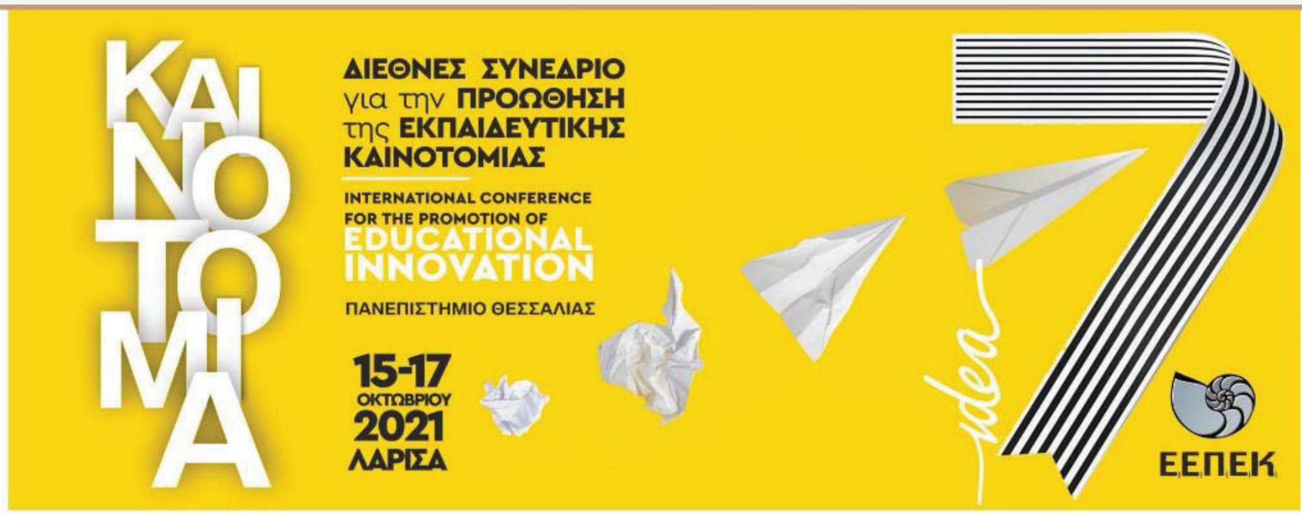
ISSN: 2529-1580

2022

7ο Διεθνές Συνέδριο για την Προώθηση της Εκπαιδευτικής Καινοτομίας



Πρακτικά Συνεδρίου

Τομος Α

Πλήρη Άρθρα

SET: 978-618-5562-05-2

ISBN: 978-618-5562-06-9

ΛΑΡΙΣΑ

Μαθηματικά λάθη: ευκαιρίες για μάθηση

Τζικούδη – Παπαγεωργίου Χρυσάνθη
Εκπαιδ. ΠΕ86 & ΠΕ03, MSc Πληροφοριακά Συστήματα, Διευθ. 1ου Γυμν. Πεύκων Θεσ/νίκης,
chrissap@sch.gr

Περίληψη

Τα λάθη εκλαμβάνονται συχνά από τους μαθητές ως προσωπική αποτυχία και όχι ως ευκαιρίες μάθησης. Πολλές φορές είναι συνέπεια των παρανοήσεών τους και μπορεί να οφείλονται στην αποτυχία δημιουργίας συνδέσεων με όσα ήδη γνωρίζουν. Έχουν αναπτυχθεί διάφορες αντικρουόμενες θεωρίες μάθησης. Κατά τον συμπεριφορισμό, το λάθος είναι κατακριτέο και πρέπει να διορθώνεται αμέσως, ενώ κατά τον κονστρουκτιβισμό το λάθος δεν είναι κατακριτέο, αλλά αποτελεί ευκαιρία για μάθηση. Μέχρι σήμερα έχουν πραγματοποιηθεί πολλές μελέτες σχετικά με την αξιοποίηση του λάθους στη διδακτική πρακτική. Είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να κατανοήσει τις αιτίες και να αναζητήσει τρόπους αξιοποίησης και αντιμετώπισης των λαθών, ώστε να αποτρέψει τους μαθητές του από το να τα επαναλάβουν στο μέλλον. Στόχοι της εργασίας είναι η παρουσίαση των βασικών κατηγοριών μαθηματικών λαθών, η αναζήτηση αιτιών, η παρουσίαση ενδεικτικών παραδειγμάτων λαθών που κάνουν οι μαθητές και η πρόταση μεθόδων για τη διαχείριση των λαθών στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Λέξεις-κλειδιά: μαθηματικά λάθη, αιτίες λαθών, διαχείριση λαθών, ανατροφοδότηση

Εισαγωγή

Τα μαθηματικά λάθη προβληματίζουν διαχρονικά την εκπαιδευτική κοινότητα. Από τις αρχές του προηγούμενου αιώνα, έρευνα στην Αμερική (1909) κατέδειξε λάθη της μορφής $(x+ \alpha)^2 = x^2 + \alpha^2$, $(x^2)^3 = x^5$ κ.ά. τα οποία γίνονται μέχρι και σήμερα (Μητρογιαννοπούλου, 2007).

Παρόλο που αναπτύχθηκαν πολλές θεωρίες μάθησης και πραγματοποιήθηκαν σημαντικές πρόοδοι στην επιστήμη της διδακτικής των Μαθηματικών και αναπροσαρμογές των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών, οι μαθητές εξακολουθούν να κάνουν πολλά λάθη στα Μαθηματικά. Σύμφωνα με τις θεωρίες μάθησης, άλλοτε το λάθος αντιμετωπίζεται ως κάτι αρνητικό και άλλοτε ως ευκαιρία για μάθηση.

Σύμφωνα με τη θεωρία του συμπεριφορισμού, η οποία κυριάρχησε στο μεγαλύτερο μέρος του 20ου αιώνα στα εκπαιδευτικά συστήματα των αναπτυγμένων χωρών, το λάθος αποτελούσε ένδειξη μιας ατελούς εργασίας του μαθητή, ο οποίος δεν είχε ακόμη συσσωρεύσει μια επαρκή ποσότητα γνώσης, ώστε να το αποφύγει (Σφυρόερα, 2007). Έπρεπε να διορθωθεί άμεσα και να εξαλειφθεί με την άσκηση, την επανάληψη και την ενίσχυση μέσα από τη σωστή απάντηση, ώστε να μην επανεμφανιστεί (Ράπτη, 2002). Έτσι, το λάθος, στην παραδοσιακή παιδαγωγική, ήταν μια δυσλειτουργία της γνώσης του μαθητή, που η διδακτική πρακτική έπρεπε να έχει ως στόχο να αποτρέψει (Henry, 1999).

Αντίθετα, σύμφωνα με τη θεωρία του κονστρουκτιβισμού, το λάθος, όχι μόνο δεν θεωρείται κατακριτέο, αλλά αποτελεί ευκαιρία για μάθηση και αποκαλύπτει προηγούμενες λανθασμένες αντιλήψεις των μαθητών. Έτσι, στη σύγχρονη παιδαγωγική το λάθος πρέπει να χρησιμοποιείται ως ενδιάμεση γνώση που θα αποτελέσει την πύλη για τη δημιουργία της νέας γνώσης. Εάν αφήσουμε τους μαθητές να αντιμετωπίσουν μια κατάσταση, στην οποία το γνωστικό τους επίπεδο θα τους οδηγήσει σε λάθη, τότε θα συναντήσουν εμπόδια, που θα ξεπεραστούν μόνο με την επανατοποθέτηση μιας νέας γνώσης στη θέση της παλιάς (Belanger, 1991). Κύριοι εκφραστές της θεωρίας του κονστρουκτιβισμού είναι ο Piaget και ο Vygotsky. Σύμφωνα με τον Piaget, η γνώση δημιουργείται από τη σχέση και την αλληλεπίδραση με το περιβάλλον, μέσα από τις διαδικασίες της προσαρμογής και της αφομοίωσης (Mayer, 2005).

Η πρώτη ενασχόληση της συγγραφέα της παρούσας εργασίας με τη διερεύνηση του θέματος των μαθηματικών λαθών, ήταν κατά το ακαδημαϊκό έτος 2017-2018, όταν ως σπουδάστρια του προγράμματος Ε.Π.ΠΑΙ.Κ. της Α.Σ.ΠΑΙ.Τ.Ε. Θεσσαλονίκης, εκπόνησε την πτυχιακή της εργασία με θέμα «Το Λάθος στη Διδασκαλία και Μάθηση: η περίπτωση των Μαθηματικών» με επιβλέποντα καθηγητή τον Δρ. Α. Οικονόμου. Η πτυχιακή εργασία της αλλά και το προσωπικό ερευνητικό της ενδιαφέρον, αποτέλεσε το έναυσμα ώστε να ασχοληθεί περαιτέρω με το θέμα.

Στην παρούσα εργασία, κατόπιν αναζήτησης στην ελληνική και ξένη βιβλιογραφία, γίνεται μία προσπάθεια κατηγοριοποίησης των λαθών, αναζητούνται τα αίτια που τα προκαλούν, παρουσιάζονται ενδεικτικά παραδείγματα λαθών που κάνουν οι μαθητές και προτείνονται μέθοδοι για τη διαχείριση του λάθους στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Κατηγορίες μαθηματικών λαθών

Σύμφωνα με την Elbrink (2008), υπάρχουν τρεις βασικές κατηγορίες μαθηματικών λαθών: α) υπολογιστικά λάθη, β) διαδικαστικά λάθη και γ) λάθη σε μαθηματικούς συμβολισμούς.

Τα υπολογιστικά λάθη είναι τα λάθη που γίνονται κατά την εκτέλεση αριθμητικών πράξεων και είναι συνήθως λάθη απροσεξίας (Elbrink, 2008). Μπορεί να οφείλονται και σε γνωστικά κενά (π.χ. στην προπαίδεια). Για την αποφυγή των υπολογιστικών λαθών που οφείλονται σε απροσεξία, σημαντικό ρόλο παίζει η συγκέντρωση και ο διαθέσιμος χρόνος.

Σύμφωνα με την Elbrink (2008) πολλοί μαθητές κάνουν μαθηματικά λάθη επειδή εφαρμόζουν λανθασμένα μια διαδικασία (αλγόριθμο). Τα διαδικαστικά λάθη ορίζονται ως λάθη που περιλαμβάνουν παραβίαση της αλγοριθμικής διαδικασίας, όπως για παράδειγμα η εκτέλεση πράξεων με λανθασμένη σειρά. Αυτοί οι τύποι λαθών υποδηλώνουν ότι η έννοια που σχετίζεται με τη διαδικασία δεν έχει γίνει κατανοητή από τους μαθητές. Η εννοιολογική μάθηση επικεντρώνεται πάνω σε γνώσεις και γενικεύσεις που δημιουργούν συνδέσεις μεταξύ των γνώσεων. Αντίθετα, η αλγοριθμική μάθηση επικεντρώνεται στις, βήμα προς βήμα, διαδικασίες (αλγορίθμους). Τόσο η εννοιολογική, όσο και η αλγοριθμική μάθηση είναι απαραίτητες, αλλά η αλγοριθμική πρέπει να βασίζεται σε έννοιες που έχουν ήδη κατανοηθεί και να συνδεθεί με την εννοιολογική μάθηση αλλά και με εφαρμογές της πραγματικής ζωής.

Εκτός από τις παρανοήσεις σχετικά με τις διαδικασίες και τους κανόνες, και οι μαθηματικοί συμβολισμοί οδηγούν σε λάθη. Ήδη από τις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου, οι δάσκαλοι χρησιμοποιούν σύμβολα για να παραστήσουν μαθηματικές έννοιες. Για να κατανοήσει ο μαθητής έναν μαθηματικό συμβολισμό, θα πρέπει πρώτα απ' όλα να έχει κατανοήσει την έννοια που αναπαριστά. Ο μαθηματικός συμβολισμός (συμβολική γραφή) απαιτεί αφαιρετικό τρόπο σκέψης. Είναι ένα ισχυρό και ευφυές εργαλείο που μαθαίνεται δύσκολα (Davis & Hersh, 1981; Schoenfeld & Arcavi, 1988 στο Λάππα, 2018). Η συμβολική γραφή χρησιμοποιεί γράμματα και άλλα σύμβολα, προκειμένου να αναπαραστήσει προτάσεις και σχέσεις. Τα γράμματα μπορεί να έχουν διαφορετική σημασία, ανάλογα με την έκφραση στην οποία χρησιμοποιούνται. Για παράδειγμα, ένα γράμμα μπορεί να αναπαριστά έναν άγνωστο ή έναν γενικευμένο αριθμό (π.χ. σε έναν μαθηματικό τύπο) ή μία μεταβλητή (Kuchemann (1981 στο Λάππα, 2018). Οι μαθητές αντιμετωπίζουν αυξημένες δυσκολίες και αντίστροφα, στη μετατροπή της φυσικής γλώσσας σε συμβολική αναπαράσταση (Δαγδιλέλης, Παυλοπούλου, Τρίγκα, 1988). Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στην επίλυση προβλημάτων πραγματικής ζωής. Πρέπει να «μεταφράσουν» την εκφώνηση του προβλήματος από τη φυσική στη συμβολική γλώσσα (π.χ. κατασκευή εξίσωσης), στη συνέχεια να επιλύσουν την εξίσωση και τέλος να ερμηνεύσουν την απάντηση σε σχέση με το αρχικό πρόβλημα (π.χ. μπορεί κάποια από τις λύσεις που βρήκαν να πρέπει να απορριφθεί) (Βαμβακούσης, 2014).

Αιτίες λαθών

Πολλά από τα λάθη που κάνουν οι μαθητές κατά την προσπάθεια επίλυσης ενός προβλήματος, οφείλονται στην κακή διατύπωση από τη μεριά του εκπαιδευτικού ή του σχολικού βιβλίου ή στην «επιπόλαιη» ανάγνωση από τη μεριά του μαθητή. Σύμφωνα με τον Mialaret, η καλή διατύπωση ενός προβλήματος είναι το ήμισυ της επίλυσής του (Οικονόμου, 1984).

Οι σημαντικότεροι παράγοντες που καθορίζουν την εμφάνιση ή μη των λαθών είναι οι προηγούμενες γνώσεις και η νοητική-αντιληπτική ικανότητα των μαθητών. Σύμφωνα με τον Piaget, οι άνθρωποι βασίζονται συνεχώς σε δύο διαδικασίες που είναι συμπληρωματικές μεταξύ τους, την αφομοίωση και τη συμμόρφωση, ώστε να μπορέσουν να προσαρμοστούν στο περιβάλλον τους. Σε πρώτη φάση, για να κατανοήσουν νέες εμπειρίες ή να επιλύσουν προβλήματα, χρησιμοποιούν τις γνωστικές δομές που έχουν ήδη (διαδικασία της αφομοίωσης). Πολλές φορές όμως, ανακαλύπτουν ότι αυτά που ήδη γνωρίζουν δεν επαρκούν κι έτσι τα αναθεωρούν (διαδικασία της συμμόρφωσης) ώστε να «ταιριάζουν» με τη νέα πραγματικότητα (Οικονόμου, 2017).

Η λειτουργία της αντίληψης έχει μεγάλη αξία στη διδακτική. Πολλοί παράγοντες, όπως η εμπειρία, οι στάσεις, τα ενδιαφέροντα, οι προσδοκίες και τα κίνητρα, επηρεάζουν την αντίληψη (Robbins & Judge, 2007). Η αναγνώριση των ερεθισμάτων γίνεται μέσω των εμπειριών. Η νοημοσύνη επηρεάζει επίσης την αντιληπτική ικανότητα, καθώς συνδέεται με την ικανότητα για μάθηση δηλ. την ικανότητα της στοχοθεσίας και των ενεργειών που απαιτούνται για την επίτευξη των στόχων, την ικανότητα της επεξεργασίας των εμπειρικών δεδομένων και την ικανότητα προσαρμογής στις συνθήκες που υπάρχουν κάθε φορά και στις απαιτήσεις του περιβάλλοντος, κοινωνικού ή φυσικού (Wechsler, 1955).

Πολλά από τα λάθη που κάνουν οι μαθητές, δεν οφείλονται στην αδιαφορία ή τη χαμηλή τους ευφυΐα, αλλά στην ίδια τη μαθησιακή διαδικασία. Η διαδικασία δημιουργίας ενός νέου γνωστικού σχήματος, μέσω της αφομοίωσης, της επέκτασης ή ακόμη και της παραμόρφωσης ενός υπάρχοντος σχήματος, είναι εξαιρετικά περίπλοκη και δύσκολη υπόθεση. Για παράδειγμα, η αντίληψη ότι ο πολλαπλασιασμός κάνει έναν αριθμό να μεγαλώνει είναι σωστή κατά τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου αλλά δεν ισχύει όταν ο μαθητής διδαχθεί τους δεκαδικούς αριθμούς και τα κλάσματα. Τότε θα πρέπει ο δάσκαλος να βοηθήσει τον μαθητή να επεκτείνει το υπάρχον γνωστικό σχήμα του.

Τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (ΑΠΣ), τα οποία επικαιροποιούνται ανά τακτά χρονικά διαστήματα, ώστε να εναρμονίζονται με τα νέα δεδομένα, παίζουν επίσης σημαντικό ρόλο στη μαθησιακή διαδικασία. Στα νεώτερα ΑΠΣ, σύμφωνα με τη θεωρία του κονστρουκτιβισμού, μια νέα μαθηματική έννοια προσεγγίζεται στα πλαίσια της ανακαλυπτικής μάθησης, με αποτέλεσμα να είναι πιο χρονοβόρα η προτεινόμενη διαδικασία σε σχέση με την παραδοσιακή (αλλά λιγότερο αποτελεσματική) παρουσίαση της έννοιας από τον εκπαιδευτικό. Απ' την άλλη μεριά, οι ώρες που διατίθενται στο ωρολόγιο πρόγραμμα για τα μαθηματικά δεν υπολογίζονται με βάση τη φιλοσοφία των νέων ΑΠΣ (Φερεντίνος, 2017). Χαρακτηριστικά, ο Φερεντίνος αναφέρει ότι για τη διδασκαλία του κεφαλαίου «Επίλυση προβλημάτων», στο ΑΠΣ Μαθηματικών ΣΤ' Δημοτικού προτείνονται 24 διδακτικές ώρες, ενώ ούτε οι διπλάσιες δεν επαρκούν, ώστε να επιτευχθούν οι στόχοι του κεφαλαίου. Επιπρόσθετα, είναι αναγκαία η επιμόρφωση όλων των εκπαιδευτικών, ώστε να είναι σε θέση να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις των νέων ΑΠΣ, αποκτώντας βαθύτερη γνώση των μαθημάτων που διδάσκουν αλλά και των σύγχρονων παιδαγωγικών πρακτικών (Θεοδωρόπουλος, 2017).

Ενδεικτικά παραδείγματα μαθηματικών λαθών

1. Μαθηματικά λεκτικά προβλήματα

Οι μαθητές δυσκολεύονται να επιλύσουν μαθηματικά λεκτικά προβλήματα και κάνουν λάθη, τόσο στη διαδικασία, όσο και σε μαθηματικούς συμβολισμούς. Στην έρευνα των Οικονόμου, Σακονίδη & Τζεκάκη (2000) δόθηκε στους μαθητές το εξής πρόβλημα: «*Για να πλακοστρώσουμε ένα δάπεδο χρειαζόμαστε 160 τετράγωνες πλάκες πλευράς 30 εκ. Πόσες* *πλάκες πλευράς 40 εκ. χρειαζόμαστε για να στρώσουμε το ίδιο δάπεδο;».* Τα αποτελέσματα ήταν απελπιστικά: μόλις το 14,8% των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου έλυσε σωστά το πρόβλημα.

2. Διαίρεση με το μηδέν / Διαγραφή παράγοντα που είναι ίσος με μηδέν

Οι μαθητές πιστεύουν ότι οποιοσδήποτε αριθμός διαιρούμενος με το μηδέν ισούται με το μηδέν. Π.χ. $\frac{3}{0} = 0$

Ένα παράδειγμα συνηθισμένου λάθους που προκύπτει από τη διαίρεση με το μηδέν (διαγραφή παράγοντα που είναι ίσος με μηδέν) είναι το εξής:
Έστω ότι $α + β = γ$ και $α = 2$, $β = 3$ και $γ = 5$.
Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με το $(α + β)$ έχουμε:
$(α + β)(α + β) = (α + β)γ \Rightarrow$
$α^2 + 2αβ + β^2 = αγ + βγ \Rightarrow$
$α^2 + αβ - αγ = βγ - αβ - β^2 \Rightarrow$
$α(α + β - γ) = -β(α + β - γ) \Rightarrow$
(διαγραφή του παράγοντα $α + β - γ$)
$α = -β \Rightarrow α + β = 0$
Καταλήξαμε σε κάτι που δεν ισχύει αφού $α = 2$ και $β = 3$. Το λάθος (στη διαδικασία) προέκυψε γιατί διαγράφηκε ο παράγοντας $α+β-γ$ που είναι ίσος με 0.

3.Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Οι μαθητές υψώνουν στον εκθέτη της δύναμης τους προσθετέους που βρίσκονται μέσα στην παρένθεση, π.χ. $(x+y)^2 = x^2 + y^2$
Πιθανές εξηγήσεις: (α) Πιστεύουν ότι, όπως ισχύει η ιδιότητα $(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$, έτσι θα εφαρμόζεται και στην πρόσθεση ή (β) γνωρίζουν την επιμεριστική ιδιότητα σύμφωνα με την οποία ένας αριθμός που πολλαπλασιάζεται με ένα άθροισμα, πολλαπλασιάζεται με τον κάθε προσθετέο χωριστά και θεωρούν ότι αυτή η ιδιότητα ισχύει και για τις δυνάμεις.

4. Εύρεση τετραγωνικής ρίζας και χρήση του συμβόλου $\sqrt{\ }$

Οι μαθητές βρίσκουν μόνο μία θετική ρίζα, π.χ. $x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$ δηλ. δεν αναγνωρίζουν ότι υπάρχει κι άλλη λύση (η -5) που επαληθεύει την εξίσωση.

Ο ορισμός της τετραγωνικής ρίζας θέτει πολλά μαθησιακά εμπόδια και πρέπει να τονιστεί στους μαθητές ότι η $\sqrt{α}$ ορίζεται ως *ο μη αρνητικός* αριθμός που αν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον *μη αρνητικό αριθμό* α. Είναι σωστό, για παράδειγμα, να γράψουμε $\sqrt{4} = 2$ και $-\sqrt{4} = -2$, όμως δεν ισχύει $\sqrt{4} = \pm 2$, όπως πιστεύουν πολλοί μαθητές.

Η σύγχυση αυτή φαίνεται να δημιουργείται από τη σύνδεση που έχουν κάνει οι μαθητές μεταξύ της τετραγωνικής ρίζας και της ύψωσης στο τετράγωνο (ως δύο αντίστροφες πράξεις). Το -2 και το +2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 = 4$. Έτσι, πολλοί μαθητές γράφουν $x = \sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$ δηλ. θεωρούν ότι $\sqrt{4} = \pm 2$.

5. Ανισότητες /Ανισώσεις

Στη λύση μίας ανίσωσης, οι μαθητές χρησιμοποιούν το σύμβολο «ίσον», ενώ θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουν το σύμβολο της ανισότητας, π.χ. $x-1 \leq 2 \Rightarrow x = 3$

Άλλο συνηθισμένο λάθος είναι το εξής: Οι μαθητές δεν αλλάζουν τη φορά της ανίσωσης, όταν πολλαπλασιάζουν ή διαιρούν με αρνητικό αριθμό.
Έστω δύο θετικοί αριθμοί α, β έτσι, ώστε $β>α$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $α-β$:
$(α - β)β > (α - β)α \Rightarrow α \cdot β - β^2 > α^2 - α \cdot β \Rightarrow 0 > α^2 + β^2 - 2α \cdot β \Rightarrow 0 > (α - β)^2$ που δεν ισχύει.
Το λάθος συνέβη όταν πολλαπλασιάσαμε την αρχική ανισότητα με το $α-β$.
Δεδομένου ότι ισχύει από την υπόθεση $β > α \Rightarrow α - β < 0$, δηλ. πολλαπλασιάσαμε τα μέλη της ανισότητας με αρνητικό αριθμό, χωρίς να αλλάξουμε τη φορά της ανισότητας.

Ένα ακόμη λάθος που μπορεί να κάνουν οι μαθητές στις ανισότητες είναι η διαίρεση κατά μέλη (όπως στις εξισώσεις).
$5 > 4$ και $5 > 2 \Rightarrow$

$\frac{5}{5} > \frac{4}{2}$ (διαίρεση κατά μέλη) => 1 > 2 που δεν ισχύει

6. Πολυωνυμικές Εξισώσεις

Κατά την επίλυση κάποιων πολυωνυμικών εξισώσεων, οι μαθητές χάνουν μια λύση, όπως στο παράδειγμα:

$x^3 = 4x$

$\frac{x^3}{x} = \frac{4x}{x}$ (διαίρεση και των δύο μελών με το x)

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$

Κάνουν λάθος στη διαδικασία γιατί πιστεύουν ότι μπορούν να διαιρέσουν με το x, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τους ότι χάνουν μια λύση, την x = 0, καθώς το x μπορεί να πάρει και την τιμή 0 και διαίρεση με το 0 δεν γίνεται.

7. Άρρητες εξισώσεις

Ένα παράδειγμα λάθους σε άρρητη εξίσωση είναι το εξής:

$\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x-3} = 0 \Rightarrow$

$\sqrt{3x-2} = -\sqrt{4x-3} \Rightarrow$

$(\sqrt{3x-2})^2 = (-\sqrt{4x-3})^2 \Rightarrow$

$3x - 2 = 4x - 3 \Rightarrow$

$3x - 4x = -3 + 2 \Rightarrow -x = -1 \Rightarrow x = 1$

Αν θέσουμε στην αρχική εξίσωση όπου x το 1 βρίσκουμε:

$\sqrt{1} + \sqrt{1} = 0 \Rightarrow 2 = 0$ που δεν ισχύει.

Το λάθος έγινε όταν μεταφέραμε στο 2ο μέλος τη μία τετραγωνική ρίζα, άρα μετατράπηκε σε αρνητικό αριθμό (ή μηδέν). Η μόνη περίπτωση για να είναι το 1ο μέλος (που είναι μία τετραγωνική ρίζα, άρα μη αρνητικός αριθμός) ίσο με το 2ο (που είναι αρνητικός αριθμός ή μηδέν) είναι να ισούται και το 1ο μέλος και το 2ο με το μηδέν, απ' όπου προκύπτει ότι $3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ και $4x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$. Συνεπώς, η αρχική εξίσωση είναι αδύνατη. Πολλές φορές οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει πλήρως την έννοια της τετραγωνικής ρίζας και τις ιδιότητές της και δεν αντιλαμβάνονται το λάθος. Έτσι, βρίσκοντας x = 1, πιστεύουν ότι η εξίσωση λύθηκε σωστά. Με επαλήθευση, θέτοντας στην αρχική εξίσωση όπου x την τιμή 1, θα αντιληφθούν ότι η λύση τους δεν είναι σωστή.

Παρόμοιο είναι και το παρακάτω λάθος:

$\sqrt{12-2x} + 2 = x \Rightarrow$

$\sqrt{12-2x} = x - 2 \Rightarrow$

$(\sqrt{12-2x})^2 = (x-2)^2 \Rightarrow$

$12 - 2x = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow$

$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4$ και $x = -2$

Αν όμως αντικαταστήσουμε όμως το -2 στην αρχική εξίσωση, θα διαπιστώσουμε ότι δεν την επαληθεύει, καθώς προκύπτει ότι 4 = -4. Οι τετραγωνικές ρίζες είναι αριθμοί *μη αρνητικοί* αλλά και η υπόρριζη ποσότητα είναι αριθμός *μη αρνητικός*. Συνεπώς θα έπρεπε να ληφθούν υπόψη οι περιορισμοί:

$12 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 6$ και $x - 2 \geq 0$ δηλ. $x \geq 2$

Άρα $2 \leq x \leq 6$, οπότε η λύση -4 απορρίπτεται.

Σε κάθε περίπτωση, η επαλήθευση είναι μία χρήσιμη διαδικασία που δεν πρέπει να ξεχνάμε να συμπεριλαμβάνουμε στα βήματα της επίλυσης της άσκησης.

8. Αναλογίες

Γνωστικά εμπόδια συναντάμε και στις ιδιότητες των αναλογιών:

$\frac{x+1}{x-1} - 2 = \frac{3-x}{x+2} \Rightarrow \frac{x+1-2x+2}{x-1} = \frac{3-x}{x+2} \Rightarrow \frac{3-x}{x-1} = \frac{3-x}{x+2}$

Αφού τα κλάσματα έχουν ίσους αριθμητές, θα έχουν και ίσους παρανομαστές, δηλαδή θα είναι: $x - 1 = x + 2 \Rightarrow -1 = 2$ που δεν ισχύει.

Το λάθος στη διαδικασία προέκυψε από τη χρήση της ισοδυναμίας: Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\gamma} \Leftrightarrow \beta = \gamma$
Η παραπάνω σχέση, όμως, ισχύει για όλες τις περιπτώσεις εκτός από την περίπτωση που το α ισούται με 0.

Μέθοδοι για τη διαχείριση του λάθους στην εκπαιδευτική διαδικασία

Όταν ο μαθητής κάνει λάθος, είναι πρωταρχικής σημασίας η άμεση ενίσχυση και η έλλειψη κριτικής, ώστε να είναι ευκολότερο να δεχθεί το λάθος του και να προσπαθήσει περισσότερο την επόμενη φορά (Χαϊδή κ.ά., 2010).

Ο Polya (1963), υποστηρίζει ότι, μέσω της επίλυσης ενός κατάλληλα επιλεγμένου προβλήματος και αξιοποιώντας την ήδη υπάρχουσα γνώση, μπορεί να παραχθεί νέα γνώση, με κύριο εργαλείο την επανα-ανακάλυψη προκειμένου να επιτευχθεί η ενεργός μάθηση (βιωματική μάθηση) που προτείνεται από τη θεωρία του κονστρουκτιβισμού. Σύμφωνα με τον Polya, εξίσου σημαντικό για την επίτευξη της μάθησης είναι και το επιθυμητό κίνητρο (best motivation) (Βόσκογλου, 2008). Και ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι ιδιαίτερα σημαντικός. Σύμφωνα με τον Piaget, ο εκπαιδευτικός πρέπει να παρέχει αντιπαραδείγματα που οδηγούν σε λανθασμένα αποτελέσματα, με στόχο τη δημιουργία γνωστικών συγκρούσεων (cognitive conflicts) στον μαθητή (Bouvier, 1998). Μεγάλη βαρύτητα πρέπει να δίνεται και στις ερωτήσεις, ώστε να είναι απόλυτα κατανοητές από τον μαθητή. Το να θέτει ο εκπαιδευτικός ερωτήσεις-«κλειδιά» είναι δυσκολότερο από το να τις απαντά (Halm, 1985 στο Μητρογιαννοπούλου, 2007).

Τα υπολογιστικά λάθη γίνονται κυρίως λόγω απροσεξίας του μαθητή. Συνήθως, δίνοντας ο εκπαιδευτικός περισσότερο χρόνο στον μαθητή, ώστε να επανεξετάσει τη λύση του, το λάθος μπορεί να γίνει αντιληπτό από τον ίδιο τον μαθητή. Σημαντικό ρόλο στην εκτέλεση υπολογιστικών πράξεων, έχουν η συγκέντρωση και η απομνημόνευση. Για παράδειγμα, προκειμένου οι μαθητές να αποφύγουν ή να εντοπίσουν υπολογιστικά λάθη στον πολλαπλασιασμό που οφείλονται στη δυσκολία απομνημόνευσης της προπαίδειας, ο δάσκαλος μπορεί να αξιοποιήσει κάποιον από τους πολλούς τρόπους που προτείνονται στο διαδίκτυο, όπως ο πίνακας προπαίδειας, τον οποίο μπορεί να αναρτήσει στην τάξη και να τον διαθέσει και στους μαθητές του, για χρήση στο σπίτι.

Πολλά από τα λάθη που γίνονται, σχετίζονται με βασικές μαθηματικές έννοιες που αποτελούν τα θεμέλια πάνω στα οποία οι μαθητές αναμένεται να αναπτύξουν τη βάση των γνώσεών τους. Εάν τα λάθη αυτά δεν αντιμετωπιστούν αποτελεσματικά, θα «χτίσουν» τις γνώσεις τους πάνω σε «παρεξηγημένες» έννοιες.

Οι οδηγίες διδασκαλίας και το βιβλίο του εκπαιδευτικού περιέχουν παραδείγματα και αντιπαραδείγματα που μπορεί να αξιοποιήσει ο εκπαιδευτικός στη διδασκαλία του, για την πρόληψη κυρίως, αλλά και για την αντιμετώπιση του μαθηματικού λάθους. Εάν ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να κάνει χρήση νέων τεχνολογιών στην τάξη του, στα διαδραστικά βιβλία του «Φωτόδεντρου» (http://ebooks.edu.gr/ebooks/) περιέχονται πολλά παραδείγματα και αντιπαραδείγματα (μικροπειράματα) που μπορεί να αξιοποιήσει. Για την αποτελεσματική διαχείριση των λαθών, το αντιπαράδειγμα είναι ένα σπουδαίο αποδεικτικό μέσο που βρίσκει εφαρμογή σε όλες τις φυσικές και κοινωνικές επιστήμες. Είναι μία ειδική περίπτωση της «εις άτοπον απαγωγής», που μπορεί να προκαλέσει γνωστικές συγκρούσεις, ώστε να αρθούν παρανοήσεις και να διορθωθούν λανθασμένα νοητικά μοντέλα (Πλατάρος, 2007). Τα παραδείγματα λαθών 2, 5, 6, 7 και 8 μπορούν να αξιοποιηθούν ως αντιπαραδείγματα στη διδασκαλία των αντίστοιχων εννοιών. Αντιπαραδείγματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για την αντιμετώπιση λαθών σε λεκτικά προβλήματα (όπως το παράδειγμα 1), τα οποία ταλαιπωρούν ιδιαίτερα τους μαθητές. Στο Δημοτικό, ο δάσκαλος πρέπει να δώσει έμφαση στην έννοια του αριθμού και στους αλγόριθμους των βασικών πράξεων. Είναι, επίσης, σημαντικό να δοθεί έμφαση, από το Δημοτικό, στη διδασκαλία του γλωσσικού κώδικα των Μαθηματικών. Η προσεκτική ανάγνωση του προβλήματος είναι, επίσης, σημαντική στην αποκωδικοποίηση της εκφώνησης.

Η χρήση παραδειγμάτων από την καθημερινή ζωή αναδεικνύει τη σύνδεση των μαθηματικών με την πραγματική ζωή και είναι σημαντική για την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας. Σύμφωνα με το μοντέλο των βασικών διαστάσεων της διδασκαλίας των μαθηματικών των Leon, Medina-Garrido και Nunez (2017, στο Κυριακορεΐζη, 2021), ο εκπαιδευτικός, προκειμένου να διδάξει μία νέα μαθηματική έννοια ή διαδικασία, ξεκινά τη διδασκαλία του χρησιμοποιώντας παραδείγματα από την καθημερινή ζωή. Η επαφή με πραγματικά προβλήματα και ο ίδιος ο προβληματισμός του μαθητή δημιουργούν κίνητρα για μάθηση. Τα μαθηματικά είναι ένα μέρος των προσπαθειών του ανθρώπου να κατανοήσει τον κόσμο. Δίνοντας, λοιπόν, παραδείγματα εφαρμογής μίας νέας έννοιας, οι μαθητές είναι ευκολότερο να πεισθούν για την αξία της και να την κατανοήσουν καλύτερα. Τα παραδείγματα από την καθημερινή ζωή μπορούν να αξιοποιηθούν και για τη διαχείριση των λαθών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα χρήσης παραδείγματος από την καθημερινή ζωή για την αντιμετώπιση λαθών στα κλάσματα, είναι η παρουσίαση των κλασμάτων ως κομμάτια μίας πίτσας.

Κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος, η φάση της επαλήθευσης είναι ιδιαίτερα σημαντική στην πρόληψη/αντιμετώπιση λαθών. Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να τονίζει στους μαθητές τη σημασία της επαλήθευσης.

Η χρήση εφαρμογών νέων τεχνολογιών στην εκπαιδευτική διαδικασία μπορεί να οδηγήσει σε εντοπισμό λαθών, κατά τη φάση της επαλήθευσης, είτε από τον ίδιο τον μαθητή, είτε από το ηλεκτρονικό μέσο που χρησιμοποιείται (Παπαδόπουλος, 2007). Διδακτικές προτάσεις με χρήση εφαρμογών νέων τεχνολογιών υπάρχουν άφθονες στο διαδίκτυο (στο «Φωτόδεντρο» αλλά και σε πληθώρα άλλων ελληνικών και ξένων ιστότοπων μαθηματικού περιεχομένου). Για την κατανόηση των αξιοσημείωτων ταυτοτήτων, όπως η $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ του παραδείγματος 3, το σχολικό διαδραστικό βιβλίο της Γ’ Γυμνασίου περιέχει αρκετούς υπερσυνδέσμους σε εφαρμογές του «Φωτόδεντρου», με τις οποίες μπορεί ο μαθητής να πειραματιστεί και να ανακαλύψει νέα ή να διορθώσει τα υπάρχοντα γνωστικά σχήματα.

Η διαμορφωτική αξιολόγηση μπορεί να συμβάλει στην αντιμετώπιση των μαθηματικών λαθών καθώς παρέχει ανατροφοδότηση για την αναπροσαρμογή της διδασκαλίας και μάθησης, με στόχο τη βελτίωση των επιτευγμάτων των μαθητών σε σχέση με τους διδακτικούς στόχους που έχουν τεθεί (Popham, 2008). Μπορεί να δώσει σημαντική ανατροφοδότηση στον μαθητή, σε σχέση με τη γνώση που απέκτησε, τα λάθη και τις παρανοήσεις του (Hattie, 2009). Η ανατροφοδότηση του μαθητή είναι πιο αποτελεσματική όταν οδηγεί στον αναστοχασμό του πάνω στα λάθη του και προτείνει συγκεκριμένους τρόπους αποφυγής τους, αντί να επιδιώκει την απομνημόνευση της σωστής απάντησης (Αποστολόπουλος, 2017).

Συμπεράσματα

Η ποιότητα στη διδασκαλία, μετά από κατάλληλη προετοιμασία, μπορεί να βελτιωθεί σημαντικά, εάν ο εκπαιδευτικός καταγράψει, κατηγοριοποιήσει, αναζητήσει τις αιτίες και αξιοποιήσει τα μαθηματικά λάθη κατά τη διδασκαλία του. Η διδασκαλία των εννοιών πρέπει να γίνεται μέσω παραδειγμάτων, αλλά και μέσω αντιπαραδειγμάτων (τα οποία οδηγούν σε λανθασμένα συμπεράσματα), ώστε να οδηγηθεί ο μαθητής σε γνωστικές συγκρούσεις. Τα διδακτικά εργαλεία που θα επιλέξει ο εκπαιδευτικός πρέπει να αποκαλύπτουν την αδυναμία των προηγουμένων «γνωστικών σχημάτων», ώστε οι μαθητές να αναγκαστούν να τα αντικαταστήσουν με νέα. Καταλήγοντας ο μαθητής σε λανθασμένα αποτελέσματα, θα αναγκαστεί να αναπροσαρμόσει τα γνωστικά του σχήματα. Η λανθασμένη απάντηση πρέπει να θεωρείται το ίδιο χρήσιμη με τη σωστή. Η ενασχόληση με το λάθος και η επεξεργασία του, ευνοεί τον διάλογο, μέσω του οποίου θα εκφραστούν διαφορετικές απόψεις που θα οδηγήσουν τους μαθητές σε νέα γνώση. Αλλά και η συστηματική χρήση παραδειγμάτων από την καθημερινή ζωή θα δώσει κίνητρο στους μαθητές και θα τους βοηθήσει να αντιληφθούν τη χρησιμότητα των μαθηματικών. Τα παραδείγματα από την καθημερινή ζωή μπορούν να αξιοποιηθούν και για τη διαχείριση λαθών. Οι εφαρμογές νέων τεχνολογιών μπορούν, επίσης, να βοηθήσουν σημαντικά στη διαχείριση των λαθών, καθώς παρέχουν άμεση ανατροφοδότηση στον μαθητή. Επίσης, ο εκπαιδευτικός πρέπει να τονίζει τους μαθητές ότι η επαλήθευση αποτελεί μέρος της λύσης μιας άσκησης και μπορεί να αποκαλύψει στον μαθητή κάποιο λάθος του. Τέλος, η ένταξη στην εκπαιδευτική διαδικασία, σε τακτική βάση, της διαμορφωτικής αξιολόγησης, με κύριο στόχο την ανατροφοδότηση, μπορεί να οδηγήσει τον μαθητή σε αναστοχασμό πάνω στα λάθη του. Τα λάθη συνδέονται με τη διδασκαλία και τη μάθηση. Η κατάλληλη αντιμετώπισή τους συντελεί στην επιτυχία της μαθησιακής διαδικασίας και, γιατί όχι, στην αγάπη για τα Μαθηματικά.

Βιβλιογραφία

Belanger, M. (1991): *Les erreurs en arithmetique. Un siecle de presumption americainem Girade, Universite du Quebec a Montreal, publie dans petit x, no 26* Grenoble : IREM de Grenoble.

Bouvier, A. (1988). Στρατηγικές διδασκαλίας. *Ευκλείδης Γ'*, 5(20), 94.

Elbrink, M. (2008). *Analysing and Addressing Common Mathematical Errors in Secondary Education*. Muncie: Ball State University.

Hattie, K. (2009). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement.* New York: Routledge.

Henry, M.(1999). *Διδακτική μαθηματικών-Παρουσίαση της διδακτικής με στόχο την επιμόρφωση των διδασκόντων*. Αθήνα: Παν/μιο Αθηνών – Τμήμα Μαθηματικών

Mayer, S. (2005). The Early Evolution of Jean Piaget's Clinical Method. *History of psychology.* 8. 362-382. DOI: 10.1037/1093-4510.8.4.362.

Popham, W. J. (2008). *Transformative assessment*. VA: ASCD.

Robbins, S. P., & Judge, T. A. (2007). *Organizational behavior (12th ed.).* Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall.

Wechsler, D. (1955). *Wechsler Adult Intelligence Scale. Manual.* New York: Psychological Corporation

Αποστολόπουλος, Κ. (2017). Κριτική του συστήματος αξιολόγησης του μαθητή. Προτάσεις για τη δόμηση ενός συστήματος ευθυγραμμισμένου με τους σύγχρονους σκοπούς της εκπαίδευσης. *Έρκυνα, Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών– Επιστημονικών Θεμάτων, 2017*(13), 203-219. Ανακτήθηκε από: https://erkyna.gr/e_docs/periodiko/teyxos/teyxos-13-13_2017.pdf

Βαμβακούσης, Σ. (2014). *Η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής, του αγνώστου και της παραμέτρου από μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου*. (Μεταπτυχιακή εργασία). Ανακτήθηκε από: http://me.math.uoa.gr/dipl/2013-2014/dipl_sofronis_vamvakousis_.pdf

Βόσκογλου, Μ. (2008). Η επίλυση προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων, 2008*(14), 5-17. Ανακτήθηκε από: http://www.pi-schools.gr/publications/epitheorisi/teyxos14/

Δαγδιλέλης Β., Παυλοπούλου Κ., Τρίγκα Π. (1998), Διδακτική μέθοδοι και εφαρμογές, Αθήνα: Εκδ. Ευγ. Μπένου.

Θεοδωρόπουλος, Π. (2017). Επιμορφωτικές ανάγκες και σύγχρονες μέθοδοι επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών. Ε.Κ.Δ.Δ.Α. Ανακτήθηκε στις 18/08/2021 από: http://www.p-theodoropoulos.gr/ergasies/paidagog-Epimorf-Ekpaid.pdf

Κυριακορεΐζη, Α. (2021). Γνώσεις περιεχομένου και παιδαγωγικές γνώσεις περιεχομένου εν ενεργεία εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και ποιότητα διδασκαλιών στους ρητούς αριθμούς. (Διδακτορική διατριβή). Ανακτήθηκε από: http://ikee.lib.auth.gr/record/326319/files/GRI-2021-29562.pdf

Λάππα, Ε. (2018). Το πέρασμα από τη "φυσική γλώσσα" στη "συμβολική γραφή" και αντίστροφα. Μία έρευνα για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν μαθητές της τελευταίας τάξης του Λυκείου και πρωτοετείς φοιτητές της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. του Ε.Μ.Π. (Διπλωματική εργασία). Ανακτήθηκε από: http://dx.doi.org/10.26240/heal.ntua.15638

Μητρογιαννοπούλου, Α. (2007). Τα λάθη στα Μαθηματικά. *Τα λάθη των μαθητών: Δείκτες Αποτελεσματικότητας ή Κλειδιά για τη Βελτίωση της Ποιότητας της Εκπαίδευσης;* Αθήνα 1-2 Νοεμβρίου 2007, Θεσσαλονίκη 13-14 Δεκεμβρίου 2007 (σ.333-344). Αθήνα: Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας,. Ανακτήθηκε από: http://www.kee.gr/attachments/file/praktika/praktika_lathi.pdf

Οικονόμου, Α. (2017). *Αναπτυξιακή Ψυχολογία*. Θεσσαλονίκη: ΑΣΠΑΙΤΕ Θεσσαλονίκης

Οικονόμου, Α., Σακονίδης, Χ. & Τζεκάκη, Μ. (2000). *Αξιολόγηση των μαθηματικών γνώσεων μαθητών Στ΄ Δημοτικού και Γ΄ Γυμνασίου*, Θεσσαλονίκη: ΑΠΘ.

Οικονόμου, Π. (1984). Η αντιμετώπιση του λάθους από τον καθηγητή των μαθηματικών. Μαθηματική *Επιθεώρηση, 1984*(27), 85-86.

Παπαδόπουλος, Ι. (2007). *Η συμβολή του υπολογιστή στην ανακάλυψη ή την παρουσία λάθους στη φάση της επαλήθευσης στη γεωμετρική επίλυση προβλήματος. Τα λάθη των μαθητών: Δείκτες Αποτελεσματικότητας ή Κλειδιά για τη Βελτίωση της Ποιότητας της Εκπαίδευσης;* Αθήνα 1-2 Νοεμβρίου 2007, Θεσσαλονίκη 13-14 Δεκεμβρίου 2007 (σ.372-379). Αθήνα: Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας,. Ανακτήθηκε από: http://www.kee.gr/attachments/file/praktika/praktika_lathi.pdf

Πλατάρος, Ι. (2007). *Το αντιπαράδειγμα, ως θεραπεία συνήθων λαθών στα Μαθηματικά. Τα λάθη των μαθητών: Δείκτες Αποτελεσματικότητας ή Κλειδιά για τη Βελτίωση της Ποιότητας της Εκπαίδευσης;* Αθήνα 1-2 Νοεμβρίου 2007, Θεσσαλονίκη 13-14 Δεκεμβρίου 2007 (σ.380-385). Αθήνα: Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας,. Ανακτήθηκε από: http://www.kee.gr/attachments/file/praktika/praktika_lathi.pdf

Ράπτη, Μ. (2002). *Τα Λάθη των Μαθητών και ο Ρόλος τους στη Διαδικασία της Μάθησης*. Αθήνα, Gutenberg.

Σφυρόερα, Μ. (2007). *Κλειδιά και αντικλείδια* - Το λάθος ως εργαλείο μάθησης και διδασκαλίας. Αθήνα: ΥΠΕΠΘ – Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Φερεντίνος, Σ. (2017). Η Αγία Τριάδα της εκπαίδευσης: Ένα σχολείο, ένα αναλυτικό πρόγραμμα, ένα βιβλίο. *Έρκυνα, Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών– Επιστημονικών Θεμάτων, 2017*(13),103-114. Ανακτήθηκε από: https://erkyna.gr/e_docs/periodiko/teyxos/teyxos-13-13_2017.pdf

Χαϊδή, Ε., Παπανικολάου, Β., Κίργινας, Σ., Γκούσκος, Δ. & Μεϊμαρης, Μ. (2010). *Ψηφιακά Παιχνίδια ως Εργαλεία Μάθησης Για Παιδιά με Αυτισμό*. Ανακτήθηκε στις 18/08/2021 από https://www.specialeducation.gr/files4users/files/pdf/ercer_aytismos.pdf

Χαραλαμπίδου, Γ. (2008). Η χρήση των λαθών για μια αλάνθαστη διδασκαλία και στις τρεις βαθμίδες της εκπαίδευσης. (Μεταπτυχιακή Εργασία). Πανεπιστήμιο Αθηνών & Πανεπιστήμιο Κύπρου. Ανακτήθηκε από: http://me.math.uoa.gr/dipl/dipl_haralampidou.georgia.pdf).