

1. ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΟΜΟΣΗΜΩΝ- ΕΤΕΡΟΣΗΜΩΝ

Σε ομόσημους κάνω πρόσθεση και βάζω το κοινό τους προσημώ

Σε ετερόσημους κάνω αφαίρεση και βάζω το προσημώ του μεγαλύτερου αριθμού

πχ. $+3 + 2 = +5$
 $+3 - 2 = +1$
 $-3 + 2 = -1$
 $-2 - 3 = -5$

ΧΡΗΣΙΜΟ

Κάθε αριθμός χωρίς πρόσημο δεχόμαστε ότι είναι θετικός, δηλαδή $a = +a$ πχ. $3 = +3$

2. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ , ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΟΜΟΣΗΜΩΝ- ΕΤΕΡΟΣΗΜΩΝ

Σε ομόσημους βάζουμε πρόσημο (+) ,
 ενώ σε ετερόσημους (-)

πχ. $+3(+5) = +15$
 $+3(-5) = -15$
 $-3(+5) = -15$
 $-3(-5) = +15$

α	β	α · β	α : β
+	+	+	+
+	-	-	-
-	+	-	-
-	-	+	+

3. ΑΝΑΓΩΓΗ ΟΜΟΙΩΝ ΟΡΩΝ (ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ)

(κάνουμε πράξεις, πρόσθεση κι αφαίρεση, μόνο με τα όμοια)

πχ. $3x + 2 =$ ΤΙΠΟΤΑ (έπρεπε να έχω μόνο x ή μόνο νούμερα)
 $5x^2 - 4x =$ ΤΙΠΟΤΑ (έπρεπε να έχω μόνο x^2 ή μόνο x)
 $6x^2 + 3 =$ ΤΙΠΟΤΑ (έπρεπε να έχω μόνο x^2 ή μόνο νούμερα)
 $3x + y =$ ΤΙΠΟΤΑ (έπρεπε να έχω μόνο x ή μόνο y)
 $2a + 3b =$ ΤΙΠΟΤΑ (έπρεπε να έχω μόνο a ή μόνο b)
 $3x + 7x = 10x$
 $2x^2 - 5x^2 = -3x^2$
 $8a - 3a = 5a$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΤΑ x

$1x = 1 \cdot x = x$
 $0x = 0 \cdot x = 0$
 $x + x = 2x$
 $x \cdot x = x^2$
 $x \cdot x^2 = x \cdot x \cdot x = x^3$
 $2 \cdot 3x = 6x$
 $3x \cdot 4x^2 = 12x^3$

4. ΠΡΟΣΘΑΦΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΟΡΩΝ

πχ. μόνο με αριθμούς

$A = \underline{3} + \underline{4} - \underline{7} - \underline{8} + \underline{4} - \underline{6} - \underline{7} + \underline{1} - \underline{5} + \underline{6} + \underline{2} - \underline{4}$

Γράφω πρώτα τα (+), μετά τα (-) (τα μετράμε στο σύνολο μην ξεχάσουμε κανένα)

$A = \underline{3} + \underline{4} + \underline{4} + \underline{1} + \underline{6} + \underline{2} - \underline{7} - \underline{8} - \underline{6} - \underline{7} - \underline{5} - \underline{4}$

Διαγράφουμε αντίθετους (+, -) , αν υπάρχουν

$A = \underline{3} + \cancel{4} + \underline{4} + \underline{1} + \cancel{6} + \underline{2} - \underline{7} - \underline{8} - \cancel{6} - \underline{7} - \underline{5} - \cancel{4}$

Προσθέτουμε όλα τα (+) και βάζουμε (+), προσθέτουμε όλα τα (-) και βάζουμε (-)

$A = +10 - 27$

Κάνουμε μόνο μία αφαίρεση

$A = -17$

πχ. με αναγωγές , x^2 , x, αριθμούς

$B = \underline{3x} - \underline{5x^2} + \underline{6} - \underline{3x} - \underline{7} - \underline{2x} + \underline{5} + \underline{7x^2} - \underline{5x} - \underline{2} + \underline{4} + \underline{5x^2} + \underline{6x^2} - \underline{3x} - \underline{8x^2} - \underline{4} - \underline{6x} - \underline{11} - \underline{4x}$

Γράφω πρώτα τα x^2 , μετά τα x, μετά τους αριθμούς (με την σειρά που τα συναντώ)

(τα μετράμε στο σύνολο μην ξεχάσουμε κανένα)

$$B = -5x^2 + 7x^2 + 5x^2 + 6x^2 - 8x^2 + 3x - 3x - 2x - 5x - 3x - 6x - 4x + 6 - 7 + 5 - 2 + 4 - 4 - 11$$

Χωρίζουμε σε κάθε όμοιο όρο τους θετικούς από τους αρνητικούς

$$B = + 7x^2 + 5x^2 + 6x^2 - 5x^2 - 8x^2 + 3x - 3x - 2x - 5x - 3x - 6x - 4x + 6 + 5 + 4 - 7 - 2 - 4 - 11$$

Διαγράφουμε αντίθετους (+, -α), αν υπάρχουν

$$B = + 7x^2 + \cancel{5x^2} + 6x^2 - \cancel{5x^2} - 8x^2 + \cancel{3x} - \cancel{3x} - 2x - 5x - 3x - 6x - 4x + 6 + 5 + \cancel{4} - \cancel{7} - \cancel{2} - \cancel{4} - 11$$

Προσθέτουμε σε κάθε όρο τα (+) και βάζουμε (+), προσθέτουμε τα (-) και βάζουμε (-)

$$B = + 13x^2 - 8x^2 - 20x + 11 - 20$$

Κάνω μία αφαίρεση σε κάθε όρο (στα x², στα x, στους αριθμούς)

$$B = + 5x^2 - 20x - 9$$

Σταματάω, γιατί τέλειωσαν οι αναγωγές ομοίων όρων (δεν γίνονται άλλες πράξεις)

5. ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ

Το (-) έξω από παρένθεση αλλάζει όλα τα πρόσημα όταν βγαίνει η παρένθεση, ενώ το (+) τα αφήνει όπως είναι.

$$\text{πχ. } -(3x^3 - 5x + 4y - 2a + 3) = -3x^3 + 5x - 4y + 2a - 3$$

$$+ (5x^3 - 4x + 8\beta - 3x^2 + 9) = +5x^3 - 4x + 8\beta - 3x^2 + 9$$

6. ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ (ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗ) (ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ)

(όταν έχω αριθμό με παρένθεση συνεχόμενα ή παρενθέσεις διαδοχικά, εννοείται το επί)

$$\text{πχ. } -2(3 - 5x^2 + 7x) = -6 + 10x^2 - 14x \text{ (αριθμός επί παρένθεση, υπολογίζω το (-) του -2)}$$

$$(x-1)(x-3) = x^2 - 3x - x + 3 \text{ (παρένθεση επί παρένθεση)}$$

$$-2(x-1)(x-3) = -2(x^2 - 3x - x + 3) = -2x^2 + 6x + 2x - 6$$

(αριθμός επί δυο παρενθέσεις, πρώτα τις δυο παρενθέσεις και ό,τι βρω σε παρένθεση και μετά επιμεριστική με τον αριθμό)

$$-3(3x+4)^2 = -3((3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2) = -3(9x^2 + 24x + 16) = -27x^2 - 72x - 48$$

(αριθμός επί ταυτότητα, πρώτα την ταυτότητα και ό,τι βρω σε παρένθεση και μετά επιμεριστική τον αριθμό με την παρένθεση)

7. ΔΥΝΑΜΕΙΣ

	$\alpha^0 = 1$	$3^0 = 1$
$a^v = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{v \text{ φορές πολλ. / σμος}}$	$\alpha^1 = \alpha$	$5^1 = 5$
	$\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$ "στο τετράγωνο"	$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$
	$\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$ "στον κύβο"	$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 3 = 27$

προσοχή: $-a^2 = -(a^2)$ ενώ $(-a)^2 = +a^2$ δηλαδή $-3^2 = -9$, ενώ $(-3)^2 = +9$

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}, \text{ "αντίστροφος του } \alpha \text{"} \quad 7^{-1} = \frac{1}{7}$$

$$\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v} \quad \text{πχ. } 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{16 \cdot 4} = \frac{1}{64}$$

8. ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΠΡΑΞΕΩΝ (ΣΕΙΡΑ ΠΡΑΞΕΩΝ)

A. Χωρίς Παρενθέσεις

1. Δυνάμεις
2. Πολλαπλασιασμοί – Διαιρέσεις
3. Προσθέσεις - Αφαιρέσεις

$$A = 4 \cdot 2^3 - 8 : 2^2 + 6^1 : (-3) - 4^2 : (-2) + 6^2 : 7^0 - 5^2 + 3^3 : 9^1 + (-7)^2 : 2^0$$

Κάνουμε πρώτα μόνο τις δυνάμεις και αφήνουμε τα υπόλοιπα όπως είναι

$$A = 4 \cdot 8 - 8 : 4 + 6 : (-3) - 16 : (-2) + 36 : 1 - 25 + 27 : 9 + 49 : 1$$

Μετά κάνουμε μόνο τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις προσέχοντας τα πρόσημα

$$A = 32 - 2 - 2 + 8 + 36 - 25 + 3 + 49$$

Τέλος κάνουμε προσθέσεις κι αφαιρέσεις , χωρίζοντας τους θετικούς από τους αρνητικούς

$$A = \underline{32 + 8 + 36 + 3 + 49} - \underline{2 - 2 - 25}$$

Προσθέτω όλα τα (+) και βάζω (+), προσθέτω όλα τα (-) και βάζω (-)

$$A = 128 - 29 = 99$$

B. Με Παρενθέσεις

Κάνουμε τις πράξεις μόνο μέσα στις παρενθέσεις με τη παραπάνω σειρά (1-2-3) , αφήνοντας τα υπόλοιπα έξω από τις παρενθέσεις όπως είναι και μόλις φύγουν οι παρενθέσεις κανουμε τις πράξεις όπως πριν (με την σειρά 1-2-3)

$$B = 2(3^1 - 7 : 2^0)(-7^2 + 6 : 2 + 2 \cdot 5^2)^2 - 2^2(3 - 4^2 : (-8)) - (4 \cdot 5 - 4 - 4 \cdot 3)(2 - 5) + (-6)^2 : 4 + 5 : (-5)$$

Κάνουμε τις πράξεις μόνο μέσα στις παρενθέσεις με την γνωστή σειρά και αφήνουμε τα υπόλοιπα όπως είναι, μέχρι σε κάθε παρένθεση να μείνει ένας αριθμός

$$B = 2(3 - 7 : 1)(-49 + 6 : 2 + 2 \cdot 25)^2 - 2^2(3 - 16 : (-8)) - (20 - 4 - 12)(-3) + (-6)^2 : 4 + 5 : (-5)$$

$$B = 2(3 - 7)(-49 + 3 + 50)^2 - 2^2(3 + 2) - (20 - 16)(-3) + (-6)^2 : 4 + 5 : (-5)$$

$$B = 2(-4)(+3 + 50 - 49)^2 - 2^2(5) - (4)(-3) + (-6)^2 : 4 + 5 : (-5)$$

$$B = 2(-4)(53 - 49)^2 - 2^2(5) - (4)(-3) + (-6)^2 : 4 + 5 : (-5)$$

$$B = 2(-4)(4)^2 - 2^2(5) - (4)(-3) + (-6)^2 : 4 + 5 : (-5)$$

Τότε κάνω τις πράξεις με την παραπάνω σειρά προσέχοντας τα πρόσημα

$$B = 2(-4)16 - 4(5) - (4)(-3) + 36 : 4 + 5 : (-5)$$

$$B = -128 - 20 + 12 + 9 - 1$$

$$B = \underline{+12 + 9} - \underline{128 - 20 - 1}$$

$$B = 21 - 149 = -128$$

Γ. Με Άγκιστρα, Αγκύλες, Παρενθέσεις

Τα βγάζουμε από μέσα προς τα έξω

πχ. με μεταβλητές και αριθμούς (αλγεβρική παράσταση)

(ταυτότητες με δυνάμεις , επιμεριστικές , απαλοιφή παρενθέσεων και αναγωγές)

$$\Gamma = 2\{3x - 2[x - 3x(7-x) + x - 4] - (x-2)\} + 2[3(2x+1) - 4](x-3) - x(5-x)$$

$$\Gamma = 2\{3x - 2[x - 21x + 3x^2 + x - 4] - (x-2)\} + 2[6x + 3 - 4](x-3) - x(5-x)$$

$$\Gamma = 2\{3x - 2x + 42x - 6x^2 - 2x + 8 - x + 2\} + 2[6x - 1](x-3) - x(5-x)$$

$$\Gamma = 6x - 4x + 84x - 12x^2 - 4x + 16 - 2x + 4 + 2(6x^2 - 18x - x + 3) - 5x + x^2$$

$$\Gamma = \underline{6x} - \underline{4x} + \underline{84x} - \underline{12x^2} - \underline{4x} + 16 - \underline{2x} + 4 + \underline{12x^2} - \underline{36x} - \underline{2x} + 6 - \underline{5x} + x^2$$

Χωρίζω τους όμοιους όρους, δηλαδή πρώτα τα x^2 , μετά τα x , και τέλος τα νούμερα

$$\Gamma = \underline{-12x^2 + 12x^2 + x^2} + \underline{6x - 4x + 84x - 4x - 2x - 36x - 2x - 5x} + \underline{16 + 4 + 6}$$

Χωρίζω στους όμοιους όρους τα (+) από τα (-), δηλαδή στα x^2 , στα x , και στα νούμερα

$$\Gamma = +\underline{12x^2} + x^2 - \underline{12x^2} + \underline{6x + 84x - 4x - 4x - 2x - 36x - 2x - 5x} + \underline{16 + 4 + 6}$$

Προσθέτω όλα τα (+) και βάζω (+), προσθέτω όλα τα (-) και βάζω (-), στους όμοιους όρους

$$\Gamma = x^2 + 90x - 53x + 26$$

$$\Gamma = x^2 + 37x + 26$$

9. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ομώνυμα κάνουμε μόνο σε πρόσθεση και αφαίρεση, όχι σε πολλαπλασιασμό και διαίρεση.

Ομώνυμα λέγονται τα κλάσματα που έχουν τον ίδιο παρονομαστή (το ΕΚΠ των παρονομαστών).

ΧΡΗΣΙΜΟ

Κάθε αριθμός που δεν είναι κλάσμα γράφεται σαν κλάσμα με παρονομαστή την μονάδα, δηλαδή $a = \frac{a}{1}$ πχ. $7 = \frac{7}{1}$

$$\otimes \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^0 = 1, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^v = \frac{\alpha^v}{\beta^v}, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v$$

$$(\div) \alpha. \quad \frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15} \quad (\text{αντιστρέφω διαιρέτη και αντί για διαίρεση κάνω πολλαπλασιασμό})$$

$$\beta. \quad \frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15} \quad (\text{πολλαπλασιάζω τους άκρους όρους και το γινόμενο μπαίνει αριθμητής, πολλαπλασιάζω τους μέσους όρους και το γινόμενο μπαίνει παρονομαστής})$$

(+),(-) ομώνυμα, αφού βρούμε το ΕΚΠ, στα καπελάκια βάζουμε τον αριθμό (ΕΚΠ/παρονομαστή)

$$\frac{2}{3} - \frac{7}{2} + 5 = \frac{2}{3} - \frac{7}{2} + \frac{5}{1} \stackrel{\text{ΕΚΠ}=6}{=} \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} - \frac{3 \cdot 7}{3 \cdot 2} + \frac{6 \cdot 5}{6 \cdot 1} = \frac{4}{6} - \frac{21}{6} + \frac{30}{6} = \frac{4 - 21 + 30}{6} = \frac{4 + 30 - 21}{6} = \frac{34 - 21}{6} = \frac{13}{6}$$

10. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΡΙΖΕΣ

Κάνω πρόσθεση, αφαίρεση ριζών μόνο όταν έχω ίδιες ρίζες, σαν την αναγωγή.

πχ. $2 + \sqrt{3} = \text{ΤΙΠΟΤΑ}$

$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \text{ΤΙΠΟΤΑ}$

$5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

$2\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = -4\sqrt{3}$

$5 \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

$3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{6}$

$3\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7} = 6(\sqrt{7})^2 = 6 \cdot 7 = 42$

$$(\sqrt{3})^2 = 3, \quad (\sqrt{5})^2 = 5$$

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{0} = 0, \quad \sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{9} = 3, \quad \dots, \quad \sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}, \quad \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$$

$$(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha, \quad \sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$$

$$(\alpha\sqrt{\beta})^2 = \alpha^2 (\sqrt{\beta})^2 = \alpha^2 \cdot \beta$$

$$(3\sqrt{2})^2 = 3^2 (\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18$$