

Γεωμετρία

Β' Λυκείου

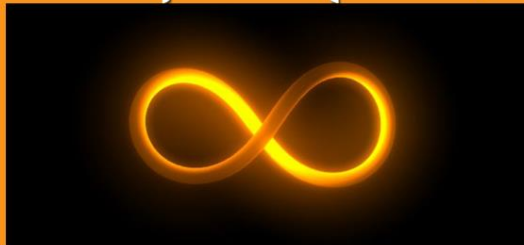
Τράπεζα

lisari team



Θεμάτων

Εκφωνήσεις



η καλύτερη ομάδα λόγω team_ής

(Έκδοση: 17 – 02 -2015)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς
των συνεργατών του δικτυακού τόπου

<http://lisari.blogspot.gr>

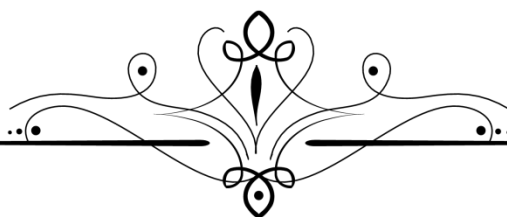
4η έκδοση: 17 – 02 – 2015 (συνεχής ανανέωση)

Το βιβλίο διατίθεται **αποκλειστικά**
από το μαθηματικό blog

<http://lisari.blogspot.gr>

Περιεχόμενα

	Σελίδες
• Πρόλογος:	4
• Κεφάλαιο 7ο: Αναλογίες	6
• Κεφάλαιο 8ο: Ομοιότητα.....	13
• Κεφάλαιο 9ο: Μετρικές Σχέσεις	23
• Κεφάλαιο 10ο: Εμβαδά	33
• Κεφάλαιο 11ο: Μέτρηση Κύκλου.....	42



Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο δίνονται όλες οι ασκήσεις της **Τράπεζας Θεμάτων** που αφορούν στην **Γεωμετρία της Β΄ Λυκείου** μαζί με τις λύσεις τους. Η παρουσίαση των λύσεων είναι κατά το δυνατόν αναλυτική έτσι, ώστε το αρχείο να μπορεί να διαβαστεί και να μελετηθεί εύκολα από τους μαθητές. Σε αρκετές περιπτώσεις οι λύσεις συνοδεύονται με αναφορές σε παρόμοιες ασκήσεις του σχολικού βιβλίου ή της τράπεζας θεμάτων καθώς και με κάποια στοιχεία θεωρίας ή ακόμα και μεθοδολογίας.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε από μια **διαδικτυακή** (και όχι μόνο) **ομάδα μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος. Η ομάδα συγκροτήθηκε από τους μαθηματικούς που ανταποκρίθηκαν στο κάλεσμα που απεύθυνε μέσα από το blog <http://lisari.blogspot.gr> ο ακούραστος **Μάκης Χατζόπουλος**. Εργάστηκε με μεράκι, κάτω από πίεση χρόνου, για να προσφέρει στην εκπαιδευτική κοινότητα, μαθητές και καθηγητές, το συγκεκριμένο υλικό.

Επιθυμία όλων μας είναι να συμβάλλουμε, έστω και ελάχιστα, στην **βελτίωση της διδασκαλίας** των μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, μέσα από την παροχή υποστηρικτικού υλικού στην ελληνική εκπαιδευτική κοινότητα.

Μετά την αρχική συγγραφή των λύσεων έγιναν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις για την όσο το δυνατό **ποιοτικότερη παρουσίαση**. Ζητούμε συγγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες οι οποίες ενδεχομένως θα έχουν διαλάθει της προσοχής μας, κάτι αναπόδραστο στην εκπόνηση μιας εργασίας τέτοιας έκτασης σε τόσο στενά περιθώρια χρόνου. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου το υλικό θα βελτιωθεί. Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

Η ομάδα του lisari

30 – 11 – 2014



lisari team

Αντωνόπουλος Νίκος (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου Κατεύθυνση - Άργος)
Αυγερινός Βασίλης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου ΔΙΑΤΑΞΗ - Ν. Σμύρνη και Νίκαια)
Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο ΒΕΛΑΩΡΑΣ - Λιβαδειά Βοιωτίας)
Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο Ευθύνη - Ρέθυμνο)
Γιαννόπουλος Μιχάλης (Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)
Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο Αστρολάβος - Άρτα)
Δούδης Δημήτρης (3^ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)
Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια Πουκαμισάς Γλυφάδας)
Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο Ώθηση - Αργυρούπολη)
Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο Παπαπαναγιώτου – Παπαπαύλου - Σέρρες)
Κανάβης Χρήστος (Διδακτορικό στο ΕΜΠ – 2ο ΣΔΕ φυλακών Κορυδαλλού)
Καρδαμίτσης Σπύρος (Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων)
Κοπάδης Θανάσης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίων 19+ - Πολύγωνο)
Κουλούρης Αντρέας (3^ο Λύκειο Γαλασίου)
Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο Στόχος - Περιστερί)
Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο Ρηγάκης - Κοζάνη)
Μαρούγκας Χρήστος (3^ο ΓΕΛ Κηφισιάς)
Νάννος Μιχάλης (1^ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)
Νικολόπουλος Θανάσης (Λύκειο Κατασταρίου, Ζάκυνθος)
Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο Φάσμα - Αγρίνιο)
Παντούλας Περικλής (Φροντιστήρια Γούλα-Δημολένη - Ιωάννινα)
Παπαδομανωλάκη Μαρία (Ιδιοκτήτρια Πρότυπου Κέντρου Μάθησης ΔΙΑΚΡΙΣΙΣ - Ρέθυμνο)
Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός Ρόμβος)
Πορίχης Λευτέρης (Γυμνάσιο Λιθακιάς – Ζάκυνθος)
Ράπτης Γιώργος (6^ο ΓΕΛ Βόλου)
Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο Μπαχαράκης - Θεσσαλονίκη)
Σκομπής Νίκος (Συγγραφέας – 1^ο Λύκειο Χαλκίδας)
Σπλήνης Νίκος (Φροντιστήριο ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ - Ηράκλειο Κρήτης)
Σπυριδάκης Αντώνης (Γυμνάσιο Βιάννου - Λασιθί)
Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)
Σταυρόπουλος Σταύρος (Γραμματέας Ε.Μ.Ε Κορινθίας - Γυμνάσιο Α.Τ. Λέχαιου Κορινθίας)
Τηλέγραφος Κώστας (Φροντιστήριο Θεμέλιο - Αλεξανδρούπολη)
Τρύφων Παύλος (1^ο Εσπερινό ΕΠΑΛ Περιστερίου)
Φιλιππίδης Χαράλαμπος (Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί)
Χαραλάμπος Σταύρος (Μουσικό Σχολείο Λαμίας)
Χατζόπουλος Μάκης (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων)

Εκφωνήσεις ασκήσεων 7ου Κεφαλαίου

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (18975)

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=9$ και $A\Gamma=15$. Από το βαρύκεντρο Θ του τριγώνου, φέρουμε ευθεία ε παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$, που τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{E\Gamma} = 2$

Μονάδες 15

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $A\Delta$ και ΓE .

Μονάδες 10

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (19024)

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, το τμήμα ΔE είναι παράλληλο στην πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς τη BE η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Z .

Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{AE}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{AB}$

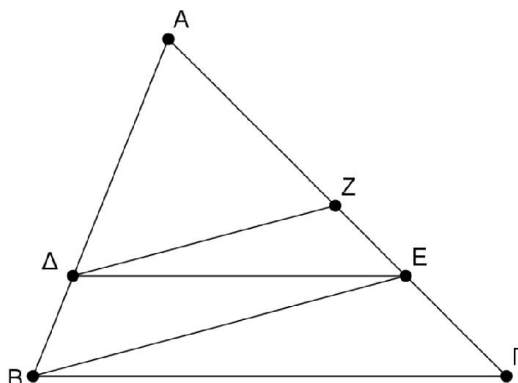
Μονάδες 8

β) $\frac{AZ}{A\Delta} = \frac{AE}{AB}$

Μονάδες 8

γ) $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{AZ}{AE}$

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ Β3 (19026)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τυχαίο σημείο Δ στην πλευρά $B\Gamma$. Φέρνουμε από το σημείο Δ παράλληλες στις πλευρές $A\Gamma$ και AB που τέμνουν αντίστοιχα στις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z .

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{\Delta E}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{B\Gamma}$$

Μονάδες 8

$$\beta) \frac{Z\Delta}{AB} = \frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma}$$

Μονάδες 8

$$\alpha) \frac{\Delta E}{A\Gamma} + \frac{Z\Delta}{AB} = 1$$

Μονάδες 8

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (19031)

Στο κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος, η διχοτόμος της γωνίας A είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$ και τέμνει τη ΔB στο E και τη $\Delta\Gamma$ στο Z .

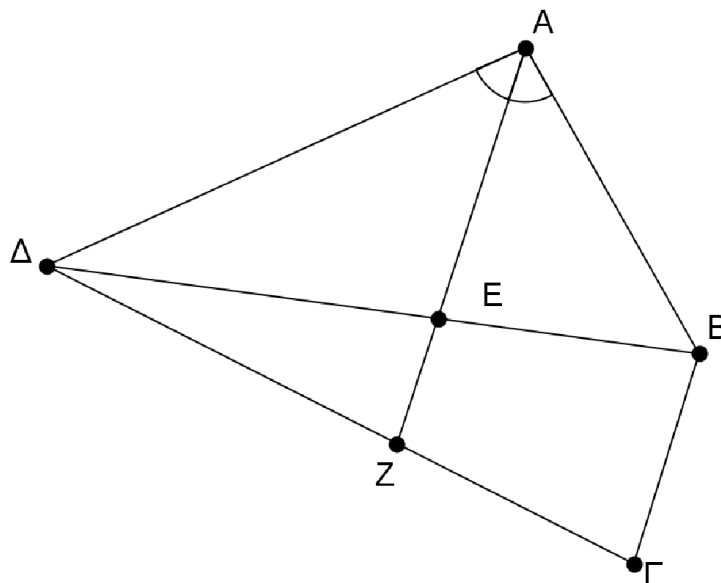
Αν $A\Delta = 12$, $AB = 8$, $\Delta E = 9$ και $Z\Gamma = 6$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) EB = 6$$

Μονάδες 13

$$\beta) \Delta Z = 9$$

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ Β5 (19033)

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ και τα σημεία $Ε$, $Ζ$, $Η$ και $Θ$ των πλευρών του

$ΑΔ$, $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\frac{ΑΕ}{ΑΔ} = \frac{ΑΖ}{ΑΒ} = \frac{ΓΗ}{ΓΒ} = \frac{ΓΘ}{ΓΔ} = \frac{1}{3}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $ΕΖ // ΘΗ // ΔΒ$

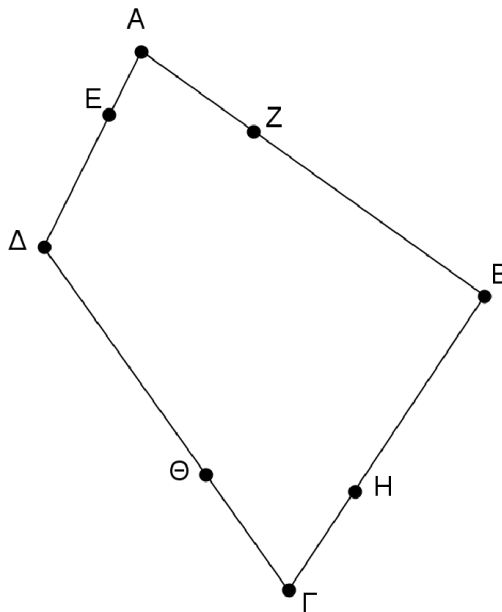
Μονάδες 10

β) $ΕΖ = ΘΗ = \frac{1}{3} ΔΒ$

Μονάδες 10

γ) $ΕΖΗΘ$ παραλληλόγραμμο

Μονάδες 5

**ΑΣΚΗΣΗ Β6 (19036)**

Οι διαγώνιοι του τραπέζιου $ΑΒΓΔ$ ($ΑΒ // ΓΔ$) με $ΓΔ > ΑΒ$ τέμνονται στο $Ο$. Η παράλληλη από το $Β$ προς την $ΑΔ$ τέμνει την $ΑΓ$ στο $Μ$.

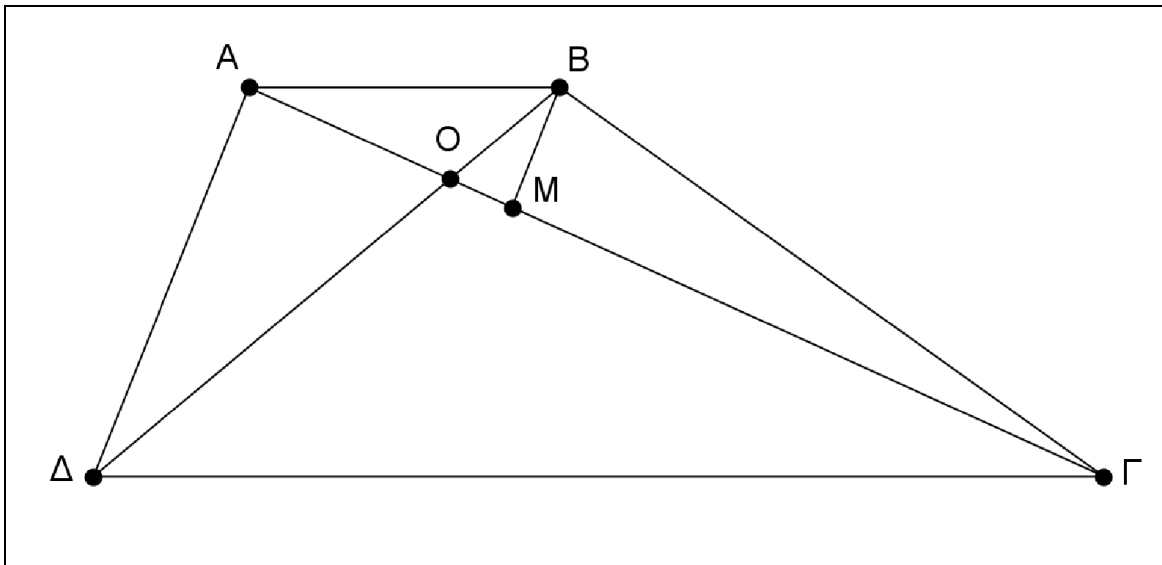
Αν $ΟΑ = 12$, $ΟΒ = 9$ και $ΟΓ = 36$, να αποδείξετε ότι:

α) $ΟΔ = 27$

Μονάδες 12

β) $ΟΜ = 4$

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ Β7 (19040)**

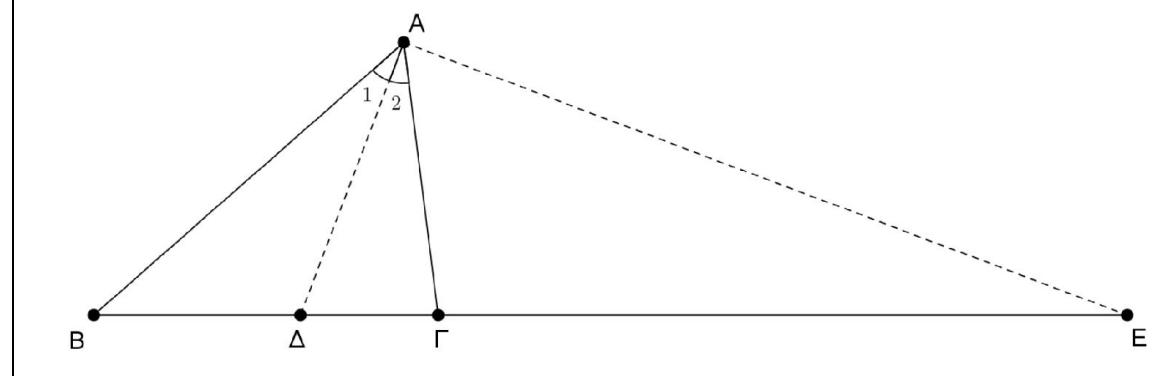
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB > A\Gamma$) και $A\Delta$, $A\epsilon$ η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος του αντίστοιχα. Αν είναι $AB = 6$, $\Delta B = 3$, $B\Gamma = 5$ και $B\epsilon = 15$, να αποδείξετε ότι:

α) $A\Gamma = 4$

Μονάδες 12

β) $\Delta\epsilon = 12$

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ Β8 (22318)**

Δίνεται τρίγωνο $\hat{A}B\hat{A}\Gamma$ με $A\Delta$ διχοτόμο της \hat{A} . Φέρουμε τις διχοτόμους $\Delta\epsilon$ και ΔZ των γωνιών $\hat{A}\Delta B$ και $\hat{A}\Delta\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

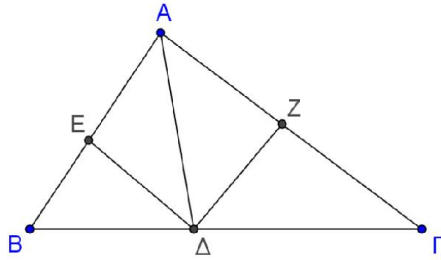
i. $\frac{A\epsilon}{\dots} = \frac{\dots}{\Delta B}$

ii. $\frac{\dots}{Z\Gamma} = \frac{\Delta A}{\dots}$

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{Z\Gamma}{AZ} = \frac{A\Gamma}{AB}$

Μονάδες 15

**ΑΣΚΗΣΗ Β9 (22320)**

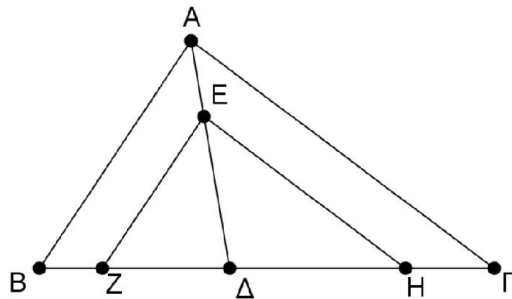
Θεωρούμε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με AD εσωτερική διχοτόμο της γωνίας \hat{A} και E σημείο της AD τέτοιο ώστε $DE = \frac{2}{3}AD$. Από το E φέρνουμε παράλληλες προς τις πλευρές AB και $A\Gamma$ που τέμνουν τη $B\Gamma$ στα Z και H αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $EZ = \frac{2}{3}AB$

(Μονάδες 12)

β) $\frac{\Delta Z}{\Delta H} = \frac{AB}{A\Gamma}$

(Μονάδες 13)



«Θέμα Δ»

Άσκηση Δ1 (18994)

Στην πλευρά AB παραλληλογράμμου $ABΓΔ$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $BE = \frac{1}{3}AB$ και στην πλευρά $ΔΓ$ θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $ΔZ = \frac{1}{3}ΔΓ$. Αν η διαγώνιος $ΑΓ$ τέμνει τις $ΔE$ και BZ στα σημεία M και N αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $AM = ΓN = 2MN$

Μονάδες 13

β) $MN = \frac{1}{5}ΑΓ$

Μονάδες 12

Άσκηση Δ2 (19000) *(τροποποιήθηκε στις 23 – 12 – 2014 το υποερώτημα α)*

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Θεωρούμε $ΑΜ$ τη διάμεσό του και E τυχαίο σημείο του τμήματος $ΒΜ$. Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στην $ΑΜ$ που τέμνει την πλευρά $ΑΒ$ στο $Δ$ και την προέκτασή της $ΓΑ$ στο Z .

α) Να συμπληρώσετε τις αναλογίες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

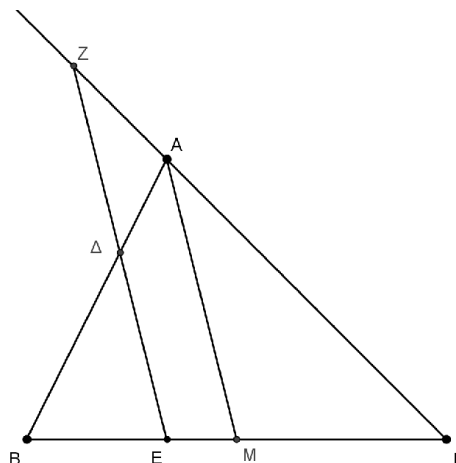
i. $\frac{ΔE}{\dots} = \frac{\dots}{BM} = \frac{BΔ}{\dots}$

ii. $\frac{\dots}{AM} = \frac{ΓE}{\dots} = \frac{\dots}{ΓA}$

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $ΔE + EZ$ είναι σταθερό, για οποιοδήποτε θέση του E στο BM

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (22334)

Δύο οχήματα κινούμενα με σταθερές ταχύτητες v_1 και v_2 , περνούν ταυτόχρονα τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ από τα σημεία A και B αντίστοιχα και συναντιούνται στο σημείο Γ όπως φαίνεται στο σχήμα.

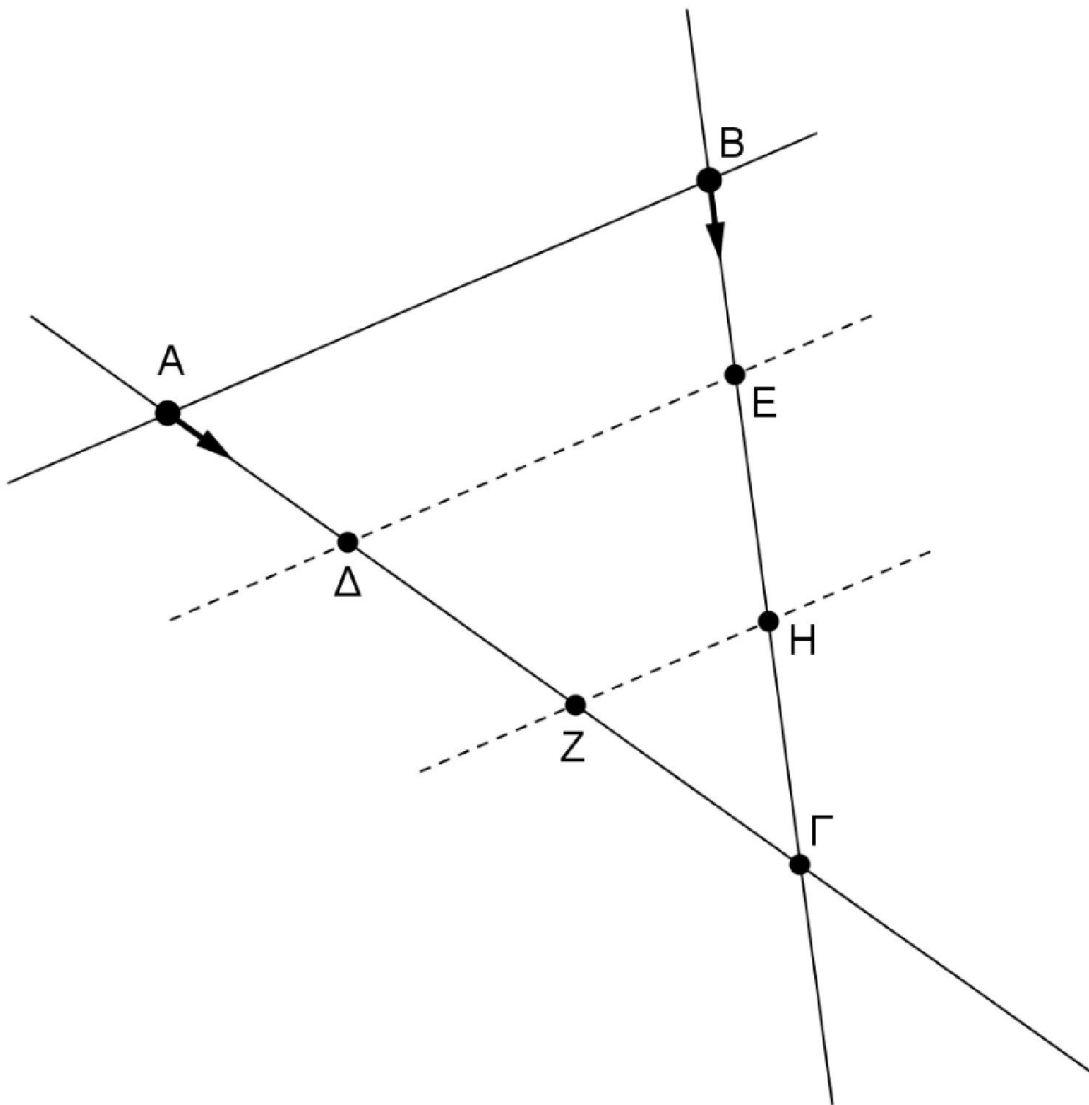
(Δίνεται ότι η ταχύτητα ενός σώματος που κινείται με σταθερή ταχύτητα είναι ίση με το διάστημα που κινήθηκε προς τον αντίστοιχο χρόνο.)

α) Μετά από χρόνο t_1 το όχημα που περνά από το σημείο A βρίσκεται στο σημείο Δ της διαδρομής AΓ ενώ το όχημα που περνά από το σημείο B βρίσκεται στο σημείο E της διαδρομής BΓ. Να αποδείξετε ότι $\Delta E // AB$.

(Μονάδες 12)

β) Έστω Z σημείο της διαδρομής AΓ και H σημείο της διαδρομής BΓ. Αν $ZH // AB$, να αποδείξετε ότι τα οχήματα περνούν ταυτόχρονα από τις θέσεις Z και H.

(Μονάδες 13)



Εκφωνήσεις ασκήσεων 8ου Κεφαλαίου

«Θέμα Β»

Άσκηση Β1 (18984)

Θεωρούμε δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ .

α) Να εξετάσετε σε ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. $AB = 8$, $A\Gamma = 12$, $\hat{A} = 35^\circ$, $\Delta E = 20$, $\Delta Z = 30$, $\hat{\Delta} = 35^\circ$.

ii. $\hat{A} = 47^\circ$, $\hat{B} = 38^\circ$, $\hat{E} = 47^\circ$, $\hat{\Delta} = 95^\circ$

iii. $AB = A\Gamma$, $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\Delta E = \Delta Z$.

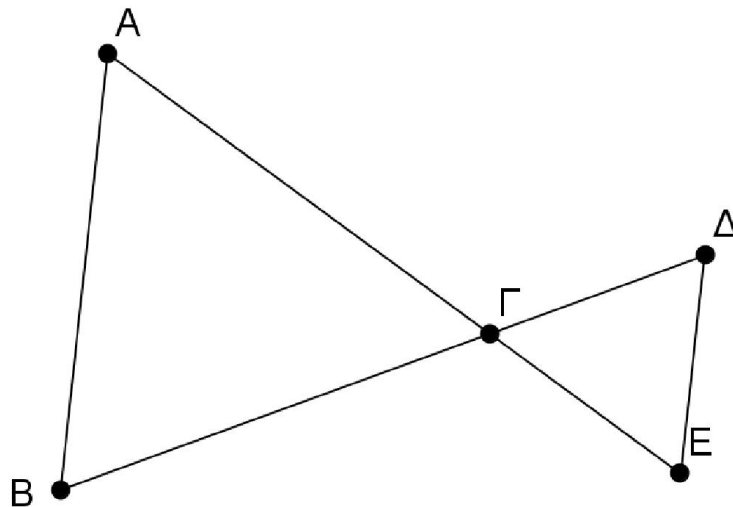
Μονάδες 15

β) Στις περιπτώσεις που το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι όμοιο με το ΔEZ , να γράψετε τους ίσους λόγους των ομόλογων πλευρών τους.

Μονάδες 10

Άσκηση Β2 (18990)

Στο παρακάτω σχήμα τα τμήματα AE και $B\Delta$ τέμνονται στο Γ .



Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Delta\Gamma$ είναι όμοια σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $AB \parallel \Delta E$

Μονάδες 12

β) $B\Gamma = 2\Delta\Gamma$ και $E\Gamma = \frac{1}{2}A\Gamma$

Μονάδες 13

Άσκηση Β3 (18993)

α) Να εξετάσετε αν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $A\Gamma = 4$, $B\Gamma = 16$, $BA = 18$, $\Delta Z = 10$, $EZ = 40$, $\Delta E = 48$.

ii. $\hat{A} = 63^\circ, \hat{\Gamma} = 83^\circ, \hat{\Lambda} = 63^\circ, \hat{E} = 34^\circ$

Μονάδες 15

β) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 6, ΑΓ = 7 και ΒΓ = 8. Ποιο θα είναι το μήκος των πλευρών ενός τριγώνου ΔΕΖ το οποίο είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ, με λόγο ομοιότητας 3;

Μονάδες 10

Άσκηση Β4 (19011)

Από ένα σημείο Σ που βρίσκεται έξω από έναν δοσμένο κύκλο φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ, ΣΒ και μία τέμνουσα ΣΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) i) τα τρίγωνα ΣΒΓ και ΣΔΒ είναι όμοια

ii) τα τρίγωνα ΣΑΓ και ΣΔΑ είναι όμοια

Μονάδες 16

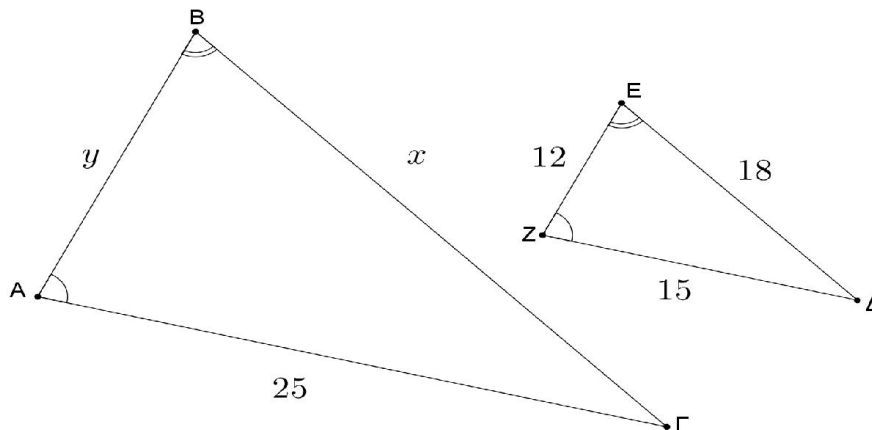
β) $ΑΓ \cdot ΒΔ = ΑΔ \cdot ΒΓ$

Μονάδες 9

Άσκηση Β5 (19014)

Τα παρακάτω τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν

$$\hat{A} = \hat{Z}, \hat{B} = \hat{E}, ΑΓ = 25, ΕΖ = 12, ΕΔ = 18 \text{ και } ΖΔ = 15$$



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια

Μονάδες 8

β) Να συμπληρώσετε την ισότητα των λόγων με τις κατάλληλες πλευρές του τριγώνου

ΔΕΖ:

$$\frac{BA}{\dots} = \frac{ΑΓ}{\dots} = \frac{ΓΒ}{\dots}$$

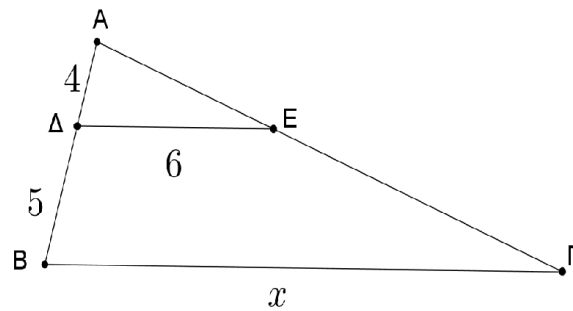
Μονάδες 9

γ) Να υπολογίσετε τα x και y

Μονάδες 8

Άσκηση Β6 (19015)

Στο σχήμα που ακολουθεί, το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στη πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και επιπλέον ισχύουν ΑΔ = 4, ΔΒ = 5 και ΔΕ = 6.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια

Μονάδες 9

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα:

$$\frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\dots}$$

Μονάδες 9

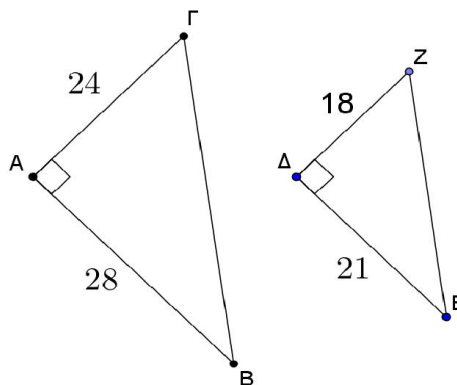
γ) Ένας μαθητής χρησιμοποιεί την αναλογία $\frac{4}{6} = \frac{5}{x}$ για να υπολογίσει το x . Να

εξηγήσετε γιατί αυτή η αναλογία είναι λάθος, να γράψετε τη σωστή και να υπολογίσετε το x

Μονάδες 7

Άσκηση Β7 (19017)

Τα παρακάτω τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ορθογώνια με ορθές τις γωνίες \hat{A} και $\hat{\Delta}$ αντίστοιχα. Επιπλέον, για τις πλευρές των τριγώνων $AB\Gamma$ και ΔEZ ισχύουν $AB = 28$, $A\Gamma = 24$ και $\Delta E = 21$, $\Delta Z = 18$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια

Μονάδες 10

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα:

$$\frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\dots}$$

Μονάδες 9

γ) Από τις παρακάτω ισότητες να επιλέξετε τη σωστή:

i) $ZE = \frac{18}{21} \Gamma B$ ii) $ZE = \frac{24}{28} \Gamma B$ iii) $ZE = \frac{3}{4} \Gamma B$ iv) $ZE = \frac{4}{3} \Gamma B$

Μονάδες 6

Άσκηση Β8 (19019)

Στο σχήμα που ακολουθεί ισχύουν

$$AB \parallel \Delta\Gamma, \quad AE = 6, \quad AB = 8, \quad \Gamma E = 15 \quad \text{και} \quad \Delta E = 10.$$

α) Να βρείτε δύο ζεύγη ίσων γωνιών των τριγώνων AEB και $\Delta E\Gamma$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

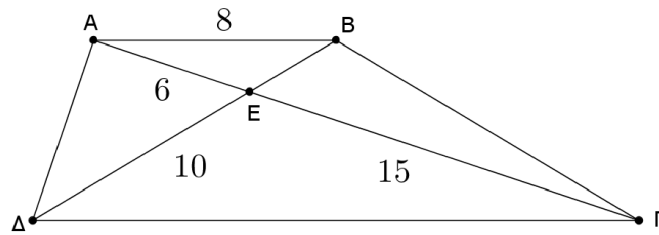
Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEB και $\Delta E\Gamma$ είναι όμοια και να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών τους

Μονάδες 9

γ) Να υπολογίσετε τα τμήματα BE και $\Delta\Gamma$

Μονάδες 8

**Άσκηση Β9 (19021)**

Να χρησιμοποιήσετε τις πληροφορίες που σας δίνονται για το κάθε ζεύγος τριγώνων των παρακάτω σχημάτων προκειμένου να απαντήσετε στα ακόλουθα :

α) Ποιο από τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι όμοια και ποια δεν είναι; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 8

β) Για το ζεύγος ομοίων τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος

i) να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών

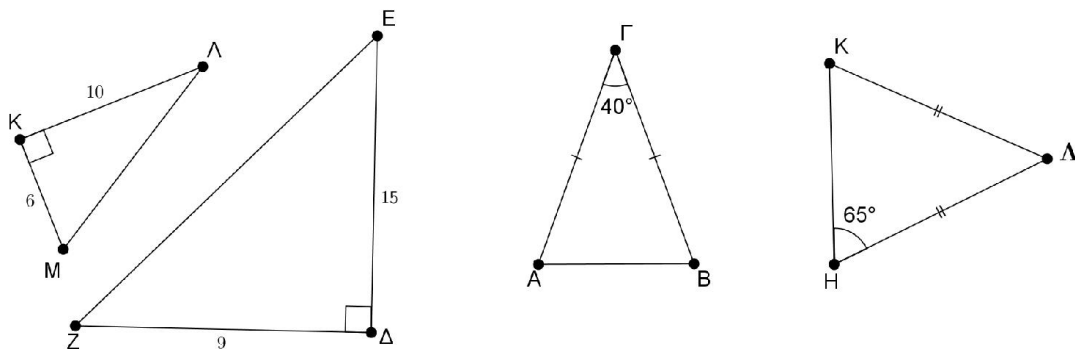
Μονάδες 8

ii) να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

Μονάδες 8

1ο ζεύγος: τρίγωνα $K\Lambda M$ και $Z\Delta E$

2ο ζεύγος: τρίγωνα $AB\Gamma$ και $HK\Lambda$



Άσκηση Β10 (19023)

Στο παρακάτω σχήμα, τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ και ΚΛΜΝΡ είναι όμοια και έχουν $\widehat{\Delta} = \widehat{N}$ και $\widehat{B} = \widehat{\Lambda}$

α) Να προσδιορίσετε το λόγο ομοιότητάς τους. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

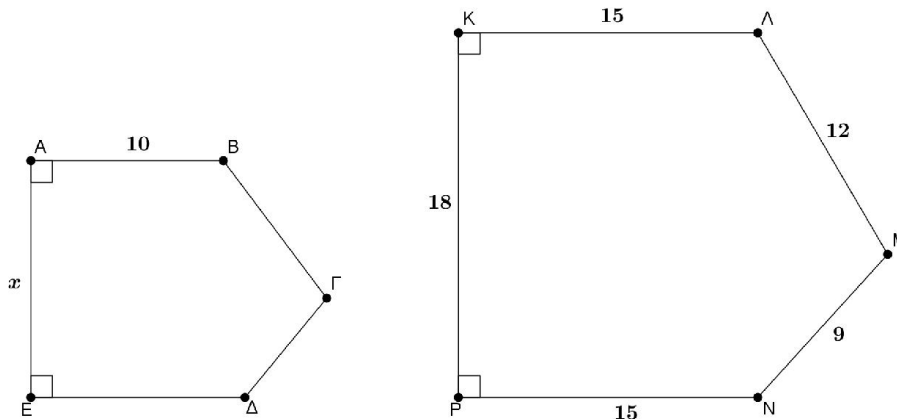
Μονάδες 8

β) Να υπολογίσετε το μήκος x της πλευράς ΑΕ

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε την περίμετρο του πολυγώνου ΑΒΓΔΕ

Μονάδες 9

**Άσκηση Β11 (19030)**

Στη διχοτόμο Οδ της γωνίας $\chi\widehat{O}y$ θεωρούμε τα σημεία Α, Β τέτοια ώστε $OB = 2 \cdot OA$. Η κάθετος στην Οδ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά Οχ στο σημείο Ε και έστω Δ η προβολή του Β στην Οy.

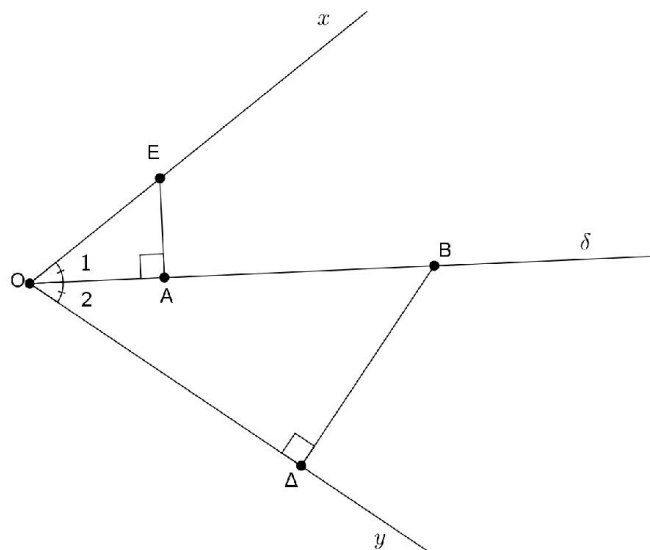
Να αποδείξετε ότι :

α) Τα τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΒΔ είναι όμοια

Μονάδες 10

β) $2 \cdot OA^2 = OD \cdot OE$

Μονάδες 15



Άσκηση Β12 (19035)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ και E των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα ώστε

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{3}. \text{ Από το σημείο } E \text{ φέρνουμε παράλληλη προς την } AB, \text{ η οποία τέμνει}$$

την $B\Gamma$ στο σημείο Z .

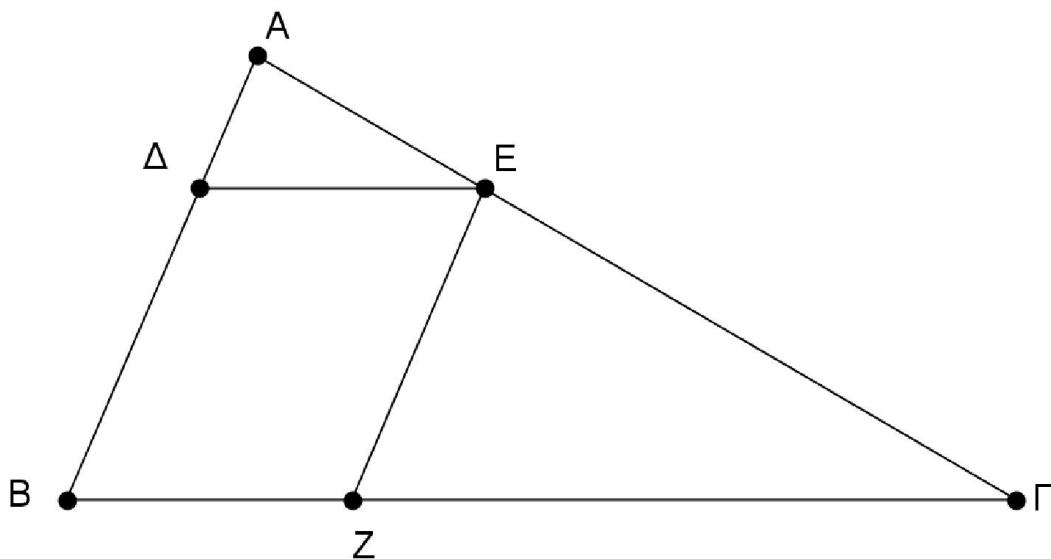
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) $3BZ = B\Gamma$

(Μονάδες 15)

**ΑΣΚΗΣΗ Β13 (22308)**

Στο ακόλουθο σχήμα είναι $\hat{A}\Delta E = \hat{A}\Gamma B$ και $B\Gamma = 6$.

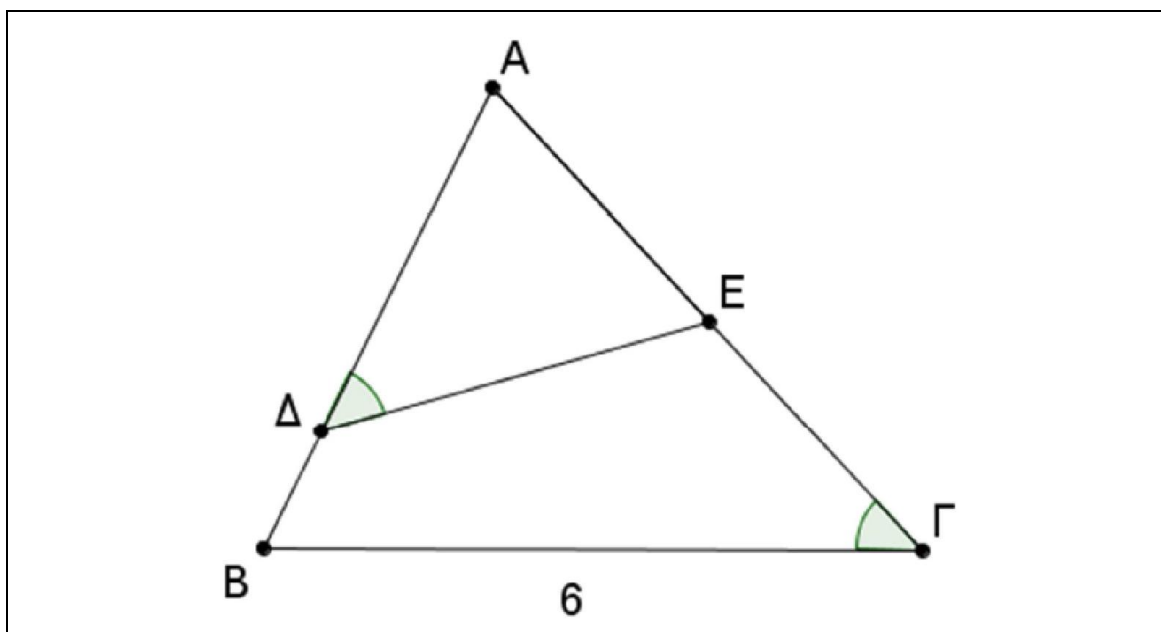
α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια και να

συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα $\frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\dots}$

Μονάδες 15

β) Αν ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ίσος με $\frac{3}{2}$, να βρείτε το μήκος του τμήματος ΔE .

Μονάδες 10



«Θέμα Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (18976)

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τα ύψη του $A\Delta$ και BE .

α) Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και σκαληνό, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$ είναι όμοια.

Μονάδες 10

ii. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $A\Delta B$ και BEA δεν μπορεί να είναι όμοια.

Μονάδες 10

β) Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και ισοσκελές με κορυφή το Γ , τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα τρίγωνα $A\Delta B$ και BEA είναι όμοια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Άσκηση Δ2 (19016) *(τροποποιήθηκε στις 23 – 12 – 2014)*

Στο παρακάτω σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία E και Δ στις πλευρές AB

και $A\Gamma$ αντίστοιχα, έτσι ώστε να ισχύουν: $AE = \frac{2}{3} AB$ και $A\Delta = \frac{2}{3} A\Gamma$

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{A\epsilon\Delta} = \widehat{A\Gamma B}$

Μονάδες 9

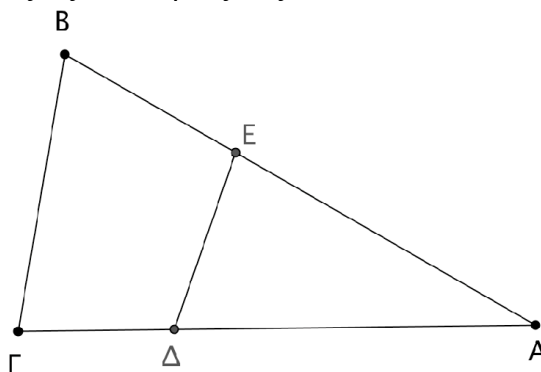
β) Να εξετάσετε αν ισχύει $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{E\Delta}{B\Gamma}$

Μονάδες 8

γ) Να εξετάσετε αν το τμήμα $B\Gamma$ είναι παράλληλο στο τμήμα ΔE

Μονάδες 8

Να αιτιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας

**ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (19027)** *(τροποποιήθηκε στις 23 – 12 – 2014 – αφαιρέθηκε το δ υποερώτημα)*

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ και E των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα,

ώστε $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{3}$. Από το σημείο A φέρουμε ευθεία (ϵ) παράλληλη στη $B\Gamma$. Η

ευθεία (ϵ) τέμνει τις προεκτάσεις των BE και $\Gamma\Delta$ στα σημεία Z και H αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

α) $\Delta E // \Gamma B$

Μονάδες 8

β) $Z E = \frac{1}{2} E B$

Μονάδες 8

γ) $A Z = \frac{1}{2} B \Gamma$

Μονάδες 9

Άσκηση Δ4 (19029) (τροποποιήθηκε στις 23 – 12 – 2014 – αφαιρέθηκε το δ υποερώτημα)Δίνεται τραπέζιο $A B \Gamma \Delta$ ($A B // \Gamma \Delta$) και σημείο M της πλευράς του $A \Delta$ ώστε $\frac{A M}{A \Delta} = \frac{1}{3}$ Από το M φέρνουμε παράλληλη προς τις βάσεις του τραpezίου, η οποία τέμνει τις $A \Gamma$ και $B \Gamma$ στα σημεία K και N αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) $\frac{A K}{A \Gamma} = \frac{1}{3}$

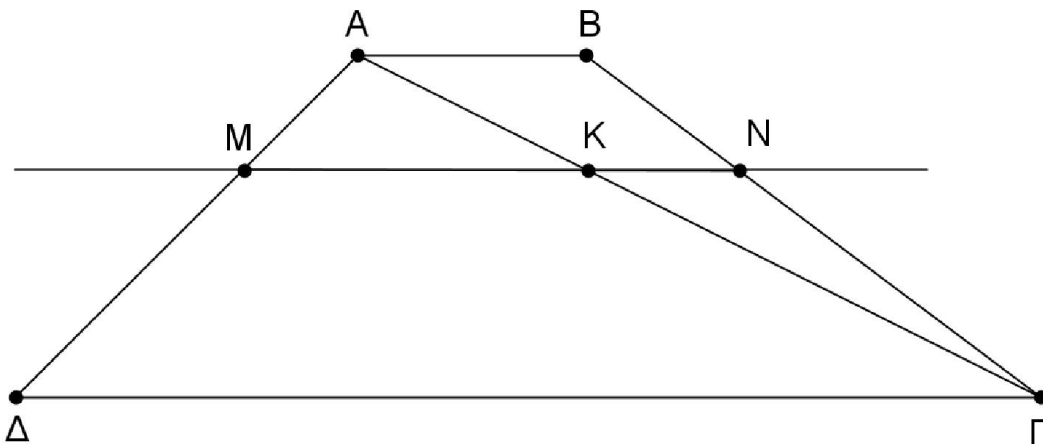
Μονάδες 8

β) $\frac{K N}{A B} = \frac{2}{3}$

Μονάδες 8

γ) $M N = \frac{1}{3} \Gamma \Delta + \frac{2}{3} A B$

Μονάδες 9

**Άσκηση Δ5 (19039)** (τροποποιήθηκε το β υποερώτημα στις 23 – 12 – 2014)Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $A B \Gamma$ με $A B = A \Gamma$, $\hat{A} = 36^\circ$ και η διχοτόμος του $B \Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i) Τα τρίγωνα $B \Delta \Gamma$ και $A B \Gamma$ είναι όμοια.

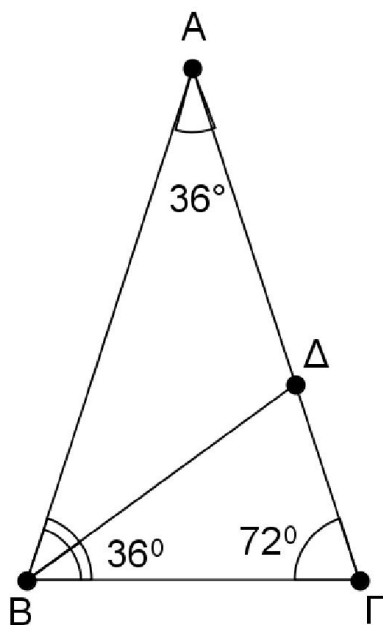
Μονάδες 6

ii) $A \Delta^2 = A \Gamma \cdot \Delta \Gamma$

Μονάδες 9

β) Αν $AG = 1$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $A\Delta$

Μονάδες 10

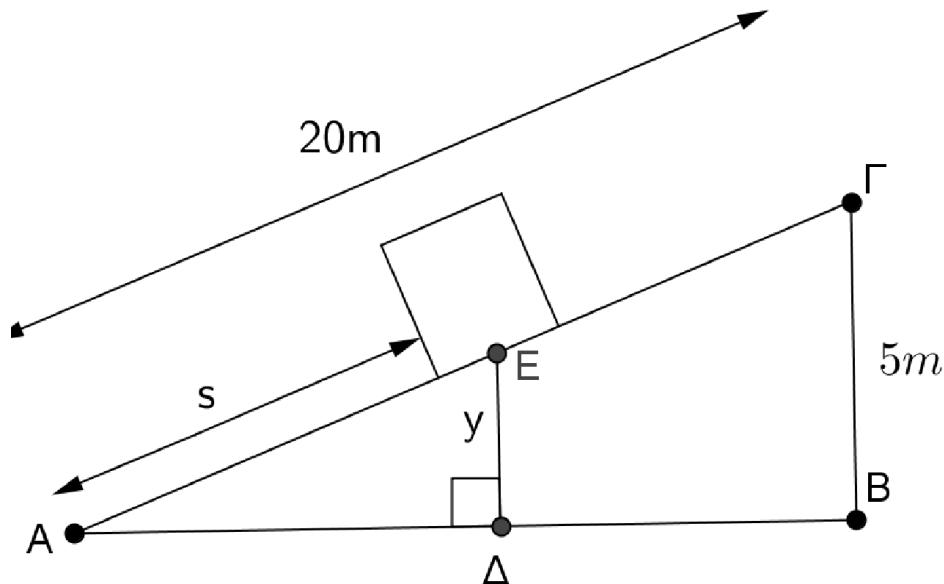


Εκφωνήσεις ασκήσεων 9ου Κεφαλαίου

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (18997)

Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί προς τα πάνω στη ράμπα του παρακάτω σχήματος.



α) Να αποδείξετε ότι για το ύψος y , που απέχει το κουτί από το έδαφος κάθε χρονική στιγμή, ισχύει ότι $y = \frac{s}{4}$, όπου s το μήκος που έχει διανύσει το κουτί πάνω στη ράμπα.

Μονάδες 15

β) Όταν το κουτί απέχει από το έδαφος 2 m, να βρείτε:

i. Το μήκος s που έχει διανύσει το κουτί στη ράμπα.

Μονάδες 3

ii. Την απόσταση του σημείου Δ από την άκρη της ράμπας A .

Μονάδες 7

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (19001)

Τα μήκη των πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $\alpha=8$, $\beta=6$ και $\gamma=5$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

Μονάδες 11

β) Να υπολογίσετε τις προβολές της πλευράς AB στις πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$.

Μονάδες 14

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (19005)

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η διχοτόμος της γωνίας \hat{A} τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ σε σημείο Δ , τέτοιο

$$\text{ώστε } \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{3}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι $AB = \frac{3}{4}AG$

Μονάδες 12

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $BΓ = \frac{5}{4}AG$, να εξετάσετε αν το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ορθογώνιο. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (19008)

α) Ποιες από τις παρακάτω τριάδες θετικών αριθμών μπορούν να θεωρηθούν μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i) 3, 4, 5

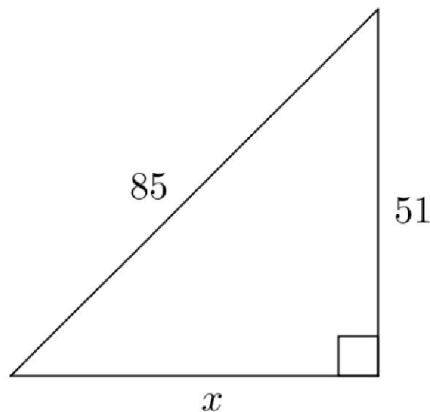
ii) $3\lambda, 4\lambda, 5\lambda$ με $\lambda > 0$

iii) 4, 5, 6

Μονάδες 18

β) Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο, να αποδείξετε ότι το x είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4.

Μονάδες 7



ΑΣΚΗΣΗ Β5 (19041)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με ύψος AD και $AG = 8$, $\Delta Γ = \frac{32}{5}$. Να

υπολογίσετε τα μήκη των παρακάτω τμημάτων:

α) $BΓ$

Μονάδες 9

β) AB

Μονάδες 8

γ) AD

Μονάδες 8

ΑΣΚΗΣΗ Β6 (19042)

Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ με πλευρές $\alpha = 7$, $\beta = 4$ και $\mu_\beta = \sqrt{33}$

α) Να αποδείξετε ότι $\gamma = 5$

Μονάδες 13

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις γωνίες του.

Μονάδες 12

ΑΣΚΗΣΗ Β7 (19045)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $AB = 6$, $B\Gamma = 9$ και $\hat{B} = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = 3\sqrt{7}$

Μονάδες 8

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις γωνίες του

Μονάδες 8

γ) Να υπολογίσετε την προβολή της AB πάνω στη $B\Gamma$

Μονάδες 9

ΑΣΚΗΣΗ Β8 (2_22291)

Δίνεται κύκλος (K, R) και δύο διαμέτροί του AB και $\Gamma\Delta$. Έστω M εξωτερικό σημείο του κύκλου τέτοιο, ώστε $AM=10$, $BM=12$ και $\Gamma M=14$.

α) Να αποδείξετε ότι $MA^2 + MB^2 = 2(MK^2 + R^2)$

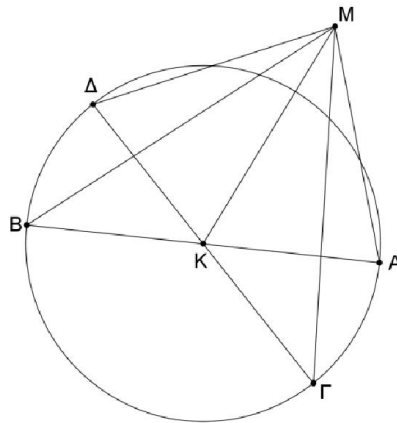
Μονάδες 9

β) Να αποδείξετε ότι $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 2(MK^2 + R^2)$

Μονάδες 7

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του ΔM

Μονάδες 9



ΑΣΚΗΣΗ Β9 (2_22289)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με μήκη πλευρών $\alpha = 5$, $\beta = 7$ και $\gamma = 3$

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = 120^\circ$

Μονάδες 12

β) Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς α πάνω στην ευθεία AB

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ Β10 (22293)

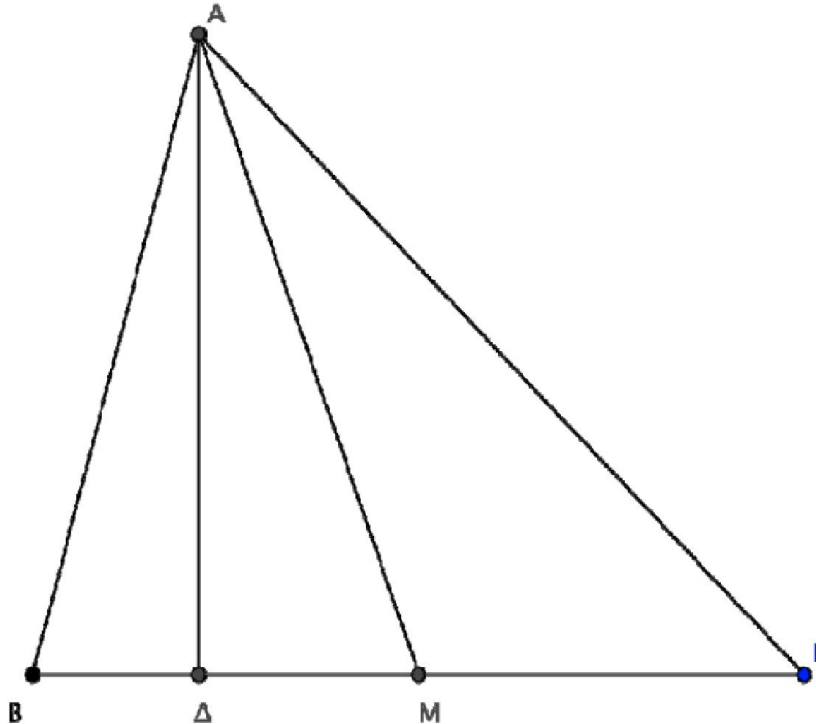
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=12$, $A\Gamma=6$ και $B\Gamma=8$.

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις γωνίες του

	Μονάδες 10
β) Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην ευθεία ΒΓ	
	Μονάδες 15

ΑΣΚΗΣΗ Β11 (22304)

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $AB = 6$, $AG = 8$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και τη διάμεσο ΑΜ και ισχύει ότι: $DM = 2$.



α) Να αποδείξετε ότι $BΓ = 7$.

Μονάδες 12

β) Να βρείτε το μήκος του ύψους ΑΔ.

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ Β12 (22306)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών $BΓ = a\sqrt{3}$, $AG = a\sqrt{2}$ και $AB = a$, όπου $a > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να βρείτε ποια είναι η ορθή γωνία.

Μονάδες 12

β) $\mu_\gamma = \frac{3a}{2}$, όπου μ_γ η διάμεσος του ΑΒΓ που αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΒ.

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ Β13 (22309)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ για το οποίο έχουμε $\beta = 7$, $\gamma = 6$ και η διάμεσος του $\mu_a = \frac{\sqrt{89}}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $a = 9$.

Μονάδες 13

β) Να υπολογίσετε την προβολή ΜΔ της διαμέσου ΑΜ πάνω στην πλευρά α

Μονάδες 12

ΑΣΚΗΣΗ Β14 (22311)

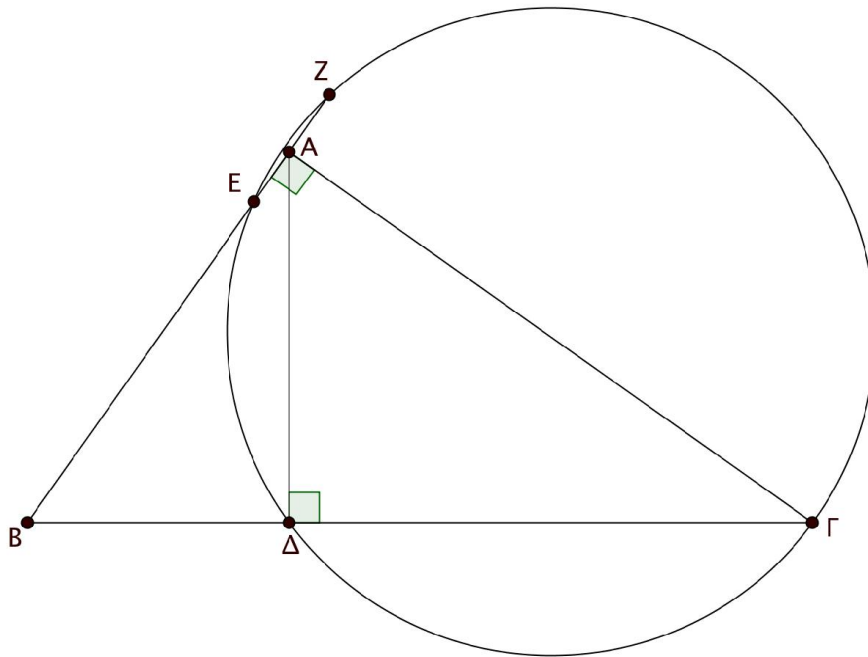
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και το ύψος του $A\Delta$. Ένας κύκλος διέρχεται από τα σημεία Δ , Γ και τέμνει την BA στο E και την προέκτασή της στο Z έτσι ώστε $BE = 6$, $BZ = 8$ και $B\Delta = 4$. Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων :

α) $B\Gamma$

Μονάδες 12

β) AB

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ Β15 (22312)**

Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} > 90^\circ$) φέρουμε τα ύψη του $A\Delta$, BE και ΓZ .

α) Ποια από τις παρακάτω ισότητες είναι λανθασμένη ; Στη συνέχεια να την γράψετε σωστά

Α. $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot B\Delta$

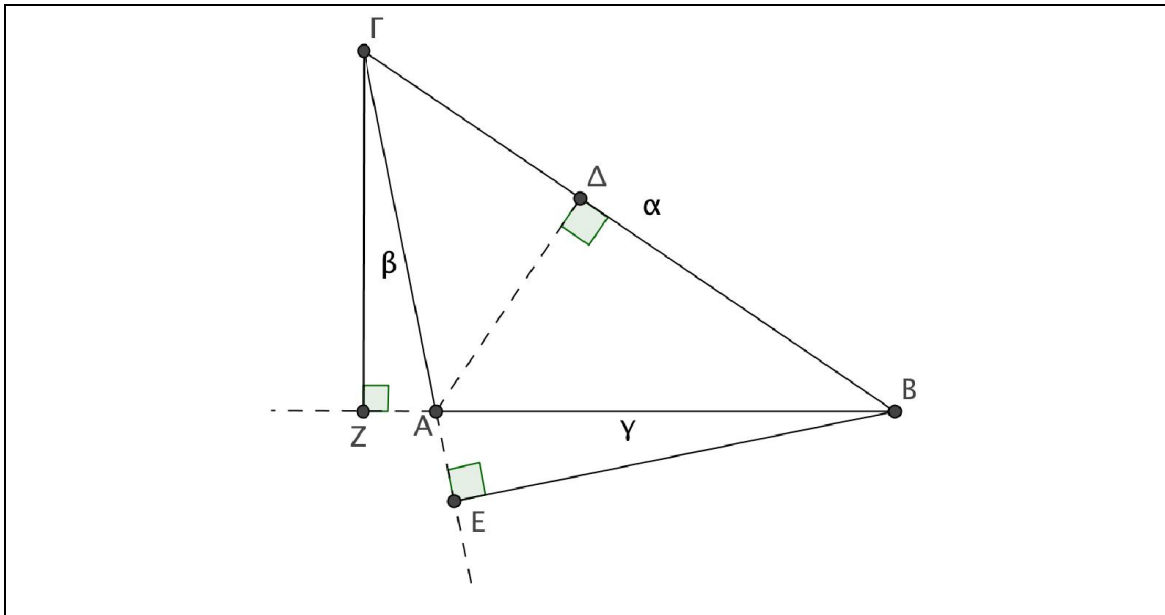
Β. $\gamma^2 = \beta^2 + \alpha^2 - 2\beta \cdot AE$

Γ. $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot AE$

Μονάδες 12

β) Αν $\alpha = 7$, $\beta = 4$ και $\gamma = 5$, να υπολογίσετε την προβολή της $B\Gamma$ πάνω στην $A\Gamma$.

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ Β16 (22313)**

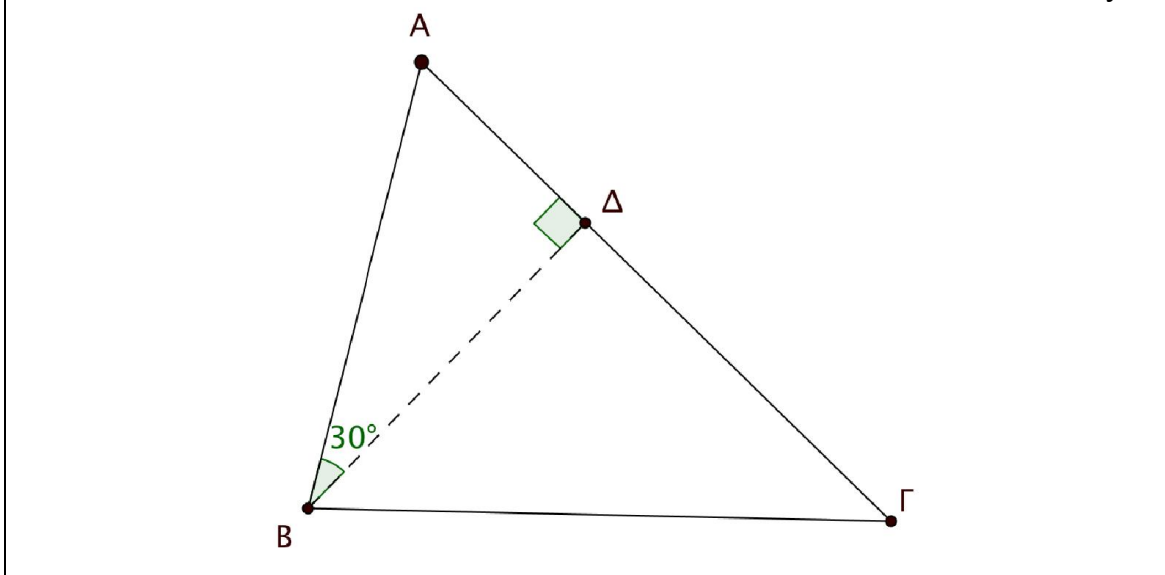
Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε το ύψος του $B\Delta$. Αν $AB = 7$, $A\Gamma = 10$ και $\widehat{AB\Delta} = 30^\circ$, να υπολογίσετε :

α) το τμήμα $A\Delta$.

Μονάδες 8

β) την πλευρά $B\Gamma$

Μονάδες 17

**ΑΣΚΗΣΗ Β17 (2_22316)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 18$ cm και $B\Gamma = 30$ cm. Η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ . Αν $A\Delta = 9$ cm τότε:

α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς $A\Gamma$.

Μονάδες 13

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 12

«Θέμα Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (18985)

Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε δύο χορδές AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται σε ένα σημείο M .

α) Αν το σημείο A είναι μέσο του τόξου $\Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι:

i) Όταν η χορδή AB είναι κάθετη στη χορδή $\Gamma\Delta$, τότε $AM \cdot AB = A\Gamma^2$

Μονάδες 8

ii) Όταν η χορδή AB δεν είναι κάθετη στη χορδή $\Gamma\Delta$, ισχύει η σχέση $AM \cdot AB = A\Gamma^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

β) Αν για τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται στο M ισχύει ότι $AM \cdot AB = A\Gamma^2$, να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι μέσο του τόξου $\Gamma\Delta$.

Μονάδες 8

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (19006)

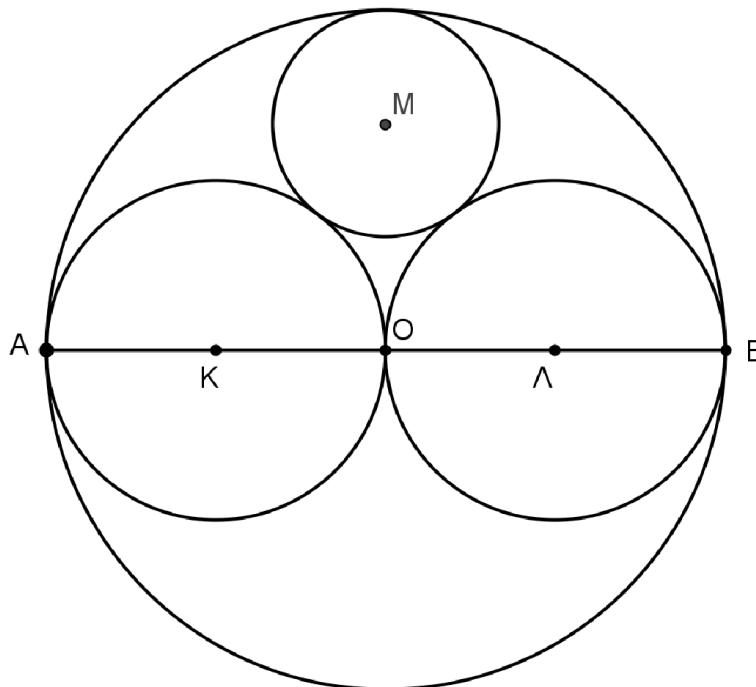
Δίνεται κύκλος (O, R) και μια διάμετρος του AB . Με διαμέτρους τα τμήματα OA και OB γράφουμε τους κύκλους κέντρων K και Λ αντίστοιχα. Ένας τέταρτος κύκλος κέντρου M και ακτίνας ρ εφάπτεται εξωτερικά των κύκλων κέντρων K και Λ και εσωτερικά του κύκλου με κέντρο O .

α) Να εκφράσετε τις διακέντρους KM , ΛM και OM των αντίστοιχων κύκλων ως συνάρτηση των ακτίνων τους, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι $\rho = \frac{R}{3}$

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (19009)

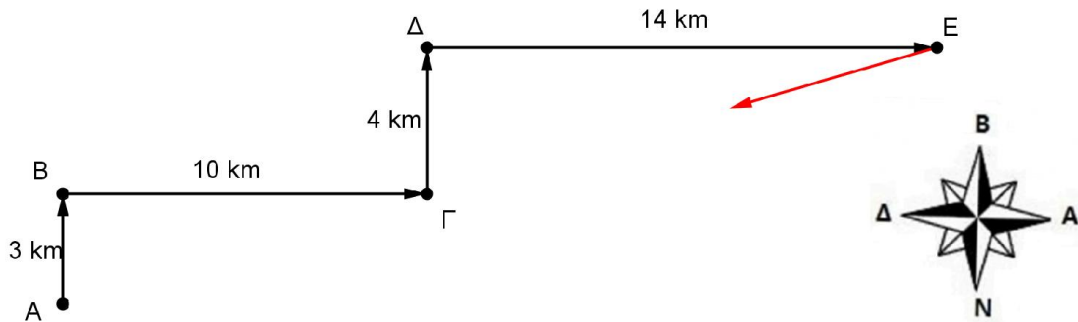
Ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο A και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια προχωράει 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο E.

α) Αν από το σημείο E επιστρέψει στο σημείο A από το οποίο ξεκίνησε, κινούμενο ευθύγραμμα, να βρείτε την απόσταση AE που θα διανύσει.

Μονάδες 12

β) Τα σημεία A, Γ και E είναι συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (19025)**

Κυρτό τετράπλευρο ABΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ τέμνονται σε σημείο Μ, το οποίο είναι το μέσο της διαγωνίου ΒΔ.

Να αποδείξετε ότι :

α) $\Delta B^2 = 4MA \cdot M\Gamma$

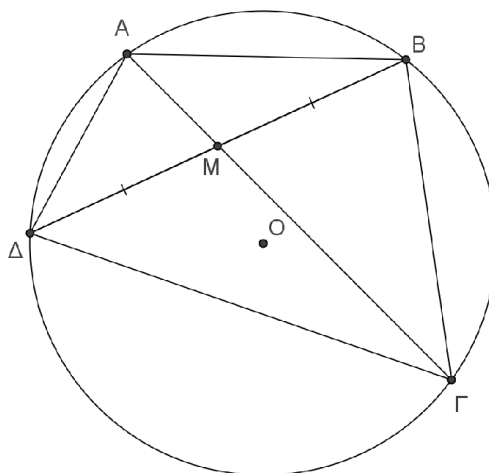
Μονάδες 7

β) $AB^2 + A\Delta^2 = 2AM \cdot A\Gamma$

Μονάδες 9

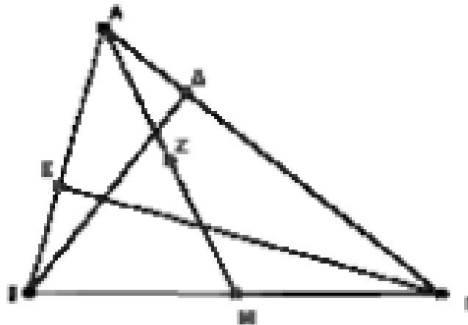
γ) $AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + A\Delta^2 = 2A\Gamma^2$

Μονάδες 9



ΑΣΚΗΣΗ Δ5 (22323)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές α, β, γ για το οποίο ισχύει ότι: $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$. Φέρουμε τα ύψη BD, GE και τη διάμεσο AM το μέσο της οποίας είναι το σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:



α) $\hat{A} < 90^\circ$

Μονάδες 6

β) $AE = \frac{\alpha^2}{2\gamma}$

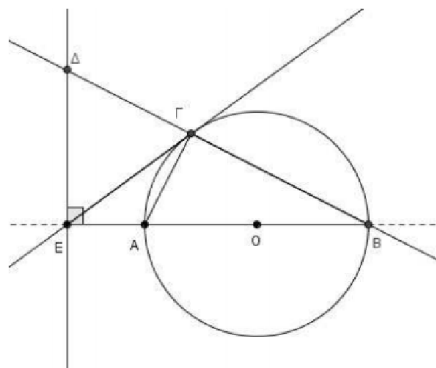
Μονάδες 10

γ) $AM = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

Μονάδες 9

ΑΣΚΗΣΗ Δ6 (22324)

Δίνεται κύκλος κέντρου O και μία διάμετρος του AB . Από σημείο E στην προέκταση της διαμέτρου AB προς το A , φέρουμε την εφαπτομένη EG του κύκλου. Η κάθετη στην AB στο σημείο E , τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) σε σημείο Δ .



α) Να επιλέξετε τη σωστή ισότητα:

i. $EG^2 = EA \cdot AB$ **ii.** $EG^2 = EA \cdot EB$ **iii.** $EG^2 = EO \cdot EB$ **iv.** $EG^2 = EO \cdot OB$

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι:

i. $B\Gamma \cdot B\Delta = BA \cdot BE$

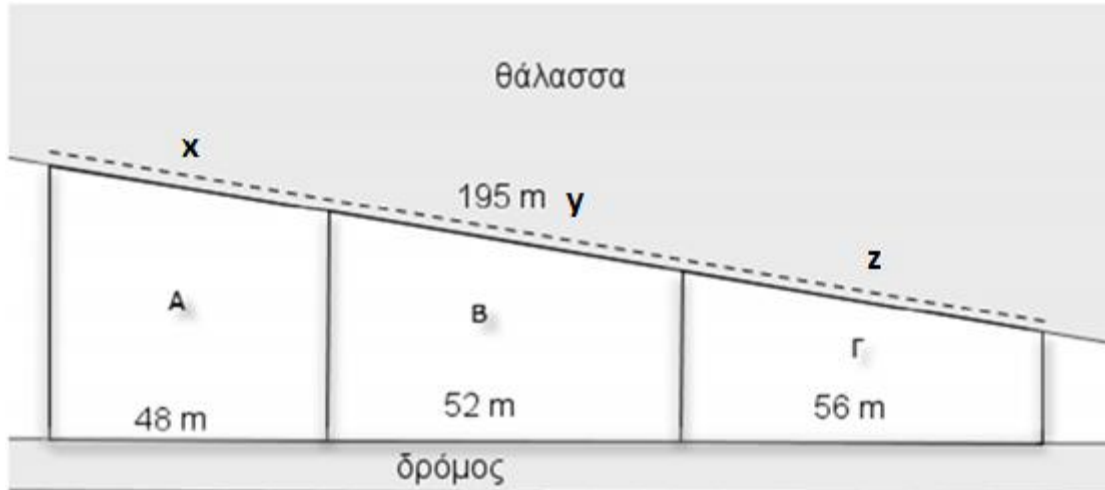
Μονάδες 9

ii. $EB^2 = EG^2 + B\Gamma \cdot B\Delta$

Μονάδες 9

ΑΣΚΗΣΗ Δ7 (22335)

Ιδιοκτήτης μεγάλης ακίνητης περιουσίας διαθέτει προς πώληση μια ιδιοκτησία του, η οποία περιλαμβάνει τρία διαδοχικά οικοπέδα με συνολική πρόσοψη 195 m σε ακτή θάλασσας, τα οποία αποτυπώνονται στο σχέδιο που ακολουθεί. Οι επιφάνειες της ιδιοκτησίας και των οικοπέδων είναι σχήματος ορθογωνίου τραπεζίου. Σημειώνεται ότι, ως πρόσοψη οικοπέδου θεωρείται το μήκος της πλευράς του οικοπέδου που συνορεύει με την ακτή της θάλασσας.



(σημειώνεται ότι το σχέδιο δεν έχει γίνει υπό κλίμακα)

α) Να υπολογίσετε το μήκος της πρόσοψης του κάθε οικοπέδου.

(Μονάδες 12)

β) Αν τα μήκη των δυο άλλων πλευρών της ιδιοκτησίας είναι ανάλογα των αριθμών 2 και 1, να υπολογίσετε την περίμετρο της ιδιοκτησίας. (Δίνεται ότι $\sqrt{13689} = 117$)

(Μονάδες 13)

Εκφωνήσεις ασκήσεων 10ου Κεφαλαίου

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (19028)

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και BE το ύψος του. Αν είναι $AB = 3$, $\Gamma\Delta = 7$ και $B\Gamma = 4$ τότε ,

α) Να αποδείξετε ότι $BE = 2\sqrt{3}$

Μονάδες 12

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (19038)

Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB κέντρου O θεωρούμε σημείο του Δ . Η χορδή ΔB τέμνει το ημικύκλιο διαμέτρου OB στο Γ .

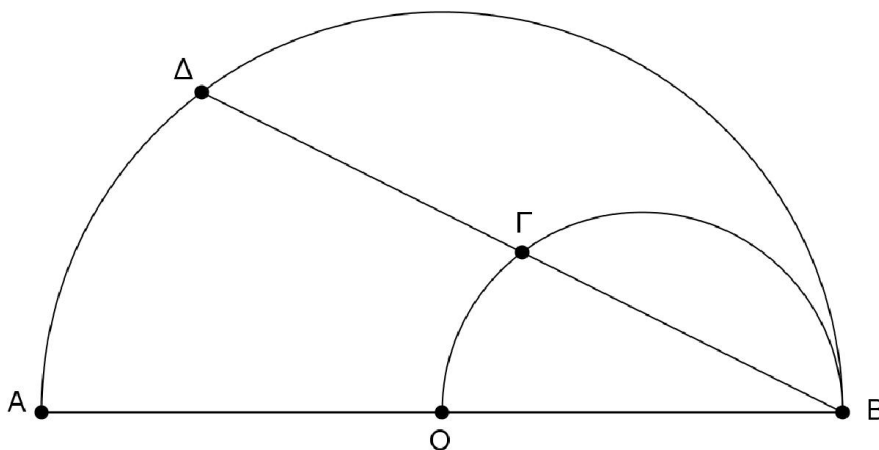
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $O\Gamma B$ είναι όμοια.

Μονάδες 12

β) $(A\Delta B) = 4(O\Gamma B)$

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ Β3 (19043)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $A\Gamma = 4$ και ύψος $A\Delta = \frac{12}{5}$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $\Delta\Gamma$.

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta B = \frac{9}{5}$

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 5

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (22289)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ εσωτερικό σημείο του ΒΓ. Φέρνουμε από το Δ παράλληλες στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Η παράλληλη στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ και η παράλληλη στην ΑΓ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε. Θεωρούμε Κ και Λ τα μέσα των ΒΔ και ΔΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(ΕΚΔ) = \frac{1}{2}(ΒΕΔ)$

Μονάδες 7

β) $(ΕΔΖ) = \frac{1}{2}(ΑΕΔΖ)$

Μονάδες 7

γ) $2(ΚΕΖΛ) = (ΑΒΓ)$

Μονάδες 11

ΑΣΚΗΣΗ Β5 (22294)

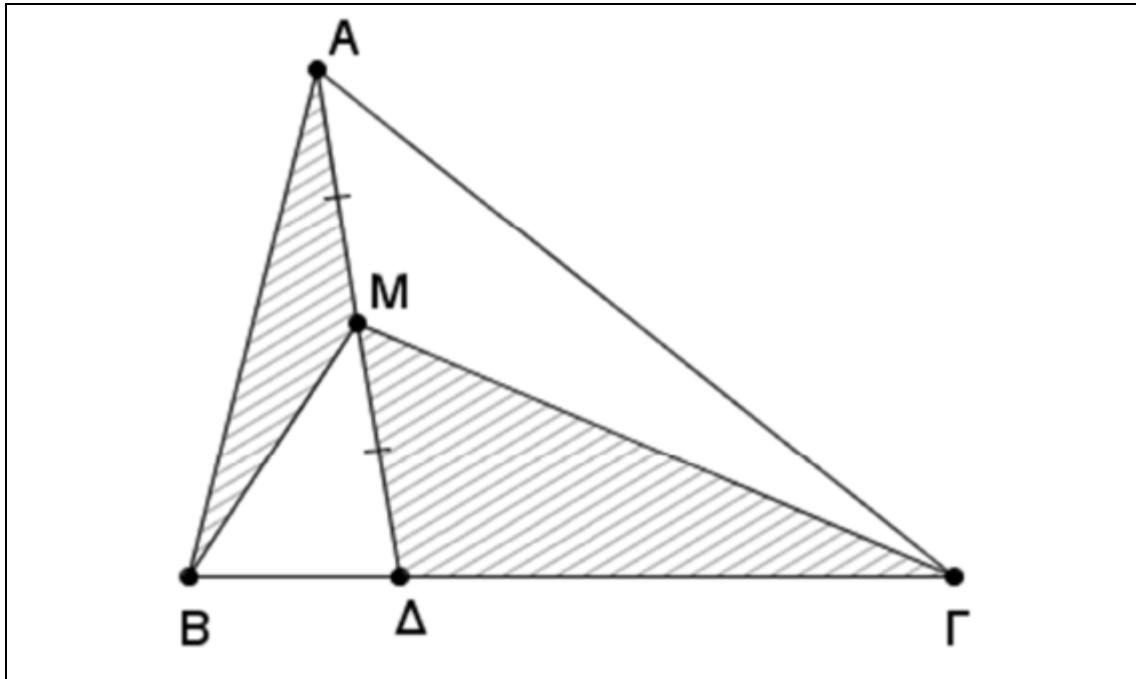
Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε Δ εσωτερικό σημείο της ΒΓ και έστω Μ στο μέσον της ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) $(ΑΜΒ) = \frac{1}{2}(ΑΔΒ)$

Μονάδες 12

β) $(ΑΜΒ) + (ΜΔΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ)$

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ Β6 (22297)**

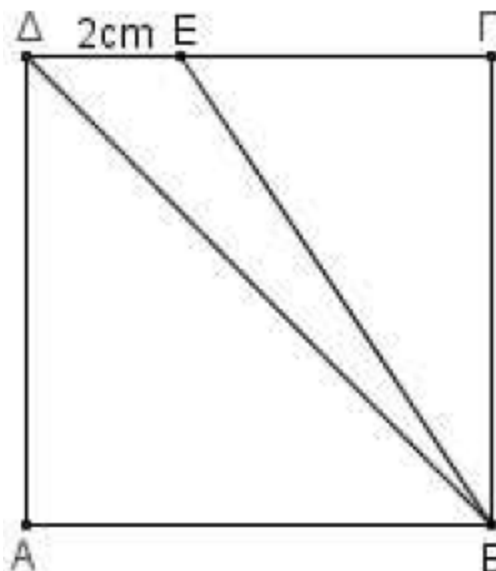
Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a θεωρούμε σημείο E της πλευράς $\Delta\Gamma$ έτσι, ώστε $\Delta E = 2$. Αν ισχύει ότι $(B\epsilon\Delta) = \frac{1}{8}(AB\Gamma\Delta)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου a είναι ίση με 8 cm .

Μονάδες 13

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος BE .

Μονάδες 12

**ΑΣΚΗΣΗ Β7 (22298)**

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε M το μέσο της $A\Delta$. Προεκτείνουμε τη $\Delta\Gamma$ προς το Γ κατά $\Gamma E = 2\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $(AMB) = \frac{(BΓΔ)}{2}$ Μονάδες 12

β) $(ABΓΔ) = (BΓΕ)$ Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ Β8 (22302)

Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ με $ΑΓ=2\text{cm}$ $BΓ = \sqrt{3}\text{cm}$ και γωνία $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $AB=1\text{cm}$.

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ABΓ$.

Μονάδες 8

γ) Να υπολογίσετε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ABΓ$.

Μονάδες 7

ΑΣΚΗΣΗ Β9 (22317)

Δίνεται τρίγωνο $ABΓΔ$ πλευράς α . Στην πλευρά AB παίρνουμε ένα τμήμα

$AE = \frac{3}{5}AB$ και στην AD ένα τμήμα $AZ = \frac{4}{5}AD$. Αν το εμβαδόν του πενταγώνου

$EBΓΔZ$ είναι 76, να υπολογίσετε:

α) το μήκος α της πλευράς του τετραγώνου $ABΓΔ$.

(Μονάδες 13

β) Την περίμετρο του πενταγώνου $EBΓΔZ$.

Μονάδες 12

«Θέμα Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (19022)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) τέτοιο ώστε να ισχύει $2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Αν η προέκταση της διαμέσου του ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο Ρ, να αποδείξετε ότι :

α) $\mu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

Μονάδες 8

β) $MP = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$

Μονάδες 8

γ) $(ΑΒΓ) = 6(MPΓ)$

Μονάδες 9

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (19032)

Δίνονται δυο κύκλοι (Ο, α) και (Κ, β) με $\alpha > \beta$, οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο Μ. Φέρνουμε το κοινό εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ με Α, Β σημεία των κύκλων (Ο, α) και (Κ, β) αντίστοιχα. Από το Μ θεωρούμε την κάθετη στο ΑΒ, η οποία τέμνει τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΚ και ΑΒ στα σημεία Λ και Ν αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

α) $M\Lambda = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}$

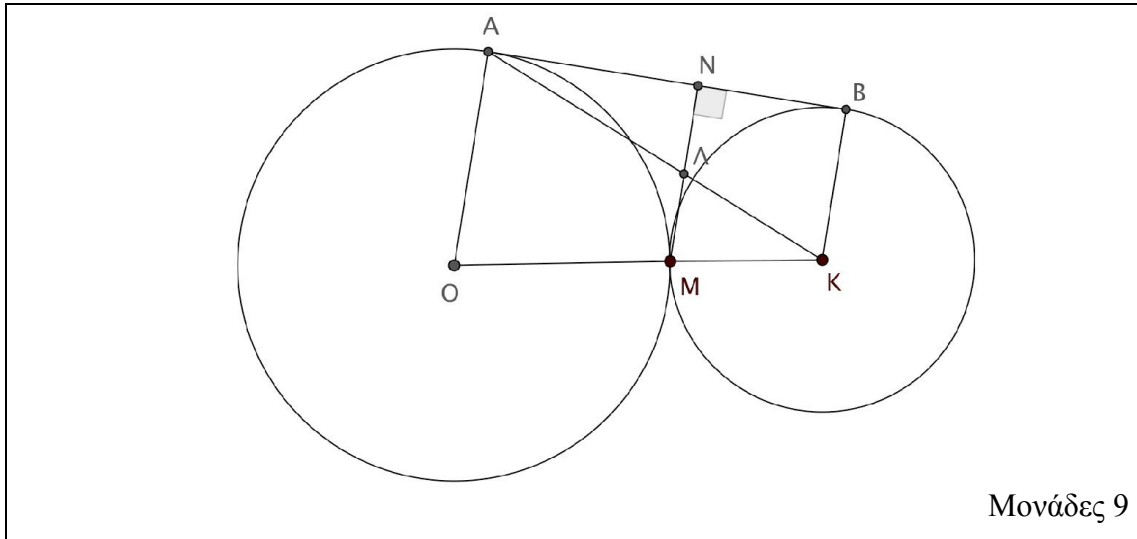
Μονάδες 8

β) $\Lambda N = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}$

Μονάδες 8

γ) Αν E_1 και E_2 είναι τα εμβαδά των κύκλων (Ο, α) και (Κ, β) αντίστοιχα, τότε

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{(A\Lambda N)}{(K\mu\Lambda)} \right)^2$$



Μονάδες 9

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (19034)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία M , Λ και Z πάνω στις πλευρές AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$

αντίστοιχα τέτοια, ώστε $AM = \frac{1}{2} AB$, $A\Lambda = \frac{2}{3} A\Gamma$ και $BZ = \frac{1}{3} B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $(AM\Lambda) = \frac{1}{3}(AB\Gamma)$

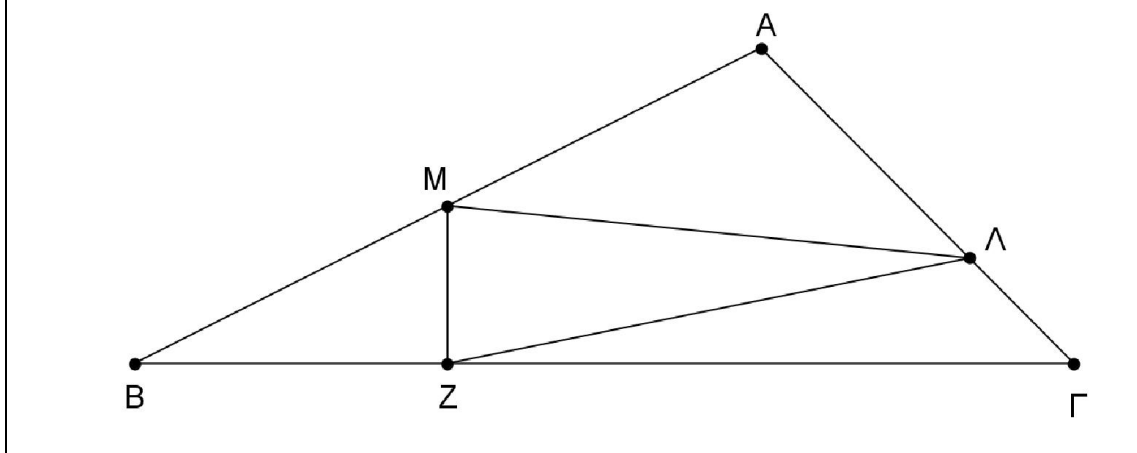
Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{(MZA)}{(AB\Gamma)} = \frac{5}{18}$

Μονάδες 12

γ) Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(AMZA)}{(AB\Gamma)}$

Μονάδες 6



ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (22310)

Ένα οικόπεδο $ΑΒΓΔ$ σχήματος ορθογωνίου τραπεζίου ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$) έχει πλευρές $ΓΔ = 40\text{m}$, $ΑΒ = 60\text{m}$ και $ΑΔ = 30\text{m}$. Ένας δρόμος αποκόπτει από το οικόπεδο το κομμάτι $ΖΕΚΓ$ σχήματος παραλληλογράμμου. Αν $ΔΖ = 20\text{m}$ και $ΑΕ = 10\text{m}$ τότε:

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν (ΚΓΒ).

(Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του οικοπέδου που αποκόπτει ο δρόμος.

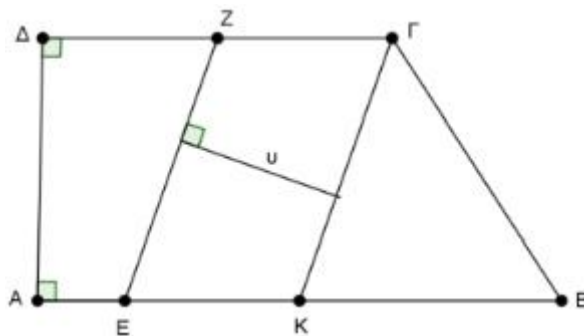
(Μονάδες 5)

γ) Να υπολογίσετε το πλάτος ($υ$) του δρόμου.

(Μονάδες 9)

δ) Να υπολογίσετε την ΒΓ.

(Μονάδες 6)

**ΑΣΚΗΣΗ Δ5 (22319)**

Δίνεται ημικύκλιο κέντρου O και διαμέτρου $ΑΒ=2R$. Στην προέκταση του $ΑΒ$ προς το B , θεωρούμε ένα σημείο M , τέτοιο ώστε $ΒΜ=2R$. Από το M φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα $ΜΓ$ στο ημικύκλιο. Φέρουμε εφαπτόμενη στο ημικύκλιο στο σημείο A η οποία τέμνει την προέκταση του τμήματος $ΜΓ$ στο σημείο Δ . Να αποδείξετε ότι:

α) $ΜΓ = 2\sqrt{2}R$

Μονάδες 8

β) $ΜΟ \cdot ΜΑ = ΜΓ \cdot Μ\Delta$

Μονάδες 8

γ) $(ΑΟΓ\Delta) = (ΜΟΓ)$

Μονάδες 9

ΑΣΚΗΣΗ Δ6 (22321)

Δίνονται δύο κύκλοι $(O,8)$, $(K,2)$ με διάκεντρο $ΟΚ = 12$ η οποία τους τέμνει στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Αν $ΑΒ$ είναι κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δυο κύκλων και $ΚΜ$ κάθετο τμήμα στην $ΟΑ$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) $ΜΚ = 6\sqrt{3}$

Μονάδες 6

β) $(ΑΟΚΒ) = 30\sqrt{3}$

Μονάδες 5

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $ΜΟΚ$

δ) $(\text{ΟΑΓ}) = 16(\text{ΔΒΚ})$	Μονάδες 7
	Μονάδες 7

ΑΣΚΗΣΗ Δ7 (22327)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Μ , Λ , Ζ πάνω στις πλευρές ΑΒ , ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\text{ΑΜ} = \frac{1}{2}\text{ΑΒ}$, $\text{ΑΛ} = \frac{2}{3}\text{ΑΓ}$ και $\text{ΒΖ} = \frac{1}{3}\text{ΒΓ}$.

α) Να αποδείξετε ότι $(\text{ΑΜΛ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})$

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{(\text{ΜΖΛ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{5}{18}$

(Μονάδες 12)

γ) Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(\text{ΑΜΖΛ})}{(\text{ΑΒΓ})}$.

(Μονάδες 6)

ΑΣΚΗΣΗ Δ8 (22328)

Δίνεται κύκλος $(\text{Κ}, \text{R})$ και μια διάμετρος του ΑΒ . Από σημείο Ε στην προέκταση της ΑΒ προς το μέρος του Β φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα στον κύκλο και έστω Γ το σημείο επαφής. Στο σημείο Ε φέρουμε κάθετη στην ΑΒ η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Δ . Να αποδείξετε ότι :

α) Το τετράπλευρο ΒΕΔΓ είναι εγγράψιμο.

(Μονάδες 8)

β) $\text{ΑΓ} \cdot \text{ΑΔ} = \text{ΑΕ}^2 - \text{ΒΕ} \cdot \text{ΑΕ}$.

(Μονάδες 10)

γ) $\frac{(\text{ΑΓΕ})}{(\text{ΒΕΓ})} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΒΕ}}$.

(Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ Δ9 (22336)

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$) προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ κατά τμήμα

$\text{ΓΔ} = \frac{\text{ΑΓ}}{2}$. Αν η προέκταση του ύψους ΑΜ , τέμνει την ΒΔ στο Ε , να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΕΔ}} = \frac{2}{3}$

(Μονάδες 8)

β) $\frac{(\text{ΒΓΕ})}{(\text{ΓΕΔ})} = \frac{2}{3}$

(Μονάδες 9)

$$\gamma) \frac{(AB\Delta)}{(ΓΕΔ)} = 5$$

(Μονάδες 8)

Θέμα Β

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (22295)

Με ένα σύρμα μήκους c κατασκευάζουμε ένα κανονικό εξάγωνο.

α) Να εκφράσετε την πλευρά του εξαγώνου ως συνάρτηση του c .

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του εξαγώνου ισούται με $\frac{c^2 \sqrt{3}}{24}$

Μονάδες 15



ΑΣΚΗΣΗ Β2 (22296)

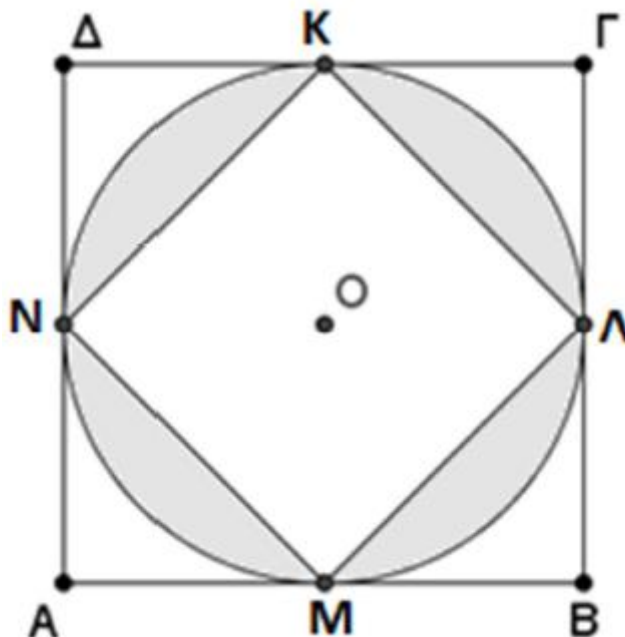
Σε τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ με πλευρά 10, θεωρούμε τον εγγεγραμμένο κύκλο του κέντρου $Ο$ και εντός του κύκλου το εγγεγραμμένο τετράγωνο $ΚΛΜΝ$, όπως στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $(ΚΛΜΝ) = 50$

Μονάδες 12

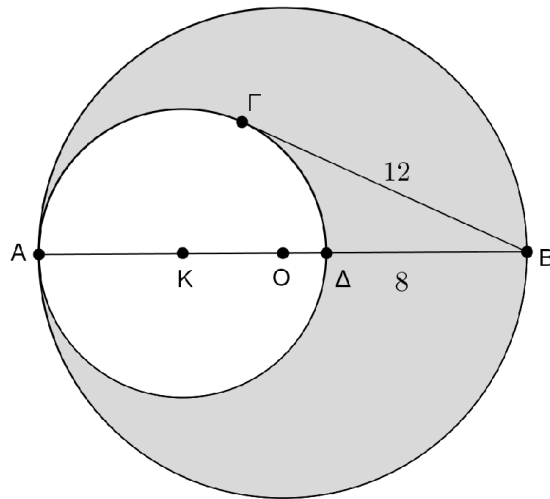
β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του κύκλου που βρίσκεται στο εξωτερικό του τετραγώνου $ΚΛΜΝ$ και εσωτερικά του κύκλου, είναι ίσο με $25(\pi - 2)$

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ Β3 (22300)

Στο παρακάτω σχήμα οι κύκλοι (O, R) και (K, ρ) εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο A . Από το άκρο B της διαμέτρου AB του κύκλου (O, R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα $B\Gamma$ του κύκλου (K, ρ) και είναι $B\Gamma=12$. Αν η διάμετρος BA τέμνει τον κύκλο (K, ρ) στο Δ και ισχύει ότι $B\Delta = 8$, τότε:



α) Να αποδείξετε ότι για τις ακτίνες R και ρ των κύκλων (O, R) και (K, ρ) ισχύουν $R = 9$ και $\rho = 5$.

Μονάδες 15

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου (σκιασμένο) που περικλείεται μεταξύ των 2 κύκλων.

Μονάδες 10

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (22301)

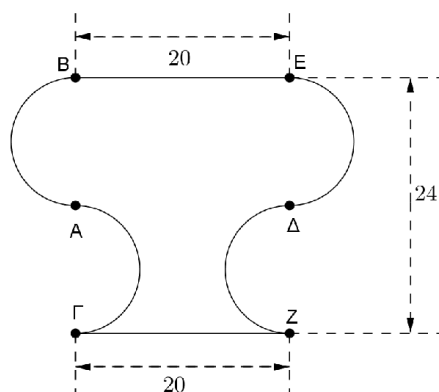
Στο παρακάτω σχήμα, τα καμπυλόγραμμα τμήματα BA , $A\Gamma$, $Z\Delta$ και ΔE είναι ίσα ημικύκλια. Αν $BE \parallel A\Delta \parallel \Gamma Z$, $BE = A\Delta = \Gamma Z = 20$ και το ύψος του σχήματος είναι 24, να υπολογίσετε:

α) Την περίμετρο του σχήματος.

Μονάδες 12

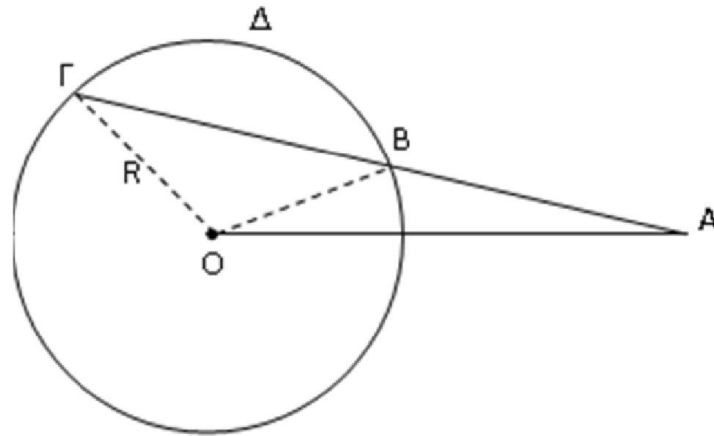
β) Το εμβαδόν του.

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ Β4 (22305)

Από σημείο A εκτός κύκλου (O, R) φέρουμε τέμνουσα $AB\Gamma$ έτσι ώστε $AB = B\Gamma$. Αν $OA = R\sqrt{7}$ τότε:



α) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = \lambda_3 = R\sqrt{3}$.

Μονάδες 12

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος $\Gamma\Delta B$.

Μονάδες 13

Θέμα Δ

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (22299)

Δίνεται κύκλος (O, R) και σημείο M τέτοιο, ώστε η δύναμή του ως προς τον κύκλο (O, R) να είναι $3R^2$. Αν MA, MB είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο M προς τον κύκλο, τότε:

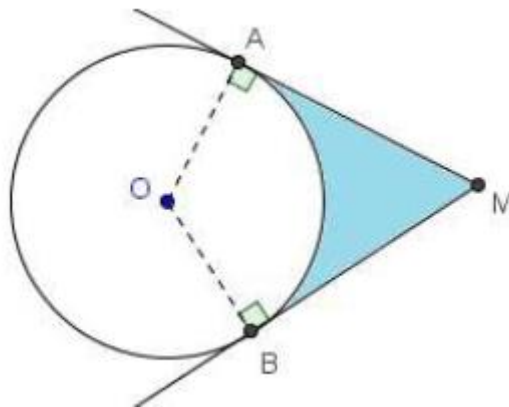
α) Να αποδείξετε ότι $MA = R\sqrt{3}$ (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε ως συνάρτηση της ακτίνας R το εμβαδόν
i) του τετραπλεύρου $OAMB$ (Μονάδες 6)

ii) του (σκιασμένου) μικτόγραμμου τριγώνου AMB (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $(OAGB) = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$, όπου Γ είναι το σημείο τομής του κύκλου με το ευθύγραμμο τμήμα OM .

(Μονάδες 5)



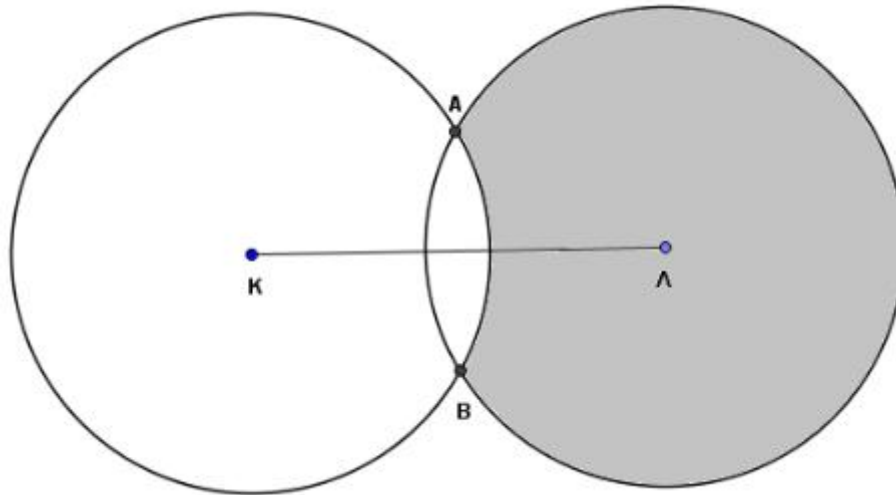
ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (22303)

Δύο ίσοι κύκλοι $(K, R), (\Lambda, R)$ τέμνονται στα σημεία A, B , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και έχουν διάκεντρο $K\Lambda = R\sqrt{3}$.

α) Να βρείτε τη γωνία $\widehat{K\Lambda}$ (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε ως συνάρτηση της ακτίνας R το εμβαδόν:
i) Του τετραπλεύρου $AKB\Lambda$. (Μονάδες 10)

ii) Του σκιασμένου μηνίσκου. (Μονάδες 8)



ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (22307)

Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ, ΑΔ και ΑΜ, όπου Μ το μέσο του ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) $(ΑΒΓΔΕΖ) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

(Μονάδες 5)

β) $(ΑΜΔ) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

(Μονάδες 7)

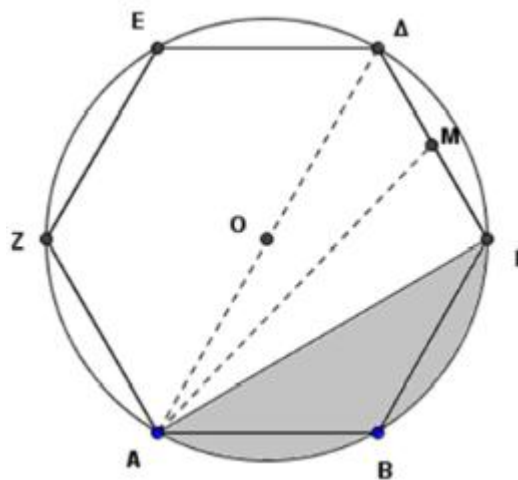
γ) $(ΑΜΔΕΖ) = 2(ΑΒΓΜ)$

(Μονάδες 5)

δ) Το εμβαδόν του (σκιασμένου) κυκλικού τμήματος που περικλείεται από τη χορδή

ΑΓ και το τόξο ΑΒΓ είναι ίσο με: $\frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$.

(Μονάδες 8)



ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (22315)

Δίνεται κύκλος (O, R) διαμέτρου AB και ημιευθεία Ax τέτοια, ώστε η γωνία $B\hat{A}x$ να είναι 30° . Η Ax τέμνει τον κύκλο στο σημείο Γ . Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B , η οποία τέμνει την Ax στο σημείο P . Να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = R$

Μονάδες 5

β) $\frac{(P\Gamma)}{(PAB)} = \frac{1}{4}$

Μονάδες 8

γ) $PB = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

Μονάδες 6

δ) Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία $B\hat{O}\Gamma$ είναι:

$$E = \frac{R^2 (2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$$

Μονάδες 6

ΑΣΚΗΣΗ Δ5 (22322)

Δίνεται κύκλος (O, R) και μία διάμετρος του $B\Gamma$. Η κάθετος στο μέσο E της ακτίνας OB τέμνει το ένα ημικύκλιο στο σημείο A και η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B τέμνει την προέκταση της χορδής $A\Gamma$ στο σημείο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $A\Gamma = \lambda_3 = R\sqrt{3}$

Μονάδες 8

ii. $A\Delta = \frac{A\Gamma}{3}$

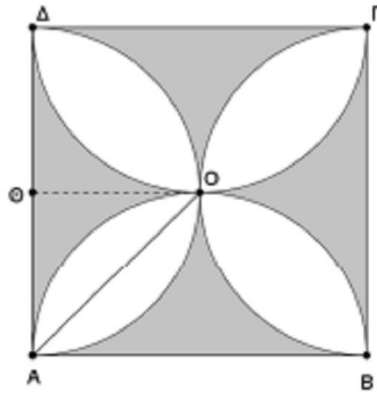
Μονάδες 8

β) Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών: $\frac{(\Delta AB)}{(\Delta B\Gamma)}$

Μονάδες 9

ΑΣΚΗΣΗ Δ6 (22325)

Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά 10, κατασκευάζουμε ημικύκλια με διαμέτρους τις πλευρές του τετραγώνου που βρίσκονται στο εσωτερικό του και έχουν κοινό σημείο το κέντρο O του τετραγώνου.



α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα που περιέχεται στην επίκεντρη γωνία $\widehat{A\Theta O}$, όπου Θ το μέσο της πλευράς AD .

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην επίκεντρη γωνία $\widehat{A\Theta O}$ είναι $\frac{25}{4}(\pi - 2)$.

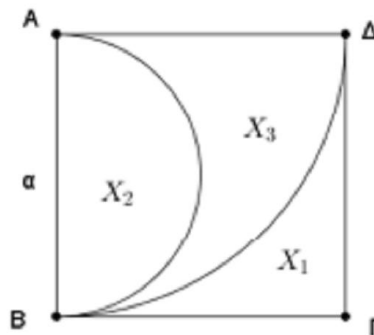
Μονάδες 10

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του τετραγώνου, είναι $5(4 - \pi)$.

Μονάδες 10

ΑΣΚΗΣΗ Δ7 (22326)

Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a , γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο A και ακτίνα a .



α) Αν X_1 είναι το χωρίο του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του τεταρτοκύκλιου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του είναι:

$$(X_1) = \frac{a^2}{4}(4 - \pi)$$

Μονάδες 5

β) Με διάμετρο AB κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου. Αν X_2 είναι το χωρίο του ημικυκλίου και X_3 το χωρίο του τεταρτοκυκλίου που βρίσκεται εξωτερικά του ημικυκλίου, να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο χωρίων X_2 και X_3 .

Μονάδες 11

γ) Ποιο από τα χωρία X_1 και X_2 έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

ΑΣΚΗΣΗ Δ8 (22329)

Δύο ίσοι κύκλοι (K,R) και (Λ,R) τέμνονται στα σημεία A και B έτσι ώστε το μήκος της διακέντρου τους να είναι $Κ\Lambda = R\sqrt{2}$

α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $Κ\Lambda\Lambda B$ είναι τετράγωνο.

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του κοινού χωρίου των δύο κύκλων.

Μονάδες 15

ΑΣΚΗΣΗ Δ9 (22332)

Σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας $R=6\text{cm}$ εγγράφουμε τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ και στο τετράγωνο εγγράφουμε νέο κύκλο.

α) Να υπολογίσετε:

i) Το εμβαδό του τετραγώνου.

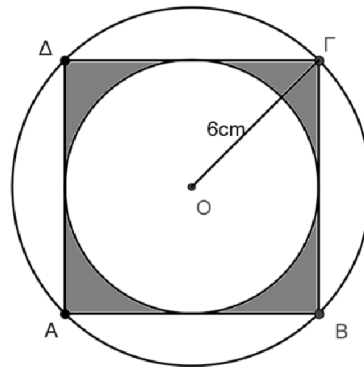
Μονάδες 7

ii) Το εμβαδό E του γραμμοσκιασμένου χωρίου, δηλαδή του χωρίου του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ που βρίσκεται έξω από τον εγγεγραμμένο κύκλο του.

Μονάδες 9

β) Να συγκρίνετε το εμβαδόν E του γραμμοσκιασμένου χωρίου με το εμβαδόν του τμήματος του κύκλου ακτίνας R που βρίσκεται έξω από τον το τετράγωνο $ΑΒΓΔ$.

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ Δ10 (22333)**

Με διάμετρο την ακτίνα OA ενός κύκλου (O, R) γράφουμε κύκλο (K) και από το O φέρουμε ημιευθεία που σχηματίζει με την ακτίνα OA γωνία 30° και τέμνει τον κύκλο (O) στο Γ και τον κύκλο (K) στο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τόξα $A\Gamma$ και $A\Delta$ έχουν ίσα μήκη.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου (O, R) την περίμετρο του μικτόγραμμου (σκιασμένου) τριγώνου $A\Delta\Gamma$

(Μονάδες 15)

