$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση της υπερβολής που έχει κορυφές $A'(-2,0)$, $A(2,0)$ στον άξονα $x'x$ πρέπει:

$$\alpha = 2$$

άρα

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

Όμως το σημείο $\Gamma(2\sqrt{5}, 2)$ ανήκει στην υπερβολή, άρα

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{(2\sqrt{5})^2}{2^2} - \frac{2^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{20}{4} - \frac{4}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \beta^2 = 1 \Rightarrow \beta = 1, \beta > 0$$

Οπότε,

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$$

β) Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $O\left(\frac{2-2}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (0,0)$ και ακτίνα

$$\rho = \frac{(A'A)}{2} = (OA) = 2,$$

άρα η εξίσωση του κύκλου είναι

$$C_2: x^2 + y^2 = 2^2$$

γ) Έστω $(x_1, y_1) \in C_1$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης με την υπερβολή C_1 . Η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{xx_1}{4} - yy_1 = 1 \Rightarrow x_1x - 4y_1y - 4 = 0 \quad (\varepsilon)$$

Για να εφάπτεται η ευθεία (ε) στον κύκλο C_2 πρέπει:

$$d(O, \varepsilon) = \rho \Rightarrow \frac{|0x_1 - 4y_1 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{x_1^2 + (4y_1)^2}} = 2$$

$$\Rightarrow 4 = 2\sqrt{x_1^2 + (4y_1)^2}$$

$$\Rightarrow 2 = \sqrt{x_1^2 + (4y_1)^2}$$

$$\Rightarrow 4 = x_1^2 + 16y_1^2 \quad (1)$$

Όμως το $(x_1, y_1) \in C_1$ άρα,

$$\frac{x_1^2}{4} - y_1^2 = 1 \Rightarrow x_1^2 - 4y_1^2 = 4 \Rightarrow x_1^2 = 4y_1^2 + 4 \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε,

$$4 = 4y_1^2 + 4 + 16y_1^2 \Rightarrow 20y_1^2 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$$

οπότε

$$4 = x_1^2 + 16 \cdot 0^2 \Rightarrow x_1^2 = 4 \Rightarrow x_1 = \pm 2$$

Επομένως οι μοναδικές κοινές εφαπτομένες της υπερβολής C_1 και του κύκλου C_2 , στα

σημεία επαφής $(2, 0)$ και $(-2, 0)$ αντίστοιχα, είναι οι

$$x \cdot 2 - 4y \cdot 0 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad (\varepsilon_1)$$

και

$$(-2) \cdot x - 4 \cdot 0 \cdot y - 4 = 0 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow x = -2 \quad (\varepsilon_2)$$

