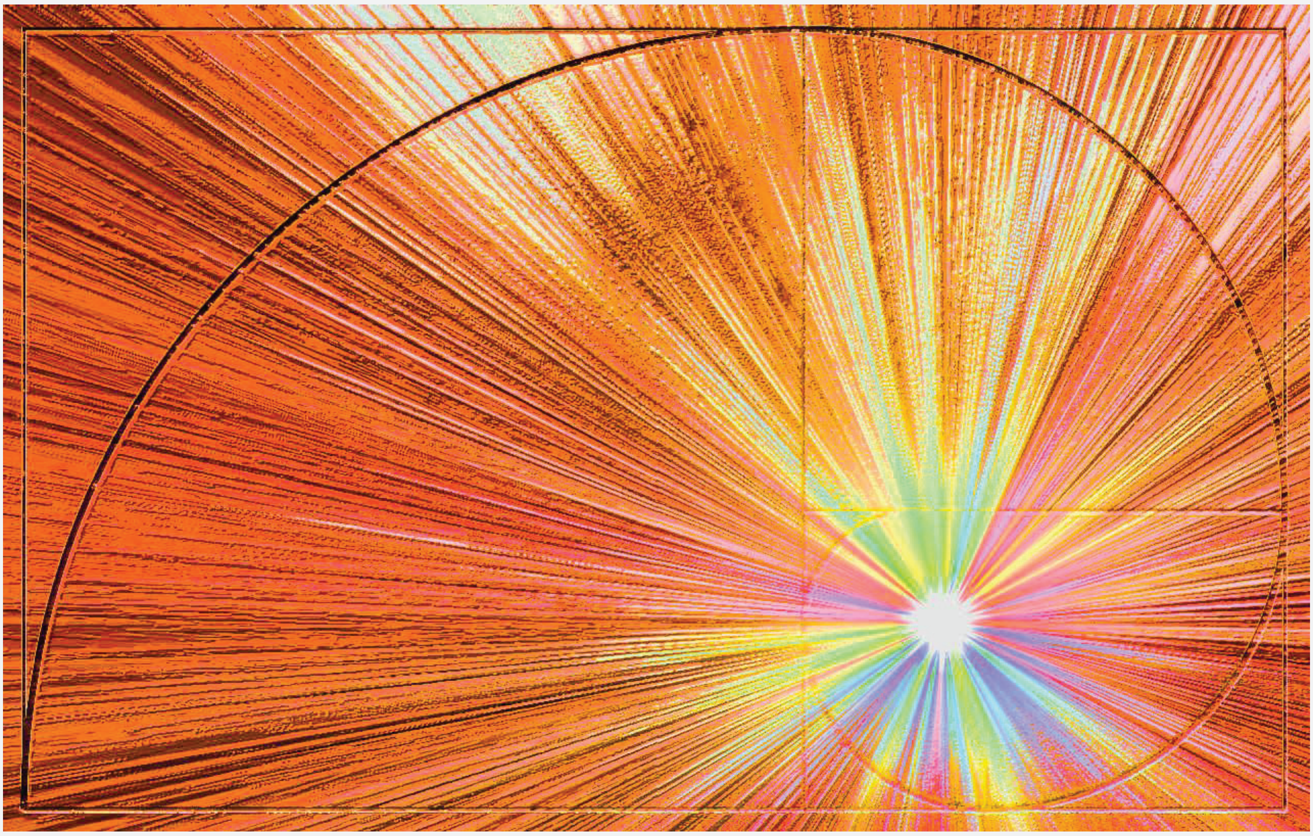
ΕΕΠΕΚ
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΝΩΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ
ΠΡΟΩΘΗΣΗ ΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙΝΟΤΟΜΙΑΣ

Vol. 3, Issue 3 (2021)
ISSN: 2654-002

International Journal of Educational Innovation



Ρίζες πραγματικών αριθμών - Ερμηνείες και παρανοήσεις. Εμπειρική έρευνα (1988 και 2021)

Τζικούδη – Παπαγεωργίου Χρυσάνθη
Εκπαιδ. ΠΕ86 & ΠΕ03, MSc Πληροφοριακά Συστήματα, Διευθ. 1ου Γυμν. Πεύκων Θεσ/νίκης
chrissap@sch.gr

Παρασκευοπούλου Κωνσταντίνα
Φοιτήτρια του Μαθηματικού Τμήματος του Παν. Δυτικής Μακεδονίας
constantina.paraskeuopoulou@gmail.com

Περίληψη

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται το θέμα της παρουσίασης της έννοιας της ν-οστής ρίζας πραγματικού αριθμού στην ελληνική και διεθνή βιβλιογραφία. Στόχος της εργασίας είναι η ανάδειξη των εμποδίων στη διδασκαλία της έννοιας των ριζών πραγματικών αριθμών στους μαθητές και των ασαφειών που υπάρχουν, λόγω της διαφορετικής απόδοσης της έννοιας της ν-οστής ρίζας, αλλά κυρίως του συμβόλου √(ν&), στα βιβλία (ελληνικά και ξενόγλωσσα), από τα μέσα του 19ου αιώνα μέχρι σήμερα. Προκειμένου να εκτιμηθεί ο βαθμός κατανόησης της έννοιας της ν-οστής ρίζας από μαθητές, αλλά και από φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης και του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας, συγκρίθηκαν τα αποτελέσματα μιας εμπειρικής έρευνας που διεξήχθη στη Θεσσαλονίκη, το 1988 (από την εκπαιδευτικό/συγγραφέα της παρούσας εργασίας, όταν ήταν φοιτήτρια του Μαθηματικού Τμήματος του ΑΠΘ) με τα αποτελέσματα εμπειρικής έρευνας, με τα ίδια ερωτήματα, που διεξήχθη τον Απρίλιο του 2021, για τις ανάγκες τους παρούσας εργασίας.

Λέξεις κλειδιά: τετραγωνική ρίζα, ν-οστή ρίζα, μαθηματικοί συμβολισμοί, εννοιολογικά εμπόδια, πεδίο ορισμού

Εισαγωγή

Οι Έλληνες, από τα αρχαία χρόνια, ήταν ήδη εξοικειωμένοι με το πρόβλημα της εύρεσης του μήκους της πλευράς ενός τετραγώνου του οποίου το εμβαδόν είναι γνωστό. Στον διάλογο «Μένων» του Πλάτωνα (82a-85b), ο Σωκράτης παρουσιάζει σ' έναν δούλο ένα τετράγωνο με πλευρά 2 και εμβαδό 4. Στη συνέχεια προτρέπει τον δούλο να βρει την πλευρά ενός τετραγώνου με διπλάσιο εμβαδό. Μετά από δύο προσπάθειες επίλυσης του προβλήματος από τον δούλο, καταλήγουν μαζί ότι ένα τετράγωνο με διπλάσιο εμβαδό από το αρχικό τετράγωνο, θα έχει πλευρά τη διαγώνιο του αρχικού τετραγώνου. Σήμερα θα μπορούσαμε να συνοψίσουμε το γεωμετρικό πρόβλημα του διαλόγου ως εξής: Το σύμβολο $\sqrt{2}$ συμβολίζει τον αριθμό x που όταν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του, δίνει την τιμή 2. Οι Πυθαγόρειοι, με πρωτοστάτη τον Ίπασσο, γνώριζαν ότι η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι ασύμμετρο μέγεθος ως προς την πλευρά του, δηλαδή ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός, ο οποίος να είναι ίσος με τη διαγώνιο ενός τετραγώνου πλευράς 1. Επειδή, όμως, σύμφωνα με την κοσμοθεωρία τους, όλα τα μεγέθη μπορούσαν να γραφούν σε μορφή κλάσματος, απέκρυψαν το πρόβλημα, πνίγοντας τον Ίππασο, κι έτσι οι άρρητοι αριθμοί παρέμειναν άγνωστοι, μέχρι τον 19 αιώνα, όταν η ύπαρξή τους αποδείχθηκε από τους μαθηματικούς Dedekind και Cantor (1872). Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί προσπάθησαν να επιλύσουν το Δήλιο πρόβλημα, δηλαδή να υπολογίσουν την πλευρά ενός κύβου με ακμές μήκους 1 (ο διπλασιασμός του κύβου). Αυτό είχε ως αποτέλεσμα την επινόηση της τρίτης ή κυβικής ρίζας. Τον 9ο αιώνα, οι Ινδοί υποστήριξαν ότι η λύση μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού και η τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού, έχουν δύο τιμές και ότι η τετραγωνική ρίζα ενός αρνητικού αριθμού δεν μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός. Είναι σημαντικό, επίσης, να αναφέρουμε τις προόδους που έκαναν οι Κινέζοι, οι Άραβες και οι Πέρσες στην εξαγωγή των ριζών.

Οι αρχαίοι Έλληνες δεν γνώριζαν τους αρνητικούς αριθμούς γιατί οι γνώσεις τους προέρχονταν κυρίως από γεωμετρικά προβλήματα. Στην Ινδία ο λογισμός με αρνητικούς αριθμούς είχε προχωρήσει αλλά δεν έφτασε στην Ευρώπη γιατί οι Άραβες, που αποτέλεσαν τη γέφυρα ανάμεσα στην Ινδία και την Ευρώπη, αρνιόταν να δεχθούν τους αρνητικούς αριθμούς. Ο ιταλός πολυμαθής λόγιος Gerolamo Cardano το 1545 στο έργο του «Ars Magna» (Huguetan & Ravaud, 1663), έκανε την πρώτη συστηματική χρήση αρνητικών αριθμών στην Ευρώπη (τους ονόμασε «πλασματικούς»), για την επίλυση κυβικών και τεταρτοβάθμιων εξισώσεων. Ο Rafael Bombelli (1526–1572), Ιταλός μαθηματικός, χρησιμοποιούσε το σύμβολο R για να συμβολίσει τις ρίζες. Για παράδειγμα, ο συμβολισμός R.q.49 συμβόλιζε την τετραγωνική ρίζα του 49, όπου το R προέρχεται από τη λέξη root και το q από τη λέξη quadrata, ενώ ο συμβολισμός R.c.27 συμβόλιζε την κυβική ρίζα του 27, όπου το c προέρχεται από τη λέξη cubica. Στο βιβλίο του «Algebra» (1572), χρησιμοποιούσε το σύμβολο R(0m9), όπου το R συμβόλιζε τη ρίζα και το m το πρόσημο μείον. Έτσι, η έκφραση R(0m9) ήταν ισοδύναμη με τη σημερινή $\sqrt{-9}$, δηλ. με τον φανταστικό αριθμό 3i. Στα σημερινά διδακτικά βιβλία, οι φανταστικοί αριθμοί συνδέονται με τη θεωρία των δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Το 1629 Ο Albert Girard πρότεινε το σύμβολο $\sqrt[3]{\alpha}$, ενώ το 1690 ο Michel Rolle, στο έργο του «Traite d' Algebre» εισήγαγε το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Σήμερα, οι μαθητές των Ελληνικών σχολείων, διδάσκονται για πρώτη φορά την έννοια της τετραγωνικής ρίζας και των άρρητων αριθμών στη Β' Γυμνασίου. Οι διδακτικοί στόχοι είναι: Να μάθουν την έννοια της τετραγωνικής ρίζας και του συμβόλου $\sqrt{\alpha}$ με α≥0 και στη συνέχεια, να ανακαλύψουν ότι υπάρχουν και αριθμοί που δεν μπορούν να γραφούν με τη μορφή κλάσματος, οι οποίοι ονομάζονται άρρητοι, κι έτσι να γνωρίσουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Προκειμένου να κατανοήσουν την έννοια της τετραγωνικής ρίζας, καλούνται να ανακαλύψουν ποια πρέπει να είναι η πλευρά ενός σπιτιού σχήματος τετραγώνου, όταν το εμβαδόν του είναι 289 m^2. Συνεπώς, καλούνται να ανακαλύψουν ποιος αριθμός, εάν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του, δίνει αποτέλεσμα 289, δηλ. καλούνται να κάνουν την αντίστροφη πράξη της ύψωσης σε δύναμη. Το παράδειγμα είναι γεωμετρικό, και ως εκ τούτου, καμία αναφορά δεν γίνεται σε αρνητικούς αριθμούς. Στη συνέχεια, στην ενότητα στην οποία διδάσκονται οι άρρητοι αριθμοί, αναφέρεται ότι αυτοί μπορούν να είναι και αρνητικοί. Στην Α' Λυκείου, οι μαθητές γνωρίζουν για πρώτη φορά τις ρίζες μεγαλύτερης τάξης. Οι διδακτικοί στόχοι είναι να μάθουν τον ορισμό της ν-οστής ρίζας μη αρνητικού αριθμού (και μέσω αυτής τη δύναμη θετικού αριθμού με ρητό εκθέτη) και τις βασικές ιδιότητες των ριζών και των δυνάμεων. Προκειμένου να κατανοήσουν την έννοια της ν-οστής ρίζας μη αρνητικού αριθμού, αυτή τη φορά καλούνται να ανακαλύψουν ποια πρέπει να είναι η πλευρά μιας κυβικής δεξαμενής, χωρητικότητας 64 m^3. Το πρόβλημα είναι και πάλι γεωμετρικό και δεν γίνεται καμία αναφορά σε αρνητικούς αριθμούς. Μαθαίνουν ότι για να υπολογίσουν τη ν-οστή ρίζα, θα πρέπει να κάνουν την αντίστροφη πράξη της ύψωσης σε δύναμη και ότι η έννοια της ν-οστής ρίζας είναι ταυτόσημη με το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\ }$.

Οι μαθητές συναντούν αρκετά γνωστικά εμπόδια στην κατανόηση της έννοιας της ρίζας και των άρρητων αριθμών. Η έννοια της ρίζας, όμως, δεν διδασκόταν πάντα με τον ίδιο τρόπο. Μάλιστα, ακόμη και σήμερα, δεν παρουσιάζεται στα σχολικά βιβλία και δεν διδάσκεται παγκοσμίως με τον ίδιο τρόπο, όπως θα περίμενε κανείς.

Στην παρούσα έρευνα αναζητούνται οι διαφορετικοί τρόποι παρουσίασης της έννοιας της ν-οστής ρίζας, κυρίως όταν αυτή είναι περιττής τάξης, μέσα από τη βιβλιογραφία, Ελληνική και ξένη και διερευνώνται τα γνωστικά εμπόδια στην κατανόηση της έννοιας της ρίζας και οι πιθανές αιτίες (λανθασμένες αντιλήψεις, ασάφειες στα διδακτικά βιβλία, διδακτικές μέθοδοι). Πιο συγκεκριμένα, διερευνώνται:

- ✓ Τα γνωστικά εμπόδια των μαθητών Γ΄ Γυμνασίου, Λυκείου και φοιτητών Μαθηματικών Τμημάτων σχετικά με την έννοια της τετραγωνικής ρίζας και του συμβόλου $\sqrt{\ }$.

- ✓ Τα γνωστικά εμπόδια των μαθητών Λυκείου και φοιτητών Μαθηματικών Τμημάτων σχετικά με την έννοια της ν-οστής ρίζας και του συμβόλου $\sqrt[\nu]{\ }$, όπου ν: περιττός.
- ✓ Τα γνωστικά εμπόδια των μαθητών Λυκείου και φοιτητών Μαθηματικών Τμημάτων σχετικά με την έννοια του πεδίου ορισμού της συνάρτησης $\sqrt[\nu]{x}$, όπου ν: περιττός.
- ✓ Οι διαφορετικές ερμηνείες, οι παρανοήσεις και οι πιθανές αιτίες τους

Η μελέτη του θέματος, μπορεί να συμβάλει στην επανεξέταση της παρουσίασης των εννοιών των ριζών στα διδακτικά βιβλία.

Η έννοια της ρίζας στα ελληνικά σχολικά βιβλία Μαθηματικών

Όπως προκύπτει από μία σύγκριση των διδακτικών βιβλίων από τον 19ο αιώνα μέχρι σήμερα, υπάρχει διαφορά στον τρόπο έκφρασης των ριζών.

Στο βιβλίο «Στοιχειώδης Άλγεβρα» του Σ. Μανάρη (1862, 3η έκδοση) στη σελίδα 176, αναφέρονται τα εξής:

«Εκ τούτου συνάγομεν,

α. Πάσα ρίζα περιττού βαθμού πρέπει να έχη το αυτό σημείο της ποσότητος.

$\sqrt[3]{+8\alpha^3} = +2\alpha$, $\sqrt[3]{-8\alpha^3} = -2\alpha$.

β. Πάσα ρίζα αρτίου βαθμού θετικής ποσότητος δύναται να έχη αδιαφόρως το + ή -.

$\sqrt[4]{81\alpha^4\beta^8} = \pm 3\alpha\beta^2$»

Έτσι, ο μαθητής διδασκόταν ότι η ρίζα άρτιου βαθμού ενός θετικού αριθμού μπορεί να πάρει δύο τιμές, μία θετική και μία αρνητική.

Στο βιβλίο του «Άλγεβρα διά τας ανωτέρας τάξεις των Γυμνασίων» (1948) ο Χ. Μπαρμπαστάθης, ορίζει την τετραγωνική ρίζα να παίρνει δύο τιμές, μία θετική και μία αρνητική. Στη σελίδα 114 αναφέρονται:

«Γενικώς δε πρέπει να είναι:

1) $(\sqrt[\nu]{\alpha})^\mu = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ *(1)*

2) $(\sqrt[4]{16})^3 = \sqrt[4]{16^3}$. *Αλλά* $\sqrt[4]{16} = \pm 2$. *Ώστε είναι:* $(\sqrt[4]{16})^3 = (\pm 2)^3 = \pm 8$.

Εξ άλλου είναι $16^3 = (2^4)^3 = 2^{12}$. *Ώστε είναι:* $\sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = \pm 2^3 = \pm 8$.

3) $(\sqrt[4]{16})^2 = \sqrt[4]{16^2}$. *Αλλ' εις το παράδειγμα τούτο, το πρώτον μέλος ισούται με* $\pm 2^2 = 4$, *ενώ το δεύτερον μέλος ισούται με* $\sqrt[4]{16^2} = \sqrt[4]{2^8} = \pm 2^2 = \pm 4$.

Εκ των ανωτέρω λοιπόν παραδειγμάτων βλέπομεν, ότι η ισότης (1) δεν είναι τελεία. Διά να είναι τελεία η ισότητης αυτή, θα υποθέσομεν τον αριθμόν α πάντοτε θετικόν, και όταν η ρίζα είναι αρτίας τάξεως, οπότε θα έχη δύο τιμάς αντιθέτους, θα λαμβάνωμεν εξ αυτών υπ' όψιν μόνον την θετικήν.»

Στη σελίδα 115 του ίδιου βιβλίου, γίνεται αναφορά στις ρίζες αρνητικών αριθμών περιττής τάξης. Συγκεκριμένα αναφέρονται:

«136. Ρίζαι των αρνητικών αριθμών περιττής τάξεως.-

Επειδή $\sqrt[3]{-8} = -2$ *και* $-\sqrt[3]{8} = -2$

Έπεται, ότι $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$.

Ομοίως έχομεν $\sqrt[5]{-16} = -\sqrt[5]{16}$. *Ταύτα δε φανερώνουν, ότι τας ρίζας των αρνητικών αριθμών περιττής τάξεως δυνάμεθα να τας ανάγωμεν εις ρίζας της αυτής τάξεως των θετικών αριθμών.»*

Στο βιβλίο «Αριθμητική για τις κατώτερες τάξεις του Γυμνασίου» των Π. Τόγκα – Θ. Πασσά – Ν. Νικολάου (1962) στο 2ο κεφάλαιο, στη σελ. 212 δίνεται ο εξής ορισμός της τετραγωνικής ρίζας: *«Τετραγωνική ρίζα δοθέντος αριθμού λέγεται ο αριθμός, ο οποίος υψούμενος εις το τετράγωνον, δίδει τον δοθέντα. Ούτως η τετραγωνική ρίζα του 49 είναι το 7 διότι* $7^2 = 49$*»*. Δεν γίνεται καμία αναφορά στον αρνητικό αριθμό -7. Με μια γρήγορη ματιά σε ολόκληρο το βιβλίο, εύκολα κανείς μπορεί να διαπιστώσει ότι την εποχή εκείνη, στις κατώτερες τάξεις των Γυμνασίων δεν διδάσκονταν οι αρνητικοί αριθμοί. Μάλιστα στο πρώτο μέρος του βιβλίου με τον τίτλο «Οι ακέραιοι αριθμοί», ακέραιοι νοούνται μόνο οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

Από το 1950 μέχρι το 1970 περίπου, διδάσκονταν στις ανώτερες τάξεις του Γυμνασίου, το βιβλίο «Άλγεβρα» του Ν. Σακελλαρίου. Στην έκδοση του 1966, στη σελίδα 169 παρ. 140 αναφέρονται τα εξής:

«Πας θετικός αριθμός έχει δύο μεν ρίζας αρτίας τάξεως αντιθέτους, μίαν δε περιττής τάξεως (θετικήν). Διότι αφ' ενός μεν θετικός ή αρνητικός αριθμός υψούμενος εις αρτίαν δύναμιν δίδει εξαγόμενον θετικόν αριθμόν, ενώ αφ' ετέρου μόνον θετικός αριθμός υψούμενος εις περιττήν δύναμιν δίδει εξαγόμενον θετικόν αριθμόν. Εκ των δύο ριζών αρτίας τάξεως θετικού αριθμού, η θετική συμβολίζεται κατά συνθήκην με το οικείον ριζικόν άνευ προσήμου, η δε αρνητική με το αυτό ριζικόν έχον αριστερά το πρόσημον -. Ούτω, αν α είναι θετικός αριθμός, το σύμβολον $\sqrt{\alpha}$ σημαίνει η θετική τετραγωνική ρίζα του α. Η αρνητική τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με το -$\sqrt{\alpha}$.»

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, κάθε θετικός αριθμός έχει δύο τετραγωνικές ρίζες. Το σύμβολο, όμως, $\sqrt{\alpha}$ αντιπροσωπεύει μόνο τη θετική τετραγωνική ρίζα του α. Η αρνητική τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με το -$\sqrt{\alpha}$.

Συνεπώς, το σύμβολο $\sqrt{\alpha}$ και ο όρος τετραγωνική ρίζα δεν έχουν την ίδια ακριβώς σημασία, Στην ίδια σελίδα αναφέρονται τα εξής:

«Πας αρνητικός αριθμός έχει μόνον μίαν ρίζαν περιττής τάξεως, αρνητικήν, ουδεμίαν δε αρτίας τάξεως. Διότι μόνον αρνητικός αριθμός υψούμενος εις περιττήν δύναμιν δίδει εξαγόμενον αρνητικόν αριθμόν, ενώ ουδείς εκ των γνωστών αριθμών (θετικός ή αρνητικός) υψούμενος εις δύναμιν άρτιαν δίδει εξαγόμενον αρνητικόν αριθμόν.

Έστω π.χ. η $\sqrt[3]{-8}$. Αυτή είναι -2, διότι είναι $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$

Παρατηρούμεν όμως ότι είναι $\sqrt[3]{8} = 2$ διότι είναι $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Επομένως έχομεν $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$»

Από τα παραπάνω, γίνεται φανερό ότι η $\sqrt[3]{-8}$ ορίζεται και ισούται με -2. Στη συνέχεια δίνεται απλώς ένας δεύτερος τρόπος γραφής της ($-\sqrt[3]{8}$).

Στο βιβλίο «Μαθηματικά Δ' Γυμνασίου» των Βαβαλέτσκου – Μπούσγου (1972) στις σελίδες 116 και 117 αναφέρονται τα εξής:

«Π.χ. του αριθμού 25 μία τετραγωνική ρίζα είναι ο +5, διότι $(+5)^2 = 25$
του αριθμού 25 μία τετραγωνική ρίζα είναι ο -5, διότι $(-5)^2 = 25$
του αριθμού 8 μία τρίτη (κυβική) ρίζα είναι ο +2, διότι $(+2)^3 = 8$
του αριθμού -27 μία κυβική ρίζα είναι ο -3, διότι $(-3)^3 = -27$
Πας πραγματικός αριθμός α έχει 1) μίαν μόνην πραγματικήν νυοστήν ρίζαν x περιττής τάξεως (ν = 2κ+1) θετικήν ή αρνητικήν, καθ' όσον ο α είναι θετικός ή αρνητικός αντιστοίχως, ήτις καλείται πρωτεύουσα νυοστή ρίζα του α, 2) δύο πραγματικάς νυοστάς ρίζας αντιθέτους αρτίας τάξεως (ν = 2κ), αν ο α > 0, εκ των οποίων η θετική καλείται πρωτεύουσα νυοστή ρίζα του α και 3) ουδεμίαν πραγματικής νυοστήν ρίζαν αρτίας τάξεως, αν α < 0). Την πρωτεύουσαν νυοστήν ρίζαν του α συμοβολίζομεν $\sqrt[\nu]{\alpha}$.»

Κατόπιν συνοψίζοντας, αναφέρονται τα εξής:

«Εάν α > 0 και ν ∈ Ν, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha} > 0$, ρητός ή άρρητος.
Εάν α < 0 και ν = 2κ+1, κ ∈ Ν, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha} < 0$, ρητός ή άρρητος.
Εάν α < 0 και ν = 2κ, τότε το σύμβολον $\sqrt[\nu]{\alpha}$ δεν έχει έννοιαν πραγματικού αριθμού.
Εάν α ∈ R και ν = 2κ, εκ των ανωτέρω συνάγεται ότι $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$, εάν δε ν = 2κ+1, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha = (\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu$».

Άρα, και σ' αυτό το βιβλίο, όπως φαίνεται και από τα παραδείγματα που παρατίθενται στη σελίδα 117, η $\sqrt[3]{-27}$ ορίζεται και ισούται με -3 και η $\sqrt[4]{16}$ ισούται με 2, ενώ το 16 έχει δύο ρίζες 4^{ης} τάξης, το 2 και το -2. Άρα, η έννοια της ρίζας ν-οστής τάξης και το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$ δεν ταυτίζονται.

Στο βιβλίο «Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου» (1978) των Μπούσγου – Ταμβακλή, στο 4ο κεφάλαιο δίνεται ο ορισμός της ν-οστής ρίζας ως εξής:

«Για κάθε πραγματικό θετικό αριθμό β και για κάθε φυσικό ν υπάρχει ένας και μόνο ένας πραγματικός θετικός, έστω α, με την ιδιότητα: η ν-οστή δύναμη του α να είναι ο β, δηλαδή με την ιδιότητα αν = β και συμβολίζεται $\sqrt[\nu]{\beta}$.»

Στη συνέχεια, στη σελίδα 68, γίνεται αναφορά στις ρίζες περιττής τάξης αρνητικών αριθμών. Συγκεκριμένα, αυτές ορίζονται ως εξής: *«Για κάθε πραγματικό αρνητικό αριθμό β και για κάθε περιττό φυσικό ν, υπάρχει ένας και μόνο ένας, πραγματικός αρνητικός α, ώστε να ισχύει: $\alpha^\nu = \beta$»*. Στα παραδείγματα δίνεται ότι $\sqrt[3]{-8}$ = -2.

Από το 1979 έως το 1989 στην Α’ Λυκείου διδάσκεται το βιβλίο «Μαθηματικά Α’ Λυκείου – Άλγεβρα» των Ν. Βαρουχάκη, Λ. Αδαμόπουλου, Ν. Αλεξανδρή, Δ. Παπακωνσταντίνου και Α. Παπαμικρούλη. Στη σελίδα 128, το Θεώρημα 3 αναφέρει: *«Για κάθε πραγματικό αριθμό α ≥0 υπάρχει ένας μοναδικός x ≥0 τέτοιος ώστε χ^ν = α. Ο μη αρνητικός αυτός αριθμός συμβολίζεται $\sqrt[\nu]{\alpha}$. Τονίζεται ότι το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$ έχει νόημα μόνο όταν α ≥ 0 και με αυτή τη σημασία θα χρησιμοποιείται στα επόμενα»*.

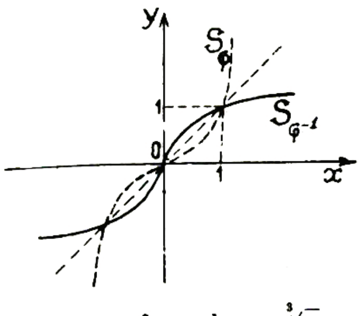
Παράλληλα, την ίδια εποχή οι μαθητές της Γ’ Λυκείου διδάσκονται ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x) = $\sqrt[3]{x}$ είναι όλο το R. Για παράδειγμα στη σελίδα 30 του βιβλίου «Μαθηματικά Γ’ Λυκείου» του Β. Στάικου που διδάσκεται στη Γ’ Λυκείου από το 1976 μέχρι και το 1982, αναφέρεται:

«*1. Η πραγματική συνάρτηση φ με $\varphi(x)=x^3$ είναι, όπως γνωρίζουμε, γνησίως αύξουσα, άρα και η αντίστροφη αυτής συνάρτηση φ^{-1} της οποίας ο τύπος είναι y=$\sqrt[3]{x}$ είναι επίσης γνησίως αύξουσα και μάλιστα το διάγραμμα αυτής (βλ. Σχ. 31) είναι συμμετρικό, ως προς τη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων, του διαγράμματος της φ.*

2. Γενικότερα, η συνάρτηση f με $f(x)=x^{2\nu+1}$ (ν φυσικός αριθμός) είναι γνησίως αύξουσα, γιατί για οποιαδήποτε x_1, x_2

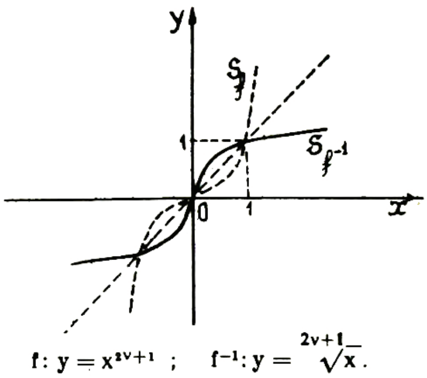
$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{2\nu+1} < x_2^{2\nu+1} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Παρόμοια και η αντίστροφη f^{-1} αυτής, της οποίας ο τύπος είναι $f^{-1}(x) = \sqrt[2\nu+1]{x}$ είναι επίσης γνησίως αύξουσα. Τα διαγράμματα των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι βέβαια συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων (βλ. Σχ. 32)».



$\varphi: y=x^3$; $\varphi^{-1}: y=\sqrt[3]{x}$.

Σχ. 31



$f: y = x^{2\nu+1}$; $f^{-1}: y = \sqrt[2\nu+1]{x}$.

Σχ. 32

Παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\sqrt[3]{x}$ και $\sqrt[2\nu+1]{x}$ βρίσκονται τόσο στο 1ο τεταρτημόριο (όπου x≥0) όσο και στο 3ο τεταρτημόριο (όπου x<0). Συνεπώς είναι ξεκάθαρο ότι ο συγγραφέας θεωρεί ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x) = $\sqrt[2\nu+1]{x}$ είναι όλο το R.

Συνεπώς, από το 1976 μέχρι και το 1982, άλλα διδάσκονταν οι μαθητές της Α’ Λυκείου και άλλα οι μαθητές της Γ’ Λυκείου!

Στο βιβλίο «Μαθηματικά Γ’ Λυκείου – Ανάλυση» που διδάσκεται στη Γ’ Λυκείου από το 1983 έως το 1992 δεν υπάρχουν παραδείγματα συναρτήσεων της μορφής $\sqrt[2\nu+1]{x}$ (με εξαίρεση δύο ασκήσεις στις οποίες, όμως, το υπόρριζο είναι μία παράσταση υψωμένη στο τετράγωνο, άρα θετική). Μόνο στην άσκηση 18 στη σελ. 27 ζητείται να βρεθεί, αν υπάρχει, η αντίστροφη της φ(x) = x^3 και στις απαντήσεις και υποδείξεις στο τέλος του βιβλίου δίνεται η απάντηση:

$$\varphi^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, \text{ αν } x \geqslant 0 \\ -\sqrt[3]{|x|}, \text{ αν } x < 0 \end{cases}$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι, σύμφωνα με τους συγγραφείς του βιβλίου, η συνάρτηση $\sqrt[3]{x}$ ορίζεται για x ≥ 0. Παράλληλα, όμως, οι περισσότεροι μαθηματικοί των σχολείων και των φροντιστηρίων της εποχής εκείνης, διδάσκουν και μελετούν τη συνάρτηση $\sqrt[2\nu+1]{x}$ με πεδίο ορισμού όλο το R. Τη διδάσκουν ως ένα από τα κλασικά παραδείγματα περιττής συνάρτησης.

Λόγω της σύγχυσης που επικρατούσε, το Κ.Ε.Μ.Ε. (Κέντρο Εκπαιδευτικών Μελετών και Επιμόρφωσης, το σημερινό Ι.Ε.Π.) το 1988 εξέδωσε την εξής οδηγία:

«Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x) = $\sqrt[\nu]{\varphi(x)}$ είναι το A = {x ∈ R : φ(x) ≥ 0 }, είτε το ν είναι άρτιος, είτε περιττός.

Με την ευκαιρία θυμίζουμε ότι το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\ }$ το χρησιμοποιούμε με υπόρριζο μη αρνητικό (π.χ. για την κυβική ρίζα του -2 προτιμούμε τη γραφή $-\sqrt[3]{2}$ αντί του $\sqrt[3]{-2}$). Και τούτο για να μπορούμε να χρησιμοποιούμε τους κανόνες λογισμού των δυνάμεων χωρίς φόβο να κάνουμε λάθος. Αντίθετα αν π.χ. γράψουμε -1 = $\sqrt[3]{-1}$ = (-1)1/3, επειδή 1/3=2/6 θα έχουμε:

$-1 = \sqrt[3]{-1} = (-1)^{1/3} = (-1)^{2/6} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1$ δηλ. -1 = 1!»

Οι οδηγίες του Κ.Ε.Μ.Ε. δημιούργησαν σύγχυση στους μαθηματικούς και έρχονταν σε αντίθεση με την εδραιωμένη, μέχρι τότε, γνώση τους. Μαθηματικός Λυκείου, εκείνη την εποχή (1988), σύμφωνα με τον ορισμό της ν-οστής ρίζας στο βιβλίο της Α' Λυκείου, στην ερώτηση «Υπάρχει η $\sqrt[3]{-8}$;» απάντησε ότι δεν ορίζεται, ενώ για τη συνάρτηση f (x) = $\sqrt[2k+1]{x}$ αρνήθηκε να δεχθεί ότι έχει πεδίο ορισμού το R^+, ισχυριζόμενος ότι εάν γίνει η μελέτη της συνάρτησης στο R^+, θα χαθούν ορισμένες βασικές ιδιότητές της.

Το βιβλίο «Μαθηματικά Γ' Λυκείου – Ανάλυση» (1992) εναρμονίζεται πλήρως με τις παραπάνω οδηγίες. Συγκεκριμένα στην άσκηση 2ii στη σελίδα 17 ζητείται το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x) = $\sqrt[3]{x-2}$ και στις υποδείξεις-απαντήσεις υποδεικνύεται η απάντηση [2,+∞). Επίσης, στη σελίδα 41 του ίδιου βιβλίου, ορίζεται ως αντίστροφη της f(x) = x^3, η

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, \text{ αν } x \geqslant 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, \text{ αν } x < 0 \end{cases}$$

Από το 1990 έως σήμερα στην Α' Λυκείου διδάσκεται το βιβλίο «Μαθηματικά Α' Λυκείου – Άλγεβρα» των Ανδρεαδάκη, Κατσαργύρη, Παπασταυρίδη, Πολύζου. και Σβέρκου. Από το 1990 έως σήμερα έχουν γίνει ορισμένες επανεκδόσεις του, ώστε να προσαρμόζεται στο εκάστοτε αναλυτικό πρόγραμμα. Σύμφωνα με το βιβλίο, η $\sqrt[2\nu+1]{x}$ ορίζεται για x ≥ 0.

Τέλος, στο βιβλίο «Μαθηματικά Γ΄ Ενιαίου Λυκείου» έκδοση Ο.Ε.Δ.Β. (1999) των Ανδρεαδάκη, Κατσαργύρη, Μέτη, Μπρουχούτα, Παπασταυρίδη και Πολύζου, του οποίου μία από τις επανεκδόσεις διδάσκεται έως σήμερα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x) = $\sqrt[\nu]{\varphi(x)}$ είναι το A = { x ∈ R : φ(x) ≥ 0 }, είτε το ν είναι άρτιος, είτε περιττός.

Η έννοια της ρίζας στα ξενόγλωσσα βιβλία Μαθηματικών

Στο βιβλίο «Elementary Algebra» των D. Faddeyev και I. Sominskii (Νέα Υόρκη, 1965) στη σελίδα 209 αναφέρεται ο εξής ορισμός της τετραγωνικής ρίζας: *«Η ν-οστή ρίζα ενός αριθμού α είναι ένας αριθμός x του οποίου η ν-οστή δύναμη ισούται με το α. Π.χ. το 2 είναι η 5ης τάξης ρίζα του 32 αφού 2^5=32. Όταν ν=2 τότε η ρίζα καλείται τετραγωνική και όταν ν=3 τότε καλείται κυβική ρίζα. Ο υπολογισμός της ρίζας είναι η αντίστροφη πράξη της ύψωσης σε δύναμη. Η ν-οστή ρίζα ενός αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$».* Στον ορισμό δεν γίνεται καμία αναφορά σε αρνητικούς αριθμούς. Στην ίδια σελίδα, στις ασκήσεις που ακολουθούν, ζητείται ο υπολογισμός της $\sqrt{4}$ και στις απαντήσεις δίνεται η απάντηση 2. Στη σελίδες 226-227, υπάρχει το εξής θεώρημα: *«Μία ρίζα περιττής τάξης ενός αρνητικού αριθμού δεν έχει περισσότερες από μία τιμές και αυτή είναι μόνο αρνητική.*

Έτσι, $\sqrt[3]{-27}$ = -3». Άρα, σύμφωνα με τον συγγραφέα, οι νιοστές ρίζες περιττής τάξης αρνητικών αριθμών ορίζονται και είναι ίσες με κάποιον αρνητικό αριθμό. Στη συνέχεια υπάρχει το θεώρημα: *«Εάν υπάρχει μια τιμή της ρίζας άρτιας τάξης ενός θετικού αριθμού, τότε υπάρχει μία και μόνο μία ακόμη, η οποία διαφέρει από την πρώτη μόνο στο πρόσημό της. Έτσι, η* $\sqrt[4]{16}$ *έχει δύο τιμές, τις 2 και -2 αφού* $2^4 = (-2)^4 = 16$*.»*

Στο βιβλίο «Algebra» των Jonson, Lendsey, Slesnick (Βοστώνη, 1967) αναφέρεται: *«Κάθε θετικός πραγματικός αριθμός έχει δύο τετραγωνικές ρίζες, καθεμιά απ' αυτές είναι η αντίθετη ή η αρνητική της άλλης. Για παράδειγμα, το 49 έχει δύο τετραγωνικές ρίζες, το 7 και το -7. Το σύμβολο* $\sqrt{\ }$ *χρησιμοποιείται για να εκφράσει την μη-αρνητική τετραγωνική ρίζα του αριθμού. Έτσι,* $\sqrt{4} = 2$ *ενώ* $-\sqrt{4} = -2$*.»* Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ο όρος «Τετραγωνική ρίζα» και το σύμβολο $\sqrt{\ }$ δεν έχουν, σύμφωνα με τους συγγραφείς, ακριβώς την ίδια σημασία. Στη σελίδα 459 του ίδιου βιβλίου, οι ρίζες περιττής τάξης αρνητικών αριθμών, ορίζονται ως εξής: *«Για κάθε ακέραιο ν >1, κάθε θετικός πραγματικός αριθμός α έχει μία μοναδική ν-οστή ρίζα. Αν ο ν είναι περιττός, έχει μία μοναδική αρνητική ν-οστή ρίζα. Π.χ.* $\sqrt[3]{125} = 5$ *και* $\sqrt[3]{-125} = -5$*.»*

Στο γερμανικό βιβλίο « Mathematics at a Glance» (1975, στη σελίδα 51 υπάρχουν οι εξής ορισμοί:

«Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α ορίζεται ως ο μη αρνητικός αριθμός x του οποίου το τετράγωνο είναι το α: $x^2 = α$*.*

Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού β είναι ο μη αρνητικός αριθμός α, του οποίου η ν-οστή δύναμη έχει την τιμή β: $α^ν = β$*.*

Η εξίσωση $x^2 = 4$ *έχει δύο λύσεις, την x = 2 και την x = -2.*

Η ρίζα $\sqrt[ν]{β} = α$ *είναι μοναδικά ορισμένη. Για άρτιο ν οι δύο λύσεις της εξίσωσης* $χ^ν = β$ *έχουν διαφορετικό πρόσημο. Η εξίσωση* $x^3 = -8$ *έχει λύση την x = -2.*

Αφού στον ορισμό υποθέσαμε ότι το υπόρριζο πρέπει να είναι αριθμός μη αρνητικός, μπορούμε να θέσουμε $x = -\sqrt[3]{8}$*. Επειδή ο συμβολισμός* $x = \sqrt[3]{-8}$ *χρησιμοποιείται για τη λύση της εξίσωσης* $x^3 = -8$*, συμφωνούμε σιωπηλά τα εξής: Για περιττό ν, η ρίζα ενός αρνητικού αριθμού είναι η αντίθετη της ρίζας της απόλυτης τιμής του».*

Από τα παραπάνω, φαίνεται ότι οι συγγραφείς αναφέρουν αρνητική υπόρριζη ποσότητα, όταν η ρίζα είναι περιττής τάξης, αλλά συμφωνούν σιωπηλά να συμβολίζεται με τον αντίθετο της ν-οστής ρίζας της απόλυτης τιμής της υπόρριζης ποσότητας.

Στη σελίδα 131 του ίδιου βιβλίου, αναφέρονται τα εξής για τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}$:

«Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *ορίζεται μόνο για μη αρνητικούς αριθμούς. Στο πεδίο ορισμού της* $[0, +\infty)$ *είναι η αντίστροφη της συνάρτησης* $y = x^3$ *με* $y \geq 0$*, απ' όπου προκύπτει ότι και* $x \geq 0$*. Το διάγραμμά της, μπορεί επίσης να σχεδιαστεί, παίρνοντας το συμμετρικό της μισής παραβολής* $y = x^3$ *με* $x \in [0, +\infty)$ *ως προς την ευθεία y = x. Από την άλλη μεριά, η αντίστροφη συνάρτηση της* $y = x^3$ *με* $y \leq 0$*, απ' όπου προκύπτει ότι και* $x \leq 0$*, περιγράφεται από την εξίσωση:* $y = \sqrt[3]{-x}$ *με πεδίο ορισμού το* $(-\infty, 0]$*. Συνεπώς, δύο εξισώσεις χρειάζονται για να περιγράψουμε την αντίστροφη της συνάρτησης* $y = x^3$ *η οποία πρέπει να υπάρχει γιατί η* $y = x^3$ *είναι συνάρτηση 1-1.» Άρα, η αντίστροφη της f(x) = x3, είναι η:*

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & αν\ x \geqslant 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & αν\ x < 0 \end{cases} »$$

Στην έκδοση του 1976 (New Jersey) του βιβλίου «Mathematics For Technical Education» των D. Ewen και M. Topper, η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού, π.χ. του 36 αποδεικνύεται ότι ισούται με 6 (και όχι με ±6) ως εξής:

«Από την αρχή της αντικατάστασης, ξέρουμε ότι: αν P = Q και P = R τότε και Q = R. Εφαρμόζοντας αυτή την αρχή στην $\sqrt{36}$*, αν* $\sqrt{36} = 6$ *και* $\sqrt{36} = -6$ *τότε θα έπρεπε να δεχθούμε και ότι 6 = -6, πράγμα άτοπο. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε την τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α (γράφοντας* $\sqrt{α}$*) σαν εκείνο τον μη αρνητικό αριθμό, ο οποίος αν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του, να μας δίνει τον αριθμό α.»*

Στο ίδιο βιβλίο, για τις ρίζες $\sqrt[2κ+1]{α}$ δίνονται τα εξής παραδείγματα:

$\sqrt[3]{-125} = -5$ *διότι (-5).(-5).(-5) = -125*

$\sqrt[3]{-27}$ = -3 διότι (-3)·(-3)·(-3) = -27 κ.τ.λ.

Άρα, σύμφωνα με το εν λόγω βιβλίο, μία αρνητική υπόρριζη ποσότητα είναι αποδεκτή για τις ρίζες περιττής τάξης.

Τέλος, στο βιβλίο «Algebra Review» (Νέα Υόρκη, 1978) των C. Denlinger και E. Jacobson στην παράγραφο 2.2 Roots and Radicals (σελ. 22) η έννοια της ρίζας αποδίδεται ως εξής: *«Ένας αριθμός r καλείται τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού a αν r^2 = a και το r καλείται κυβική ρίζα του a αν r^3 = a. Γενικά, αν n είναι ένας θετικός ακέραιος τότε το r καλείται n-οστή ρίζα του a αν r^n = a. Κάθε θετικός αριθμός έχει δύο τετραγωνικές ρίζες, που η μία είναι η αντίθετη της άλλης. Για παράδειγμα, το 5 και το -5 είναι τετραγωνικές ρίζες του 25 αφού $(5)^2$ = 25 και $(-5)^2$ = 25. Οι αρνητικοί αριθμοί δεν έχουν τετραγωνικές ρίζες. Κάθε πραγματικός αριθμός έχει ακριβώς μία πραγματική κυβική ρίζα. Για παράδειγμα:*
Το 2 είναι η κυβική ρίζα του 8 αφού 2^3 = 8
Το -3 είναι η κυβική ρίζα του -27 αφού $(-3)^3$ = 27
Γενικά, ένας θετικός αριθμός έχει μία ακριβώς μία θετική n-οστή ρίζα όταν ο n είναι άρτιος και ακριβώς μία πραγματική n-οστή ρίζα όταν ο n είναι περιττός. Η n-οστή ρίζα συμβολίζεται με το σύμβολο $\sqrt[n]{\alpha}$ το οποίο ονομάζεται ριζικό.» Στη σελίδα 23 του βιβλίου παρατίθενται παραδείγματα, μεταξύ των οποίων και το $\sqrt[3]{-8}$ = -2. Στην ίδια σελίδα παρατίθενται οι κανόνες για τις πράξεις μεταξύ ριζικών, αναφέροντας ότι ισχύουν για θετικούς αριθμούς x, y:

$\sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x$

$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$

$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$

Στον ιστότοπο του Whatcom College (Washington), στο φύλλο Roots of Real Numbers (σελ. 3) δίνεται ο ορισμός της κυβικής ρίζας ως εξής: *«Κυβική ρίζα ενός αριθμού είναι ένας αριθμός που όταν πολλαπλασιάζεται τρεις φορές με τον εαυτό του, δίνει τον αρχικό αριθμό. Επιπλέον, δηλώνουμε μια κυβική ρίζα χρησιμοποιώντας το σύμβολο $\sqrt[3]{\ }$».* Στη συνέχεια, στην ίδια σελίδα, δίνεται το παράδειγμα: $\sqrt[3]{-8}$ = -2 διότι (-2)·(-2)·(-2) = -8.

Στον ιστότοπο OpenStax του Rice University (Χιούστον, Τέξας) στην ενότητα Higher roots (Elementary Algebra 2e) ο ορισμός της n-οστής ρίζας ενός αριθμού α δίνεται ως εξής: Αν b^n=a, τότε το b είναι μία n-οστή ρίζα του αριθμού a. Η πρωτεύουσα n-οστή ρίζα του αριθμού a συμβολίζεται με $\sqrt[n]{a}$. Όταν το n είναι περιττός αριθμός, τότε η $\sqrt[n]{a}$ είναι πραγματικός αριθμός για όλες τις τιμές του α. Ως παράδειγμα, αναφέρεται η $\sqrt[5]{-32}$ = -2.

Στο ιστότοπο του College of Mathematics & Science του University of Central Oklahoma, στο ηλεκτρονικό βιβλίο COLLEGE ALGEBRA-UCO Adaption 1st edition (σελ. 36) αναφέρεται: Η n-οστή ρίζα του a είναι ένας αριθμός που, όταν υψωθεί στην n-οστή δύναμη, δίνει το a. Για παράδειγμα, το −3 είναι η 5η ρίζα του −243 επειδή $(-3)^5$ = −243. Εάν το a είναι ένας πραγματικός αριθμός με τουλάχιστον μία n-οστή ρίζα, τότε η πρωτεύουσα n-οστή ρίζα του a είναι ο αριθμός με το ίδιο πρόσημο με το a, ώστε όταν υψώνεται στην n-οστή δύναμη, να ισούται με το a. Ακολουθούν διάφορα παραδείγματα, μεταξύ των οποίων και το $\sqrt[5]{-32}$ = -2

Στον ιστότοπο CK12 Foundation, στην ενότητα Graphing Cubed Root Functions αναφέρεται: Μπορούμε να υπολογίσουμε την κυβική ρίζα ενός αρνητικού αριθμού, επομένως, η συνάρτηση y = $\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}$ ορίζεται για όλες τις τιμές του x. Στη συνέχεια παραθέτει τη γραφική παράστασή της στο 1ο και 3η τεταρτημόριο.

Στα Διεθνή Πρότυπα ISO (31-11:1992, 80000-2:2009 και 80000-2:2019) η τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με: $α^{1/2}$ και $\sqrt{\alpha}$, ενώ η n-οστή ρίζα του α συμβολίζεται με: $α^{1/n}$ και $\sqrt[n]{\alpha}$. (Μόνο στο 31-11:1992 υπήρχαν επιπλέον και οι συμβολισμοί √α και ⁿ√α οι οποίοι παραλήφθηκαν στα πρότυπα του 2009 και 2019 και στις παρατηρήσεις αναφέρεται ότι πρέπει να αποφεύγονται). Στις παρατηρήσεις και των τριών Προτύπων, για τα σύμβολα

$\sqrt{\alpha}$ *και* $\sqrt[n]{\alpha}$ αντίστοιχα, αναφέρονται: *«If α≥0, then* $\sqrt{\alpha}$*≥0» και «If α≥0, then* $\sqrt[n]{\alpha}$*≥0»*, χωρίς να διευκρινίζεται εάν η $\sqrt[n]{\alpha}$ ορίζεται και για α<0.

Μεθοδολογία της έρευνας

Για τις ανάγκες της έρευνας, τον Οκτώβριο του 1988, ζητήθηκε από 245 μαθητές Λυκείου στην περιοχή της Θεσσαλονίκης και από 36 φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος του ΑΠΘ, να απαντήσουν σε 3 απλές ερωτήσεις που αφορούσαν τα σύμβολα $\sqrt{\ }$ και $\sqrt[\nu]{\ }$. Στις ίδιες ερωτήσεις, τον Απρίλιο του 2021, απάντησαν 345 μαθητές Λυκείου (138 της Α’ Λυκείου, 110 της Β’ Λυκείου και 97 της Γ’ Λυκείου) στην περιοχή της Θεσσαλονίκης και 68 φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος (του ΑΠΘ και του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας). Επίσης, το 2021, στην 1η ερώτηση (σχετικά με το σύμβολο $\sqrt{\ }$), απάντησαν και 84 μαθητές της Γ’ Γυμνασίου. Το 1988 το ερωτηματολόγιο διανεμήθηκε σε έντυπη μορφή, τόσο στους μαθητές, όσο και στους φοιτητές. Το 2021 το ερωτηματολόγιο συμπληρώθηκε μέσω διαδικτύου (google form).

Οι ερωτήσεις του ερωτηματολογίου ήταν οι εξής:

Ποια είναι η $\sqrt{16}$ (τετραγωνική ρίζα του 16)

α) 4 β) 4 και -4 γ) -4 δ) δεν γνωρίζω

Ποια είναι η $\sqrt[3]{-8}$ (κυβική ρίζα του -8)

α) 2 και -2 β) Δεν υπάρχει γ) -2 δ) δεν γνωρίζω

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (x) = $\sqrt[3]{\mathrm{x}}$

Α) Από 0 έως +∞ β) Από -∞ έως 0 γ) Από -∞ έως +∞ δ) δεν γνωρίζω

Για τη στατιστική ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν: το Microsoft Excel για τον υπολογισμό των όλων των σχετικών συχνοτήτων (%) και online προγράμματα στατιστικής επεξεργασίας (https://www.icalcu.com/ και https://www.socscistatistics.com/tests/ για την πραγματοποίηση ελέγχων ανεξαρτησίας και συσχετίσεων των απαντήσεων).

Για την αναζήτηση πιθανών συσχετίσεων μεταξύ των μεταβλητών της έρευνας, έγιναν οι εξής κωδικοποιήσεις:

Εκπαιδευτική βαθμίδα: 1: Μαθητής Λυκείου 2: Φοιτητής Μαθηματικού Τμήματος

Απαντήσεις στην 1η ερώτηση: 0: «4 και -4» 1: «4»

Απαντήσεις στη 2η ερώτηση: 0: «Δεν ορίζεται» 1: «-2» -1: άλλη απάντηση

Απαντήσεις στην 3η ερώτηση: 0: «Από 0 έως +∞» 1: «Από -∞ έως +∞» -1: άλλη απάντηση

Εμπειρική έρευνα: Βαθμός κατανόησης του ορισμού των συμβόλων $\sqrt{\ }$ και $\sqrt[\nu]{\ }$ από μαθητές και φοιτητές Μαθηματικού Τμήματος

Οι απαντήσεις των μαθητών και φοιτητών το 1988

Στην 1η ερώτηση «Ποια είναι η $\sqrt{16}$» το 57,96% των μαθητών όλων των τάξεων του Λυκείου [95% δ.ε.: (51,78%, 64,14%)] έδωσε τη λανθασμένη απάντηση «4 και -4» (Α΄ Λυκείου 59,82%, Β’ Λυκείου 57,95% και Γ’ Λυκείου: 53,33%), ενώ απάντησε σωστά το 42,97%. Αντίθετα, οι φοιτητές/τριες του Μαθηματικού Τμήματος απάντησαν σωστά σε ποσοστό 63,89% [95% δ.ε.: (48,20%, 79,58%)], ποσοστό που θα περίμενε, όμως, κανείς να είναι σημαντικά υψηλότερο.

Στη 2η ερώτηση «Ποια είναι η $\sqrt[3]{-8}$» το 72,65% των μαθητών όλων των τάξεων του Λυκείου [95% δ.ε.: (67,07%, 78,23%)] απάντησε «Δεν ορίζεται» (Α΄ Λυκείου 80,36%, Β’ Λυκείου 71,59% και Γ’ Λυκείου: 55,56%). Αντίθετα, οι φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος έδωσαν την απάντηση «-2» σε ποσοστό 77,78% [95% δ.ε.: (64,20%, 91,36%)], ενώ το 19,44% απάντησε «Δεν ορίζεται». Υπάρχει χαμηλή θετική συσχέτιση μεταξύ της εκπαιδευτικής βαθμίδας (Λύκειο / Πανεπιστήμιο) και της απάντησης στη 2η ερώτηση (Sig.=.000, r_s= .369, p<.01).

Στην 3η ερώτηση «Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (x) = $\sqrt[3]{x}$» το 57,55% των μαθητών όλων των τάξεων του Λυκείου [95% δ.ε.: (51,36%, 63,74%)] απάντησε «Από 0 έως +∞» δηλ. το R^+ (Α΄ Λυκείου 54,46%, Β’ Λυκείου 59,09% και Γ’ Λυκείου: 62,22%). Αντίθετα, οι φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος έδωσαν την απάντηση «Από -∞ έως +∞» δηλ. όλο το R σε ποσοστό 75% [95% δ.ε.: (60,85%, 89,15%)], ενώ το 19,44% απάντησε «Δεν ορίζεται». Φαίνεται ότι υπάρχει ασθενής θετική συσχέτιση μεταξύ της εκπαιδευτικής βαθμίδας και της απάντησης στην 3η ερώτηση (Sig.=.000, r_s= .243, p<.01).

Στη 2η και την 3η ερώτηση, οι περισσότεροι από τους μαθητές του δείγματος απάντησαν σύμφωνα με τον ορισμό της ν-οστής ρίζας που δίνεται στο διδακτικό βιβλίο της Α' Λυκείου και την οδηγία του Κ.Ε.Μ.Ε. που είχε ήδη σταλεί στα σχολεία. Βέβαια, δεν είναι αμελητέο το ποσοστό των μαθητών, ιδίως της Γ' Λυκείου, που απάντησαν ότι η $\sqrt[3]{-8}$ = -2 και ότι το πεδίο ορισμού της f(x) = $\sqrt[3]{x}$ είναι όλο το R. Οι 3 στους 4 φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος απάντησαν ότι υπάρχει η $\sqrt[3]{-8}$ και ισούται με -2 και ότι το πεδίο ορισμού της f(x) = $\sqrt[3]{x}$ είναι όλο το R, καθώς είχαν διδαχθεί της έννοια της ρίζας πριν δοθεί η οδηγία του Κ.Ε.Μ.Ε., όταν στα σχολεία και τα φροντιστήρια εκείνης της εποχής, διδάσκονταν ότι η $\sqrt[3]{x}$ ορίζεται και για x < 0 και ισούται με έναν αρνητικό αριθμό.

Οι απαντήσεις στην 1η ερώτηση είναι ανεξάρτητες από την τάξη στην οποία βρίσκονται οι μαθητές: X^2 (2, *N* = 245) = 0.5546, p = .757831. Φαίνεται να υπάρχει σχέση ανάμεσα στις απαντήσεις των μαθητών στη 2η ερώτηση και στην τάξη στην οποία βρίσκονται: X^2 (4, *N* = 245) = 13.2242, p = .010231. Οι μαθητές της Α' και Β' Λυκείου, πιθανόν επηρεασμένοι από τον ορισμό της ν-οστής ρίζας που δίνεται στο διδακτικό βιβλίο της Α' Λυκείου, δίνουν οι περισσότεροι την απάντηση «Δεν ορίζεται». Αντίθετα, οι μαθητές της Γ' Λυκείου δίνουν και τις δύο απαντήσεις («Δεν ορίζεται» και «-2») χωρίς μεγάλη ποσοστιαία διαφορά, γεγονός που μπορεί να οφείλεται και στη σύγχυση που υπήρχε εκείνη την εποχή στα διδακτικά βιβλία και στους διδάσκοντες μαθηματικούς. Σχέση φαίνεται να υπάρχει και ανάμεσα στις απαντήσεις των μαθητών στην 3η ερώτηση και στην τάξη στην οποία βρίσκονται: X^2 (4, *N* = 245) = 20.7254, p = .000358. Οι μαθητές της Β' και Γ' Λυκείου φαίνεται να γνωρίζουν καλύτερα την έννοια του πεδίου ορισμού συνάρτησης από τους μαθητές της Α' Λυκείου, οι οποίοι δεν απάντησαν σε ποσοστό 14,29%.

Τέλος, υπάρχει υψηλή θετική συσχέτιση (Sig.=.000, r_s= .708, p<.01) ανάμεσα στις απαντήσεις που έδωσαν οι φοιτητές στη 2η και την 3η ερώτηση. Στο δείγμα μας, σε ποσοστό 96,97%, είτε απάντησαν ότι $\sqrt[3]{-8}$ =-2 και ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (x) = $\sqrt[3]{x}$ είναι το R (78,79%), είτε απάντησαν ότι η $\sqrt[3]{-8}$ δεν υπάρχει και ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (x) = $\sqrt[3]{x}$ είναι το R^+ (18,18%). Μόνο ένα 3,03% έδωσε κάποιον άλλο συνδυασμό απαντήσεων.

Οι απαντήσεις των μαθητών και φοιτητών το 2021

Στην 1η ερώτηση «Ποια είναι η $\sqrt{16}$» το 72,75% των μαθητών όλων των τάξεων του Λυκείου [95% δ.ε.: (68,06%, 77,45%)] έδωσε τη σωστή απάντηση «4» (Α΄ Λυκείου 75,36%, Β' Λυκείου 74,55%και Γ' Λυκείου: 67,01%), ενώ απάντησε «4 και -4» το 27,25%. Ομοίως και οι φοιτητές/τριες του Μαθηματικού Τμήματος απάντησαν σωστά σε ποσοστό 67,65% [95% δ.ε.: (56,53%, 78,77%)]. Στην ερώτηση αυτή απάντησαν και 84 μαθητές της Γ' Γυμνασίου, από τους οποίους απάντησε σωστά το 66,67% [95% δ.ε.: (56,59%, 76,75%)].

Στη 2η ερώτηση «Ποια είναι η $\sqrt[3]{-8}$» το 51,59% των μαθητών όλων των τάξεων του Λυκείου [95% δ.ε.: (46,32%, 56,87%)] απάντησε «Δεν ορίζεται» (Α΄ Λυκείου 50,72%, Β' Λυκείου 53,64% και Γ' Λυκείου: 50,52%). Ομοίως και οι φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος έδωσαν την απάντηση «Δεν ορίζεται» σε ποσοστό 55,88% [95% δ.ε.: (44,08%, 67,68%)], ποσοστό σημαντικά υψηλότερο από το αντίστοιχο του 1988 (19,44%) [95% δ.ε.: (6,52%, 32,37%)]. Υπάρχει, όμως, ένα σημαντικό ποσοστό, 36,81% [95% δ.ε.: (31,72%, 41,90%)] των μαθητών και 42,65% [95% δ.ε.: (30,89%, 54,40%)] των φοιτητών, που απάντησε ότι ισούται με -2.

Στην 3η ερώτηση «Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (x) = $\sqrt[3]{x}$» το 56,81% των μαθητών όλων των τάξεων του Λυκείου [95% δ.ε.: (51,58%, 62,04%)] απάντησε «Από 0 έως +∞» δηλ. το R^+ (Α΄ Λυκείου 48,55%, Β' Λυκείου 61,82% και Γ' Λυκείου: 62,89%). Ομοίως και οι φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος έδωσαν την απάντηση «Από 0 έως +∞» δηλ. το R^+

σε ποσοστό 60,29% [95% δ.ε.: (48,66%, 71,92%)], ποσοστό σημαντικά υψηλότερο από το αντίστοιχο του 1988 (19,44%) [95% δ.ε.: (6,52%, 32,37%)]. Υπάρχει, όμως, ένα σημαντικό ποσοστό, 29,86% [95% δ.ε.: (25,03%, 34,68%)] των μαθητών και 39,71% [95% δ.ε.: (28,08%, 51,34%)] των φοιτητών, που απάντησε ότι είναι όλο το R.

Στην 1η ερώτηση, τόσο οι μαθητές Λυκείου, όσο και φοιτητές, δεν έδωσαν άλλη απάντηση εκτός των «4» ή «4 και -4». Στη 2η ερώτηση, το 11,59% των μαθητών του Λυκείου απάντησε λανθασμένα ή δήλωσε ότι δεν γνωρίζει την απάντηση [95% δ.ε.: (8,22%, 14,97%)]. Στην 3η ερώτηση, το αντίστοιχο ποσοστό ήταν 13,33% [95% δ.ε.: (9,75%, 16,92%)].

Οι απαντήσεις στην 1η ερώτηση είναι ανεξάρτητες από την τάξη του Λυκείου στην οποία βρίσκονται οι μαθητές: X^2 (2, N = 345) = 2.266, p = .32206. Ανεξάρτητες είναι και οι απαντήσεις των μαθητών στη 2η ερώτηση με την τάξη στην οποία βρίσκονται: X^2 (4, N = 345) = 0.4943, p = .974051. Φαίνεται να υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στις απαντήσεις των μαθητών στην 3η ερώτηση και στην τάξη στην οποία βρίσκονται: X^2 (4, N = 345) = 11.3757, p = .022651. Η εξάρτηση αυτή να είναι υψηλότερη, συγκρίνοντας τις απαντήσεις της Α' Λυκείου και της Γ' Λυκείου (p = .00897).

Τέλος, υπάρχει υψηλή θετική συσχέτιση (Sig.=.000, r_s= .779, p<.01) ανάμεσα στις απαντήσεις που έδωσαν οι φοιτητές στη 2η και την 3η ερώτηση. Στο δείγμα μας, σε ποσοστό 92,54%, είτε απάντησαν ότι η $\sqrt[3]{-8}$ δεν υπάρχει και ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (x) = $\sqrt[3]{x}$ είναι το R^+ (55,22%), είτε απάντησαν ότι $\sqrt[3]{-8}$ =-2 και ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (x) = $\sqrt[3]{x}$ είναι το R (37,31**%**) και μόνο το 7,46% έδωσε κάποιον άλλο συνδυασμό απαντήσεων. Παρατηρούμε ότι ο επικρατέστερος συνδυασμός απαντήσεων στις ερωτήσεις 2 και 3, το 2021 είναι διαφορετικός από τον επικρατέστερο του 1988.

Συζήτηση

Όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου, πολλοί μαθητές/τριες, ακόμη και φοιτητές Μαθηματικού Τμήματος, απάντησαν ότι $\sqrt{16}$ = ±4, παρά το γεγονός ότι τα σχολικά βιβλία (μετά από το 1950) ορίζουν ότι η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού x, που συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$, είναι ο θετικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον θετικό αριθμό x. Ο ορισμός της τετραγωνικής ρίζας δημιουργεί πολλές δυσκολίες στους μαθητές και χρειάζεται να τονιστεί ιδιαιτέρως ότι η $\sqrt{\alpha}$ ορίζεται ως ο μη αρνητικός αριθμός που αν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον μη αρνητικό αριθμό α.

Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι και οι φοιτητές του Μαθηματικού τμήματος, ενώ έρχονται αντιμέτωποι και επεξεργάζονται πλέον σύνθετες μαθηματικές έννοιες, σε μεγάλο ποσοστό ταυτίζουν τις ρίζες της εξίσωσης x^2=16 με την $\sqrt{16}$ (ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων 32,35%), αδυνατώντας να αντικαταστήσουν προηγούμενες λανθασμένες αντιλήψεις με νέες.

Στο σχολικό βιβλίο της Β' Γυμνασίου, που διδάσκεται από το 2007 έως σήμερα, δίνεται ο ορισμός της τετραγωνικής ρίζας, ως εξής: «*Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α, λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α. Η τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με* $\sqrt{\alpha}$». Κατόπιν αναφέρεται: *«Αν $\sqrt{\alpha}$ = x, όπου α ≥ 0, τότε x ≥ 0 και x^2 = α. Για παράδειγμα, είναι λάθος να γράψουμε $\sqrt{25}$ = -5 παρόλο που $(-5)^2$ = 25 γιατί -5<0»*. Τα παιδιά του Γυμνασίου δεν είναι εξοικειωμένα με την ανάγνωση μαθηματικών συμβόλων, άρα πολλά απ' αυτά δεν είναι σε θέση να αποκωδικοποιήσουν τη μαθηματική έκφραση που έπεται του ορισμού, ενώ άλλα δεν θα αποτυπώσουν ότι η τετραγωνική ρίζα ορίζεται μόνο για μη αρνητικό αριθμό α και ισούται με μη αρνητικό αριθμό.

Στη Γ' Γυμνασίου, όταν ο μαθητής καλείται να επιλύσει μία εξίσωση της μορφής x^2 = α με α>0, η γνώση ότι η τετραγωνική ρίζα πρέπει να είναι θετικός αριθμός, μπορεί να οδηγήσει αρκετούς μαθητές στο συμπέρασμα ότι η λύση είναι μόνο μία, η θετική. Θα πρέπει να κατανοήσουν ότι υπάρχουν δύο ρίζες, μια θετική η $\sqrt{\alpha}$ και μια αρνητική η -$\sqrt{\alpha}$. Εάν, όμως, ήταν αποδεκτό ότι $\sqrt{x} = \pm\alpha$, τότε θα υπήρχε πρόβλημα στον ορισμό της συνάρτησης f(x) = $\sqrt{x}$, καθώς δεν μπορεί η ίδια τιμή του x να δίνει δύο διαφορετικές τιμές του f(x). Όμως, η απόρριψη της αρνητικής ρίζας, είναι ένας περιορισμός που δεν επιτρέπει στους μαθητές να κατανοήσουν τις ρίζες ως την αντίστροφη διαδικασία της ύψωσης σε δύναμη.

Όσον αφορά τον ορισμό της $\sqrt[\nu]{x}$, μέχρι σχεδόν τα τέλη της δεκαετίας του 80, οι εκπαιδευτικοί των σχολείων και οι φροντιστές δίδασκαν στη Γ' Λυκείου ότι το πεδίο ορισμού της f (x) = $\sqrt[2k+1]{x}$ είναι όλο το R. Από τα τέλη της δεκαετίας του 80 όλα τα ελληνικά διδακτικά βιβλία για όλες τις τάξεις ορίζουν πλέον με σαφήνεια ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α≥0 υπάρχει ένας μοναδικός x≥0 τέτοιος ώστε $x^\nu = \alpha$. Ο μη αρνητικός αυτός αριθμός συμβολίζεται $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (x)= $\sqrt[\nu]{\varphi(x)}$ είναι το A = {x ∈ R : φ(x) ≥ 0}, είτε το ν είναι άρτιος, είτε είναι περιττός. Κατά συνέπεια, μπορεί να δικαιολογηθεί η «*μετατόπιση*» της πλειοψηφίας των απαντήσεων των φοιτητών στη 2^η και 3^η ερώτηση, από τις απαντήσεις «-2» και «όλο το R» το 1988, στις απαντήσεις «Δεν ορίζεται» και «το R^+» το 2021. Τα, όχι ασήμαντα ποσοστά, ποσοστά των απαντήσεων «-2» και «όλο το R», οφείλονται κυρίως στη σύνδεση που έχουν κάνει οι μαθητές και οι φοιτητές, μεταξύ της ν-οστής ρίζας και της ύψωσης στη δύναμη ν (ως δύο αντίστροφες πράξεις).

Συμπεράσματα

Η σύγχυση σχετικά με τις τετραγωνικές ρίζες, προφανώς δημιουργείται από τη σύνδεση που έχουν κάνει οι μαθητές, μεταξύ της τετραγωνικής ρίζας και της ύψωσης στο τετράγωνο, ως δύο αντίστροφες πράξεις. Το +4 και το -4 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 = 16$. Έτσι πολλοί μαθητές γράφουν $x = \sqrt{16} \Rightarrow x = \pm 4$ (αντί του σωστού $x = \pm\sqrt{16} \Rightarrow x = \pm 4$), θεωρώντας ότι $\sqrt{16} = \pm 4$.

Με μια γρήγορη αναζήτηση στο διαδίκτυο, εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι το σύμβολο $\sqrt[2k+1]{x}$ στα γερμανικά βιβλία, όπως στα ελληνικά, έχει νόημα μόνο όταν x ≥ 0. Έτσι, για x≤0, αντί του συμβολισμού $\sqrt[2k+1]{x}$ χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $-\sqrt[2k+1]{|x|}$. Δεν ισχύει, όμως, το ίδιο για άλλες χώρες του κόσμου. Για παράδειγμα, πληθώρα εκπαιδευτικών ιστότοπων στην Αμερική, την Ιταλία, τη Γαλλία και την Ισπανία, δέχονται τον συμβολισμό $\sqrt[2k+1]{\alpha}$ για α≤0 και αναφέρουν ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x) = $\sqrt[2k+1]{x}$ είναι όλο το R. Συνεπώς, υπάρχει διχογνωμία σχετικά με τον ορισμό του συμβόλου $\sqrt[2k+1]{x}$. Συνοψίζοντας:

α) Εάν δεχθούμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός α (όχι αναγκαστικά μη αρνητικός) έχει μία πραγματική ν-οστή ρίζα, όταν ο ν είναι περιττός, η οποία συμβολίζεται με το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$, τότε θα πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί με τους κανόνες λογισμού των ριζικών και των δυνάμεων (με κλασματικό εκθέτη), καθώς, σε πολλές περιπτώσεις, δεν ισχύουν όταν α≤0, όπως για παράδειγμα η ιδιότητα $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, η οποία μπορεί να οδηγήσει σε άτοπο αν α≤0, όπως στο παράδειγμα: $-1 = \sqrt[3]{-1} = (-1)^{1/3} = (-1)^{2/6} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1$.

β) Εάν δεχθούμε ότι η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στην ν, δίνει τον α, δεν θα πρέπει να ξεχνάμε ότι υπάρχουν νιοστές ρίζες αρνητικών αριθμών δηλ. (αρνητικοί) αριθμοί που αν υψωθούν στη δύναμη ν μπορούν να δώσουν τον αρνητικό αριθμό, π.χ. $(-2)^3 = -8$. Άρα, πρέπει να ξεχωρίσουμε την έννοια της ν-οστής ρίζας (ως τη λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$) και του συμβόλου $\sqrt[\nu]{\alpha}$. Τέλος, στη μελέτη των αντίστοιχων συναρτήσεων, πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη όλες τις θεωρητικές παραμέτρους του ορισμού μιας έννοιας, δηλαδή να διαθέτουμε μία ολοκληρωμένη εικόνα της έννοιας. Για παράδειγμα, να λαμβάνουμε υπόψη μας ότι η αντίστροφη συνάρτηση της $y = x^3$ με y≤0, (απ' όπου προκύπτει ότι και x≤0), υπάρχει και περιγράφεται από την εξίσωση: $y = \sqrt[3]{-x}$ με πεδίο ορισμού το (-∞, 0]. Συνεπώς, να μην ξεχνάμε ότι χρειάζονται δύο εξισώσεις για να περιγράψουμε την αντίστροφη της συνάρτησης $y = x^3$, η οποία πρέπει να υπάρχει για κάθε x ∈ R, καθώς η $y = x^3$ είναι συνάρτηση 1-1.

Εφόσον στα Μαθηματικά οι έννοιες καθορίζονται πλήρως και με ακρίβεια από τον ορισμό τους, θα ήταν χρήσιμο να επαναδιατυπωθεί ο ορισμός της ν-οστής ρίζας και του συμβόλου $\sqrt[\nu]{\ }$, με ενιαίο τρόπο στην παγκόσμια εκπαιδευτική και επιστημονική κοινότητα.

Αναφορές

Cantor, G. (1872). Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Math. Ann.* **5,** 123–132

Davis, D., (2021). *Roots of real numbers - Math 97 Supplement 1*. Retrieved April 6, 2021, from https://www.whatcom.edu/home/showpublisheddocument?id=3857

Dedekind, R. (1872). *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Braunschweig: Friedrich Vieweg.

Denlinger, C., Jacobson, E. (1978) *Algebra Review*. New York: Academic Press, Inc.

Ewen, D., Topper, M., (1976). *Mathematics For Technical Education*. New Jersey: Prentice_Hall, Inc.

Faddeyev, D., Sominskii , I. (1965). *Elementary Algebra*. New York: Pergamon Press.

Falduto, V. et al. (2017) *COLLEGE ALGEBRA – UCO Adaption 1st edition*. Retrieved April 6, 2021, from https://www.uco.edu/cms/files/math-college-algebra--fa17-uco.pdf

Gellert, W. et al. (1975) *Mathematics at a Glance: A Compendium*, Leipzig, Germany: VEB Bibliographisches Institut.

Huguetan, J., Ravaud, M. (1663) *Girolamo Cardano: Opera omnia – Ars Magna.* Lyon: CVM PRIVILEGIO REGIS. Retrieved April 17, 2021, from http://www.filosofia.unimi.it/cardano/testi/operaomnia/vol_4_s_4.pdf

Jonson, R., Lendsey, L., Slesnick, W. (1967). *Algebra (Secondary Mathematics Series)*. Boston: Addison-Wesley Publishing Company.

Marecek, L., Anthony-Smith, M., Honeycutt Mathis, A., (2021). *Higher roots*. Retrieved April 6, 2021, from https://openstax.org/books/elementary-algebra-2e/pages/9-7-higher-roots

O' Connor, J., and Robertson, E. (2000) *Rafael Bombelli*. Retrieved April 4, 2021, from https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bombelli/

Sexton, C. et al. (2019). *Graphing Cubed Root Functions*. Retrieved April 7, 2021, from https://www.ck12.org/book/ck-12-algebra-ii-with-trigonometry-concepts/section/7.5/

Struik, D. (1982). *Συνοπτική ιστορία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Ι. Ζαχαρόπουλος.

Ανδρεαδάκης, Σ. κ.ά. (1999). *Μαθηματικά Γ΄ Ενιαίου Λυκείου*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Βαβαλέτσκος, Θ., Μπούσγος, Γ. (1972). *Μαθηματικά Δ' Γυμνασίου (Θετικής Κατευθύνσεως) Τόμος Πρώτος*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Βαρουχάκης, Ν. κ.ά. (1981). *Μαθηματικά Α' Λυκείου – Άλγεβρα*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Βαρουχάκης, Ν. κ.ά. (1983). *Μαθηματικά Γ' Λυκείου – Ανάλυση*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Βλάμος, Π. κ.ά. (2007). *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Κατσαργύρης, Β. κ.ά. (1992). *Μαθηματικά Γ' Λυκείου – Ανάλυση*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Μανάρης, Σ. (1862). *Στοιχειώδης Άλγεβρα*. Ιωάννινα: Τύποις Δωδώνης.

Μπαρμπαστάθης, Χ. (1948) *Άλγεβρα διά τας ανωτέρας τάξεις των Γυμνασίων*. Αθήνα: ΟΕΣΒ.

Μπούσγος, Γ., Ταμβακλής, Ι. (1978). *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου Τόμος Πρώτος*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Σακελλαρίου, Ν. (1966). *Άλγεβρα*. Αθήνα: ΟΕΣΒ.

Στάικος, Β. (1981). *Μαθηματικά Γ' Λυκείου*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Τόγκας, Π., Πασσάς, Θ., Νικολάου, Ν. (1962). *Αριθμητική διά τας κατωτέρας τάξεις των Γυμνασίων*. Αθήνα: ΟΕΣΒ.