

## 2. 4 Κλασματικές εξισώσεις



✓ Μαθαίνω να λύνω κλασματικές εξισώσεις, που μετασχηματίζονται σε εξισώσεις πρώτου ή δευτέρου βαθμού.



### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{x}{4} + \frac{4}{3} = \frac{x+8}{12}$
2. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. των  $x+2$ ,  $x$ ,  $x^2+2x$  και να λύσετε και την εξίσωση

$$\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x^2+2x}$$

Επαληθεύεται η εξίσωση από όλες τις τιμές του  $x$  που βρήκατε;

Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυσή τους οδηγεί σε εξίσωση, που περιέχει ένα τουλάχιστον κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή και η οποία ονομάζεται **κλασματική** εξίσωση.

$$\frac{x}{4} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{6}$$

$$\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x^2+2x}$$

Για να ορίζονται οι όροι μιας κλασματικής εξίσωσης πρέπει όλοι οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του μηδενός.

Τις κλασματικές εξισώσεις τις επιλύουμε όπως και τις υπόλοιπες εξισώσεις που έχουν παρονομαστή γνωστό αριθμό.

Για παράδειγμα, προκειμένου να επιλύσουμε την εξίσωση  $\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x^2+2x}$  εργαζόμαστε ως εξής:

Αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

$$\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x(x+2)}$$

Προσδιορίζουμε τις τιμές του αγνώστου για τις οποίες όλοι οι παρονομαστές είναι διάφοροι του μηδενός.

Πρέπει  $x \neq 0$  και  $x+2 \neq 0$   
δηλαδή  $x \neq 0$  και  $x \neq -2$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

Το ΕΚΠ των παρονομαστών είναι  $x(x+2) \neq 0$  και η εξίσωση γράφεται:

$$x(x+2) \frac{x}{x+2} + x(x+2) \frac{4}{x} = x(x+2) \frac{x+8}{x(x+2)}$$



Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει.

$$\begin{aligned}x^2 + 4(x + 2) &= x + 8 \\x^2 + 4x + 8 &= x + 8 \quad \text{ή} \quad x^2 + 3x = 0 \quad \text{ή} \\x(x + 3) &= 0, \quad \text{άρα} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x = -3.\end{aligned}$$

Από τις λύσεις που βρήκαμε, απορρίπτουμε εκείνες που δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς.

Η λύση  $x = 0$  απορρίπτεται, αφού πρέπει  $x \neq 0$  και  $x \neq -2$ , οπότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την  $x = -3$ .



## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1** Να λυθούν οι εξισώσεις: α)  $\frac{x}{x+1} - \frac{8}{x} = 1$       β)  $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2-2x}$

### Λύση

α) Για να ορίζονται οι όροι της εξίσωσης πρέπει  $x \neq 0$  και  $x \neq -1$ . Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι  $x(x+1) \neq 0$  και η εξίσωση γράφεται

$$x(x+1) \cdot \frac{x}{x+1} - x(x+1) \cdot \frac{8}{x} = x(x+1) \cdot 1$$

$$x^2 - 8(x+1) = x(x+1) \quad \text{ή} \quad x^2 - 8x - 8 = x^2 + x \quad \text{ή} \quad -9x = 8 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{8}{9}$$

(ικανοποιεί τους περιορισμούς). Άρα η εξίσωση έχει λύση τη  $x = -\frac{8}{9}$

β) Αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και η εξίσωση γίνεται  $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}$  (1).

Για να ορίζονται οι όροι της εξίσωσης πρέπει  $x \neq 0$  και  $x \neq 2$ .

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι  $x(x-2) \neq 0$  και η εξίσωση (1) γράφεται

$$x(x-2) \frac{1}{x-2} - x(x-2) \frac{1}{x} = x(x-2) \frac{2}{x(x-2)}$$

$$x - (x-2) = 2 \quad \text{ή} \quad x - x = 2 - 2 \quad \text{ή} \quad 0x = 0.$$

Άρα η εξίσωση έχει ως λύση οποιοδήποτε αριθμό, εκτός από τους αριθμούς 0 και 2.

**2** Ένας μαραθωνοδρόμος διήνυσε την απόσταση των 42 km και δεν μπόρεσε να κερδίσει κάποιο μετάλλιο. Όταν με τον προπονητή του ανέλυσαν την προσπάθειά του, διαπίστωσαν ότι, αν η μέση ταχύτητά του ήταν 1 km/h μεγαλύτερη, θα τερμάτιζε σε  $\frac{1}{10}$  της ώρας νωρίτερα και θα έπαιρνε το χρυσό μετάλλιο. Ποια ήταν η μέση ταχύτητα με την οποία έτρεξε;

### Λύση

Αν η μέση ταχύτητα με την οποία έτρεξε ήταν  $x$  km/h, τότε την απόσταση των 42 km





### ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές, ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.
- α) Οι όροι της εξίσωσης  $\frac{6}{x-1} + \frac{4}{x} = 8$  ορίζονται αν  $x \neq 0$  και  $x \neq 1$ .
- β) Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης  $\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x} = 2$ .
- γ) Αν απαλείψουμε τους παρονομαστές της εξίσωσης  $\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 2$ , τότε αυτή γράφεται  $5x + 3 = 2$ .
- δ) Οι όροι της εξίσωσης  $\frac{x^3}{x^2+1} = x$  ορίζονται για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$  και ο αριθμός 0 είναι λύση της.
- 2 Αν διαιρέσουμε έναν αριθμό  $x$  με τον αριθμό που είναι κατά 2 μονάδες μεγαλύτερος βρίσκουμε  $\frac{3}{4}$ . Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις εκφράζει την παραπάνω πρόταση;
- α)  $\frac{x}{2-x} = \frac{3}{4}$       β)  $\frac{x+2}{x} = \frac{3}{4}$       γ)  $\frac{x}{x+2} = \frac{3}{4}$       δ)  $\frac{x}{x-2} = \frac{3}{4}$
- 3 Η εξίσωση  $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x+4}{x+1} = 6$  έχει ως λύση τον αριθμό
- α)  $x = 1$       β)  $x = -1$       γ)  $x = 0$       δ)  $x = 2$
- 4 Ένας μαθητής για να λύσει την εξίσωση  $\frac{2x-1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ , έκανε απαλοιφή παρονομαστών και λύνοντας την εξίσωση  $2x - 1 = 1$  που προέκυψε, βρήκε ως λύση τον αριθμό  $x = 1$ . Η απάντησή του είναι σωστή;



### ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- 1 Να λύσετε τις εξισώσεις:
- α)  $\frac{2}{x-1} = \frac{1}{2}$       β)  $\frac{7}{2y-3} = -\frac{1}{3}$       γ)  $\frac{4\omega+1}{\omega-2} = \frac{9}{\omega-2}$
- δ)  $\frac{7}{5a} + \frac{3}{10} = \frac{2}{a}$       ε)  $\frac{2x+1}{x-3} = 2 - \frac{7}{3-x}$       στ)  $1 - \frac{5}{y-2} = \frac{6-y}{2-y}$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} = 1 \quad \beta) \frac{5}{y} + \frac{4}{y-1} = 2 \quad \gamma) \frac{7}{\omega} - \frac{3}{\omega+2} = \frac{6}{\omega^2}$$

$$\delta) \frac{4}{(a-2)^2} - \frac{3}{a-2} = 1 \quad \epsilon) \frac{6}{x(x+3)} = \frac{x+2}{x} + \frac{x+1}{x+3} \quad \sigma\tau) \frac{y-1}{y} - \frac{2}{y+1} = \frac{y+3}{y(y+1)}$$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x+5}{x^2-25} = \frac{3}{x+5} \quad \beta) \frac{y+1}{y^2-y-2} - \frac{1}{y-2} = 0$$

$$\gamma) \frac{\omega^2+5}{\omega^2-\omega} - \frac{\omega+5}{\omega-1} = \frac{1}{\omega} \quad \delta) \frac{1}{a^2-2a} + \frac{a-1}{a} = \frac{a}{a-2}$$

4 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2-y} = 0 \quad \beta) \frac{2\omega^2}{\omega^2+2\omega} = 3 - \frac{4}{\omega+2}$$

$$\gamma) \frac{1}{x^2-4x+4} = \frac{2x-1}{x^2-4} \quad \delta) 1 + \frac{3a}{a-2} = \frac{a+4}{a^2-3a+2}$$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x}{x-\frac{4}{x}} = \frac{4}{3} \quad \beta) \frac{1}{1+\frac{3}{x}} - \frac{2}{x-3} = \frac{x-6}{x^2-9}$$

6 Να λύσετε τους τύπους:

$$\alpha) \rho = \frac{m}{V} \text{ ως προς } V \quad \beta) E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} \text{ ως προς } R$$

$$\gamma) R = \rho \frac{\ell}{S} \text{ ως προς } S \quad \delta) \frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \text{ ως προς } T_1$$

$$\epsilon) \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ ως προς } R \quad \sigma\tau) \frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \text{ ως προς } \alpha$$

$$\zeta) \frac{1}{u_a^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} \text{ ως προς } u_a^2 \quad \eta) S = \frac{a}{1-\lambda} \text{ ως προς } \lambda$$

7 α) Να βρείτε δύο αντίστροφους αριθμούς που έχουν άθροισμα  $\frac{17}{4}$ .

β) Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στους όρους του κλάσματος  $\frac{3}{5}$  για να βρούμε τον αριθμό  $\frac{4}{5}$ .

γ) Να βρείτε δύο διαδοχικούς άρτιους φυσικούς αριθμούς που έχουν λόγο  $\frac{3}{4}$ .